La serie geometrica

Generalizziamo l'esempio precedente. Sia $q \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{i=0}^{+\infty} q^n \quad = \quad ?$$

Ragionando come nel caso $q = \dfrac{1}{2}$ otteniamo

$$s_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \qquad \text{se } q \neq 1$$

$$s_n = n + 1 \qquad \text{se } q = 1$$

Quindi

$$\lim_{n \to +\infty} s_n \quad = \quad \begin{cases} \dfrac{1}{1-q} & \text{se } -1 < q < 1 \\ +\infty & \text{se } 1 \leq q \\ \text{indeterminata} & \text{se } q \leq -1 \end{cases}$$

Esempio

Supponiamo che se C se è la concentrazione plasmatica di un farmaco in un dato momento, dopo un'ora questa si riduce ad αC, dove $\alpha \in (0,1)$ è una costante indipendente da C.

Partendo da un livello ematico C_0 quanto diventa dopo n ore?

Ora 0 concentrazione C_0

Ora 1 concentrazione $C_1 = \alpha C_0$

Ora 2 concentrazione $C_2 = \alpha C_1 = \alpha^2 C_0$

...

Ora n concentrazione $C_n = \alpha C_{n-1} = \alpha^n C_0$.

Esempio

Somministriamo una volta al giorno una dose di farmaco che innalza la concentrazione plasmatica di C_0. Qual'è la concentrazione dopo n giorni? (Subito dopo la $(n+1)$-esima somministrazione.) Supponiamo che dopo un giorno la concentrazione si riduce di un fattore β. (Cioè $C_1 = \beta C_0$.)

Giorno 0 concentrazione C_0

Giorno 1 concentrazione $C_1 \ = \ \beta C_0 + C_0 \ = \ (1+\beta) C_0$

Giorno 2 concentrazione $C_2 \ = \ \beta C_1 + C_0 \ = \ (1+\beta+\beta^2) C_0$

...

Giorno n concentrazione $C_n \ = \ \beta C_{n-1} + C_0 \ = \ \sum_{i=0}^{n} \beta^i C_0 \ = \ \dfrac{1-\beta^{n+1}}{1-\beta} C_0.$

Concentrazione massima $C_{\max} \ = \ \dfrac{1}{1-\beta} C_0$ (N.B.è un sup non un max)

Concentrazione minima $C_{\min} \ = \ \dfrac{\beta}{1-\beta} C_0.$

Digressione

Tipicamente non viene dato α ma l'**emivita** (in inglese **half-life**) del farmaco. Questo e il tempo $t_{1/2}$ necessario a dimezzare la concentrazione del farmaco.

Supponimo che l'emivita di un farmaco sia 33 ore. Quanto è la concentrazione dopo 24 ore?

Sia C la concentrazione iniziale, αC la concentrazione dopo un'ora.

Abbiamo che $\alpha^{33} C = (1/2) C$ quindi $\alpha = 2^{-\frac{1}{33}}$.

Dopo 24 ore la concentrazione è $\alpha^{24} C = 2^{-\frac{24}{33}} C$. $\left(= e^{-\frac{24 \ln 2}{33}} C \right)$.

In generale $C(t) = e^{-t\left(\frac{\ln 2}{t_{1/2}}\right)} C(0) = e^{-kt} C(0)$ dove $k = \frac{\ln(2)}{t_{1/2}}$

Digressione

Supponiamo che la concentrazione dei livelli plasmatici di un farmaco segua una legge esponenziale.

Supponiamo che la concentrazione plasmatica passi da 15 mg/L a 9 mg/L in 24 ore. Qual è l'emivita del farmaco?

$$C(24) = e^{-24\left(\frac{\ln 2}{t_{1/2}}\right)} C(0)$$

$$9 = e^{-24\left(\frac{\ln 2}{t_{1/2}}\right)} 15$$

$$\ln \frac{9}{15} = -24\left(\frac{\ln 2}{t_{1/2}}\right)$$

$$t_{1/2} = 24 \frac{\ln 2}{\ln 5/3} \approx 32.6$$

Digressione

Se la popolazione (di umani, di batteri, di cellule tumorali, ecc.) cresce del 2% ogni (fissato) intervallo di tempo, allora $\alpha = 1.02$.

Se N_0, è il numero di individui al tempo $n = 0$, allora $N_n = \alpha^n N_0$.

Supponiamo che un numero costante H di individui venga prelevato ad ogni unità di tempo. Con quale legge evolve la popolazione?

$$
\begin{aligned}
N_{n+1} &= \alpha N_n - H \\
N_1 &= \alpha N_0 - H \\
N_2 &= \alpha N_1 - H = \alpha^2 N_0 - \alpha H - H \\
N_3 &= \alpha N_2 - H = \alpha^3 N_0 - \alpha^2 H - \alpha H - H \\
&\vdots \\
N_n &= \alpha^n N_0 - H \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^i = \alpha^n N_0 - H \frac{1-\alpha^n}{1-\alpha} = \alpha^n \Big(N_0 - \frac{H}{\alpha - 1} \Big) + \frac{H}{\alpha - 1}
\end{aligned}
$$

Una serie telescopica (serie di Mengoli)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} \quad = \quad ?$$

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right] \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Quindi

$$\lim_{n\to+\infty} s_n \quad = \quad \lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{n+1} \quad = \quad 1$$

Un criterio di convergenza: criterio del confronto

Se $(a_n : n \in \mathbb{N})$ e $(b_n : n \in \mathbb{N})$ sono due successioni tali che

- $0 < a_n < b_n$ per ogni n
- $\sum_{n=0}^{+\infty} b_i$ converge.

Allora

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_i \text{ converge e } \sum_{n=0}^{+\infty} a_i < \sum_{n=0}^{+\infty} b_i.$$

Applicazione:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} < 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 3. \quad \text{(Vedremo che converge ad } e \simeq 2.718)$$

Un'applicazione del criterio del confronto

La serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

è maggiorata dalla serie di Mengoli perché

$$\frac{1}{n^2} \quad < \quad \frac{1}{(n-1)n}.$$

Quindi

$$0 \quad < \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \quad < \quad 1$$

vedremo che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \quad = \quad \frac{\pi^2}{6}$$

La serie armonica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \quad = \quad +\infty$$

Ritorneremo su questa serie quando saremo in grado di lavorare con gli integrali (la divergenza apparirà come ovvia). Al momento, ragioniamo come segue:

$$1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{\geq \frac{2}{4} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)}_{\geq \frac{4}{8} = \frac{1}{2}} + \cdots + \left(\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k}\right) + \ldots$$

$$\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} \quad \geq \quad \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{2^{n+1}} \quad = \quad (2^{n+1} - 2^n)\frac{1}{2^{n+1}} \quad = \quad \frac{1}{2}$$