Principali insiemi di numeri

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ insieme dei **numeri naturali**
  o anche **interi non negativi**

- $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{-1, -2, -3, \dots\}$ insieme dei **numeri interi**

- $\mathbb{Q} = \left\{ \dfrac{n}{m} \ : \ n, m \in \mathbb{Z}, \ m \neq 0 \right\}$ insieme dei **numeri razionali**

- $\mathbb{R} =$ **?** insieme dei **numeri reali**

- $\mathbb{C}$ insieme dei **numeri complessi**

Insiemi

- L'insieme di tutti i sottoinsiemi di (per esempio) $\mathbb{N}$ si denota con $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ si chiama **insieme delle parti** di $\mathbb{N}$.
- **N.B.** Gli *elementi* di $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ sono *insiemi*. (Sottoinsiemi di $\mathbb{N}$.)
- Scriveremo $\boldsymbol{A \subseteq B}$ se ogni elemento di A appartiene anche a B.
  Ovvero, se $a \in A \Rightarrow a \in B$ per ogni a.
- Scriveremo $\boldsymbol{A \subset B}$ quando $A \subseteq B$ e $A \neq B$.
  Diremo che A è incluso *strettamente* o *propriamente* in B.

La relazione di inclusione $\subseteq$ è un esempio di ordine
(si dice ordine *debole*, la relazione $\subset$ è il suo analogo *forte*.)

Intervalli I

Un **intervallo (reale)** è un insieme $I \subseteq \mathbb{R}$ tale che

$$a, c \in I \text{ e } a \leq b \leq c \quad \Rightarrow \quad b \in I.$$

Esempi:

$$\{x \in \mathbb{R} \ : \ 0 < x < 1\} = (0,1)$$

$$\{x \in \mathbb{R} \ : \ 0 < x \leq 2\} = (0,2]$$

$$\{x \in \mathbb{R} \ : \ -1 \leq x \leq 2\} = [-1,2]$$

$$\{x \in \mathbb{R} \ : \ 1 < x\} = (1,+\infty)$$

$$\{1\}, \ \mathbb{R}, \ \varnothing \ \text{ (casi degeneri)}$$

Non esempi:

$$\{x \in \mathbb{R} \ : \ x \neq 1\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$\{x \in \mathbb{R} \ : \ 1 \leq x^2\} = (-\infty,-1] \ \cup \ [1,+\infty)$$

$$\mathbb{N}, \ \mathbb{Z}, \ \mathbb{Q}$$

In modo analogo si definiscono intervalli *razionali* o *interi*.
Ma se non specificato si sottointende: *reali*.

Intervalli II

Un intervallo si dice **aperto** se non contiene *nessuno* dei suoi estremi
chiuso se contiene *tutti* i suoi estremi

(a, b) intervallo **aperto** (estremi **esclusi**)

$[a, b]$ intervallo **chiuso** (estremi **inclusi**)

$(a, b]$ intervallo aperto a **sinistra** (o **inferiormente**)
e chiuso a **destra** (o **superiormente**)

$(a, +\infty)$ è aperto, **illimitato superiormente**, a è l'unico estremo.

$(-\infty, b]$ è chiuso.

$\mathbb{R}$, $\varnothing$ sono sia aperti che chiusi perché non hanno estremi.

Maggioranti e minoranti

Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$ e siano $a, b \in \mathbb{R}$

Notazione: $\boldsymbol{A < b}$ ogni elemento di A minore di b.
$\boldsymbol{A < B}$ ogni elemento di A minore di ogni elemento di B.

$A \leq b$, $A \leq B$, $a < B$,... sono definiti analogamente.

Diremo che A è limitato **superiormente** se $A \leq b$ per qualche b.
inferiormente $b \leq A$
limitato = superiormente + inferiormente.

Se $A \leq b$ diremo che b è un **maggiorante** di A
$b \leq A$ **minorante**

Se inoltre $b \in A$ diremo che un **massimo/minimo** di A.

Estremi superiori ed inferiori

$A = [0,1]$ l'insieme dei maggioranti è	$[1, +\infty)$	$\max A = 1$
$A = [0,1)$ l'insieme dei maggioranti è	$[1, +\infty)$	$\max A$ non esiste
$A = \left\{x \in \mathbb{Q} \ : \ x^2 \leq 2\right\}$ l'ins. dei magg. è	$[\sqrt{2}, +\infty)$	$\max A$ non esiste
$A = \left\{2^n \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}$ l'ins. dei magg. è	$\varnothing$	$\max A$ non esiste
$A = \left\{2^{-n} \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}$ l'ins. dei minoranti è	$(-\infty, 0]$	$\min A$ non esiste

Se non vuoto,
l'insieme dei maggioranti è intervallo **chiuso e illimitato superiormente**.
minoranti **inferiormente**

L'estremo dell'insieme dei maggioranti si dice: **estremo superiore, sup $\boldsymbol{A}$**
minoranti **estremo inferiore, inf $\boldsymbol{A}$**

N.B In $\mathbb{R}$ esistono sempre (se A limitato e non vuoto).

Se A illimitato superiormente scriveremo **sup $\boldsymbol{A = +\infty}$**
inferiormente **inf $\boldsymbol{A = -\infty}$**

Estremi superiori ed inferiori esempi

$$\sup \left\{1/(n+1) \ : \ n \in \mathbb{N}\right\} = 1$$

$$\max \left\{1/(n+1) \ : \ n \in \mathbb{N}\right\} = 1$$

$$\inf \left\{1/(n+1) \ : \ n \in \mathbb{N}\right\} = 0$$

$$\sup \left\{x^2 \ : \ x \in \mathbb{R} \setminus [-1,1]\right\} = +\infty$$

$$\inf \left\{x^2 \ : \ x \in \mathbb{R} \setminus [-1,1]\right\} = 1$$

$$\min \left\{x^2 \ : \ x \in \mathbb{R} \setminus [-1,1]\right\} = \text{non esiste}$$

$$\sup \left\{x \cdot y \ : \ x \in (0,1) \text{ e } y \in [1,2]\right\} = 2$$

$$\inf \left\{x \cdot y \ : \ x \in (0,1) \text{ e } y \in [1,2]\right\} = 0$$

$$\min \left\{x \cdot y \ : \ x \in (0,1) \text{ e } y \in [1,2]\right\} = \text{non esiste}$$

Successioni

Una **successione** (a valori reali) è una mappa $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.
In inglese si dice **sequence**.

Diremo **sequenza finita** se *dom a* è finito.

Si scrive a_n per denotare $a(n)$, il valore della successione in n.

L'intera successione si denota con: $(a_n)_n$, $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$, o $(a_i)_{i=0}^{\infty}$

Per sequenze finite si scrive $a_0, \ldots, a_n$, $(a_i)_{i=0,\ldots,n}$, o $(a_i)_{i=0}^{n}$.

(Così si mette in evidenza il dominio di definizione.)

Altra notazione: $(a_i : i \in \mathbb{N})$ oppure $(a_i : i = 0, \ldots, n)$.

Esempi: $\quad a_n = \sqrt{n} \quad a_n = 2^n \quad a_n = \dfrac{1}{n+1} \quad a_n = \dfrac{n^2}{2^n + 2^{-n}}$

(Se il dominio di definizione non viene specificato si intende
il massimo dominio in cui le espressioni hanno significato.)

Sommatorie I

Data una sequenza finita $(a_i \ : \ i = 0, \ldots, n)$ scriveremo.

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \quad \text{per} \quad (a_0 + a_1 + \cdots + a_n)$$

In generale
$$\sum_{i=m}^{n} a_i \quad \text{per} \quad (a_m + a_1 + \cdots + a_n)$$

Proprietà importanti:

$$\sum_{i=0}^{n} c \cdot a_i \quad = \quad c \cdot \sum_{i=0}^{n} a_i \quad \text{dove } c \text{ è una costante arbitraria.}$$

Se $(y_i \ : \ i = 0, \ldots, n)$ è una altra sequenza:

$$\sum_{i=0}^{n} (a_i + y_i) \quad = \quad \left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right) + \left(\sum_{i=0}^{n} y_i\right).$$

$$\sum_{i=0}^{n} 1 \quad = \quad n + 1$$

Sommatorie II

Esempio. Sia ora $(a_i \ : \ i = 0, \ldots, 2n)$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{2n} a_i &= \sum_{i=0}^{n} a_i + \sum_{i=n+1}^{2n} a_i \\
&= \sum_{i=0}^{n} a_{2i} + \sum_{i=0}^{n-1} a_{2i+1} \\
&= \sum_{i=0}^{n} a_{2i} + \sum_{i=1}^{n} a_{2i-1}.
\end{aligned}$$

Notazione più generale:

Sa $D = \{i_0, \ldots, i_n\} \subseteq \mathbb{N}$ è una insieme finito.

Sia $(a_i \ : \ i \in D)$ una sequenza finita con *dom* $a = D$.

$$\sum_{i \in D} a_i = a_{i_0} + a_{i_1} + \cdots + a_{i_n}$$

Sommatorie III

Sommatorie su due indici:

Sia $a : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$ una mappa con dominio di definizione finito $D = \{0, \ldots, n\}^2$.

Indicheremo a con $(a_{i,j} : 0 \leq i, j \leq n)$ o con $(a_{i,j})_{0 \leq i,j \leq n}$.

Possiamo immaginare $(a_{i,j})_{0 \leq i,j \leq n}$ come una matrice:

$$
\begin{array}{cccc}
a_{0,0} & a_{0,1} & \ldots & a_{0,n} \\
a_{1,0} & a_{1,1} & \ldots & a_{1,n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n,0} & a_{n,1} & \ldots & a_{n,n}
\end{array}
$$

$$\sum_{i,j=0}^{n} a_{i,j} \quad = \quad \text{somma di tutti gli elementi della matrice}$$

Sommatorie IV

Per l'associatività della somma:

$$\sum_{i,j=0}^{n} a_{i,j} \quad = \quad \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} a_{i,j}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
\sum_{j=0}^{n} a_{0,j} & = & a_{0,0} & + & a_{0,1} & + & \dots & + & a_{0,n} \\
\sum_{j=0}^{n} a_{1,j} & = & a_{1,0} & + & a_{1,1} & + & \dots & + & a_{1,n} \\
\vdots & & & & & & & & \\
\sum_{j=0}^{n} a_{n,j} & = & a_{n,0} & + & a_{n,1} & + & \dots & + & a_{n,n}
\end{array}$$

Sommatorie IV

Per l'associatività della somma:

$$\sum_{i,j=0}^{n} a_{i,j} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n} a_{i,j}$$

$$\begin{array}{cccc}
a_{0,0} & a_{0,1} & \cdots & a_{0,n} \\
+ & + & & + \\
a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\
+ & + & \cdots & + \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
+ & + & & + \\
a_{n,0} & a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \\
\| & \| & & \| \\
\sum_{i=0}^{n} a_{i,0} & \sum_{i=0}^{n} a_{i,1} & \cdots & \sum_{i=0}^{n} a_{i,n}
\end{array}$$

Sommatorie V

Un esempio:

abbiamo due successioni $(a_i \ : \ i = 0, \ldots, n)$ e $(b_i \ : \ i = 0, \ldots, n)$.

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} a_i \sum_{i=0}^{n} b_i &= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} a_i b_j \\
&= \sum_{i,j=0}^{n} a_i b_j
\end{aligned}
$$

Gli intorni

Se $c \in I \subseteq \mathbb{R}$

intervallo *aperto*

Diremo che I è un **intorno (aperto)** di c.

Gli intervalli della forma $(a, +\infty)$ si dicono anche **intorni di** $+\infty$
$(-\infty, a)$ $-\infty$

Limiti di successioni

Data una successione $(a_n : n \in \mathbb{N})$ e scriveremo

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lambda$$

$$\lambda \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$$

dipende da

$$\forall I \text{ intorno di } \lambda \quad \underbrace{\exists m \, \forall n > m}_{\substack{\text{per sempre}\\ \text{dopo un transiente}\\ \text{lungo al più } m}} \quad a_n \in I$$

N.B. m dipende da I, più piccolo è l'intorno più lungo il transiente.

Non esempi di limiti

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lambda \qquad \forall\, I \text{ intorno di } \lambda \quad \exists m \quad \forall n > m \quad a_n \in I$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq \lambda \qquad \exists\, I \text{ intorno di } \lambda \quad \underbrace{\forall m \quad \exists n > m}_{\text{infinite volte}} \quad a_n \notin I$$

Verifichiamo che

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \neq 1 \qquad I = (0, +\infty) \qquad a_n \notin I \text{ per } n \text{ dispari}$$

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \neq -1 \qquad I = (-2, 0) \qquad a_n \notin I \text{ per } n \text{ pari}$$

$$\lim_{n\to\infty} 2^{-n} \neq \frac{1}{2} \qquad I = (\frac{1}{4}, +\infty) \qquad a_n \notin I \text{ per } n > 2$$

$$\lim_{n\to\infty} 2^n + (-2)^n \neq +\infty \qquad I = (0, +\infty) \qquad a_n \notin I \text{ per } n \text{ dispari}$$

Esempi di limiti I

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lambda \quad \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \quad \forall\, I \text{ intorno di } \lambda \quad \exists m \quad \forall n > m \quad a_n \in I$$

Verificiamo che $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

Se I è un intorno di 0 allora $(a, b) = I$ per qualche $a < 0 < b$.

Prendiamo m tale che $m > \dfrac{1}{b}$.

Quindi $n > \dfrac{1}{b}$ per ogni $n > m$.

Ovvero $\dfrac{1}{n} < b$ per ogni $n > m$.

Chiaramente $a < 0 < \dfrac{1}{n}$. Quindi $\dfrac{1}{n} \in I$ per ogni $n > m$.

Esempi di limiti II

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lambda \quad \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \quad \forall\, I \text{ intorno di } \lambda \quad \exists m \quad \forall n > m \quad a_n \in I$$

Verificiamo che $\displaystyle \lim_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{n}} = 1$

Sia $I = (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ con $\varepsilon > 0$ un generico intorno di 1.

$$\begin{aligned} 2^{\frac{1}{n}} \in I \ &\Leftrightarrow\ 1-\varepsilon < 2^{\frac{1}{n}} < 1+\varepsilon \\ &\Leftrightarrow\ \overset{\text{inutile}}{\cancel{\log_2(1-\varepsilon) <}}\ \frac{1}{n} < \log_2(1+\varepsilon) \\ &\Leftrightarrow\ \frac{1}{\log_2(1+\varepsilon)} < n \end{aligned}$$

Quindi se $m =$ otteniamo come richiesto: $2^{\frac{1}{n}} \in I$ per ogni $n > m$

Limiti di successione monotone

Non sempre le successioni hanno un limite.

Per esempio $\lim_{n \to +\infty} (-1)^n$ non esiste.

Comunque le successioni **monotone** hanno sempre limite.

Definizione: la successione $(a_n : n \in \mathbb{N})$ si dice:

$$\begin{array}{rl} \text{monotona } \textbf{crescente} \text{ se} & a_n \leq a_{n+1} \\ \textbf{decrescente} & a_{n+1} \leq a_n \end{array}$$

Infatti:

$$\begin{array}{rclcl} \text{monotona crescente} & \Rightarrow & \lim_{n \to +\infty} a_n & = & \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \\ \text{decrescende} & \Rightarrow & & & \inf \end{array}$$

Serie

Data una successione $(a_i\ :\ i \in \mathbb{N})$ definiamo la successione $(s_n\ :\ n \in \mathbb{N})$

$$s_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$$

$$\sum_{i=0}^{+\infty} a_i \quad = \quad \lim_{n \to +\infty} s_n \quad = \quad \begin{cases} \lambda \in \mathbb{R} & \text{serie } \textbf{convergente} \\ -\infty, +\infty & \text{serie } \textbf{divergente} \\ \text{non esiste} & \text{serie } \textbf{indeterminata} \end{cases}$$

questo limite si chiama **serie**

Serie: un esempio

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{2^i} \quad = \quad ?$$

Calcoliamo

$$s_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^i}$$

Valgono le seguenti identità:

$$s_{n+1} = s_n + \frac{1}{2^{n+1}} \qquad \text{e} \qquad s_{n+1} = \frac{1}{2} s_n + 1.$$

Risolvendo il sistema:

$$s_n = 2 - \frac{1}{2^n}.$$

Quindi

$$\lim_{n \to +\infty} s_n \quad = \quad \lim_{n \to +\infty} 2 - \frac{1}{2^n} \quad = \quad 2$$