

Matematica CTF (2016-17)

①

~~Analisi~~
Analisi: 2 ingredienti < $\begin{matrix} \text{numeri} \\ \text{funzioni} \end{matrix}$

Numeri:

$$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \dots\} \quad +, \cdot \text{ OK} \quad (\text{ma non } -, /)$$

$$\mathbb{Z} := \{\dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} \quad +, -, \cdot \text{ OK} \\ (\text{ma non } /)$$

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$$

$$= \{ \text{numeri dec. lm. o periodici} \} \quad +, -, \cdot, / \text{ OK!}$$

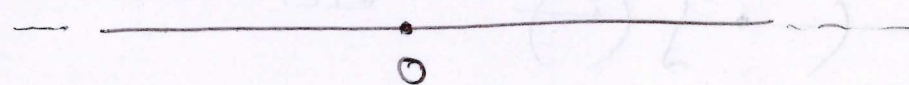
Però: numeri dec. non periodici?

Risolvere Eq. $x^2 = 2$?

calcolare perimetro cerchio?

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \dots = ?$$

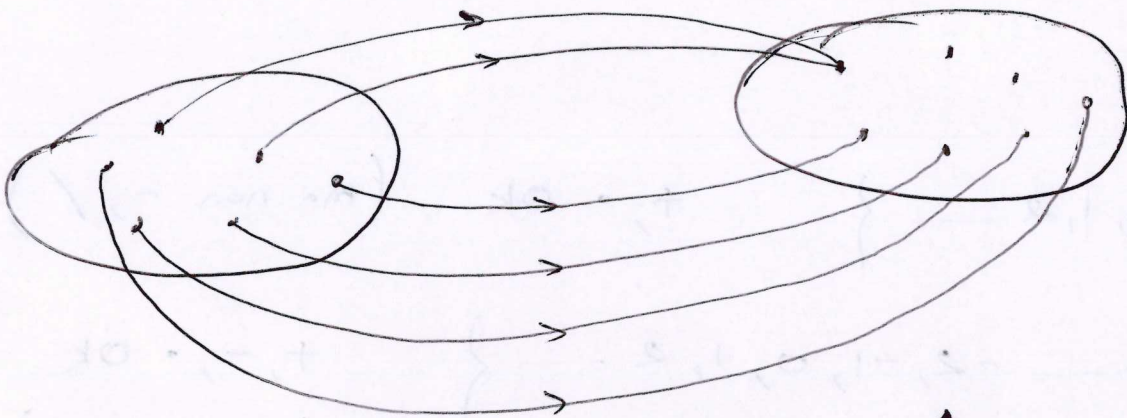
$$\leadsto \mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \{ \text{numeri irrazionali} \}$$

Graficamente: 

$$[\mathbb{Q}: x^2 = -2? \leadsto \text{numeri complessi } \mathbb{C}]$$

Funzioni

Astrattamente

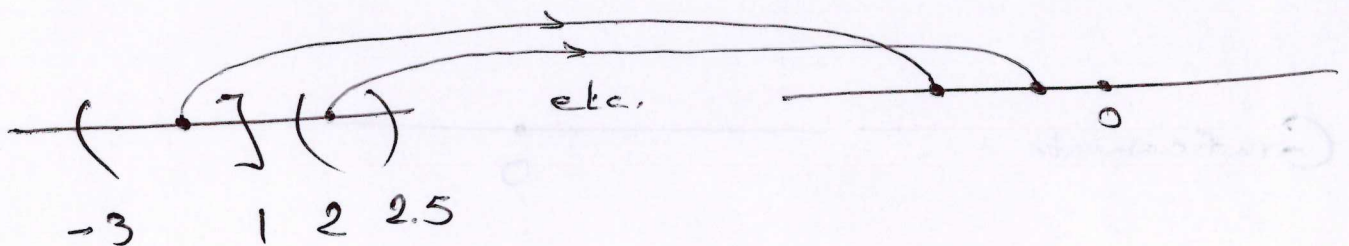


OSS:

ho usato tutti i punti

- possono avanzare punti ("funz. non suriettiva")
- posso colpire stesso punto più volte ("funz. non iniettiva")

Tipicamente, $\{ \dots \} = \text{insieme di numeri} \subseteq \mathbb{R}$



Terminologia:

L'insieme $a \rightarrow y$ = "dominio", $x \rightarrow b$ = "codominio"

$\{\text{numeri su cui } f \text{ è def.}\} = \text{dom. di def.}$

(2)

$\{\text{numeri colpiti}\} = \text{immagine}$

Esempio:

$$x \mapsto \sqrt{x}$$

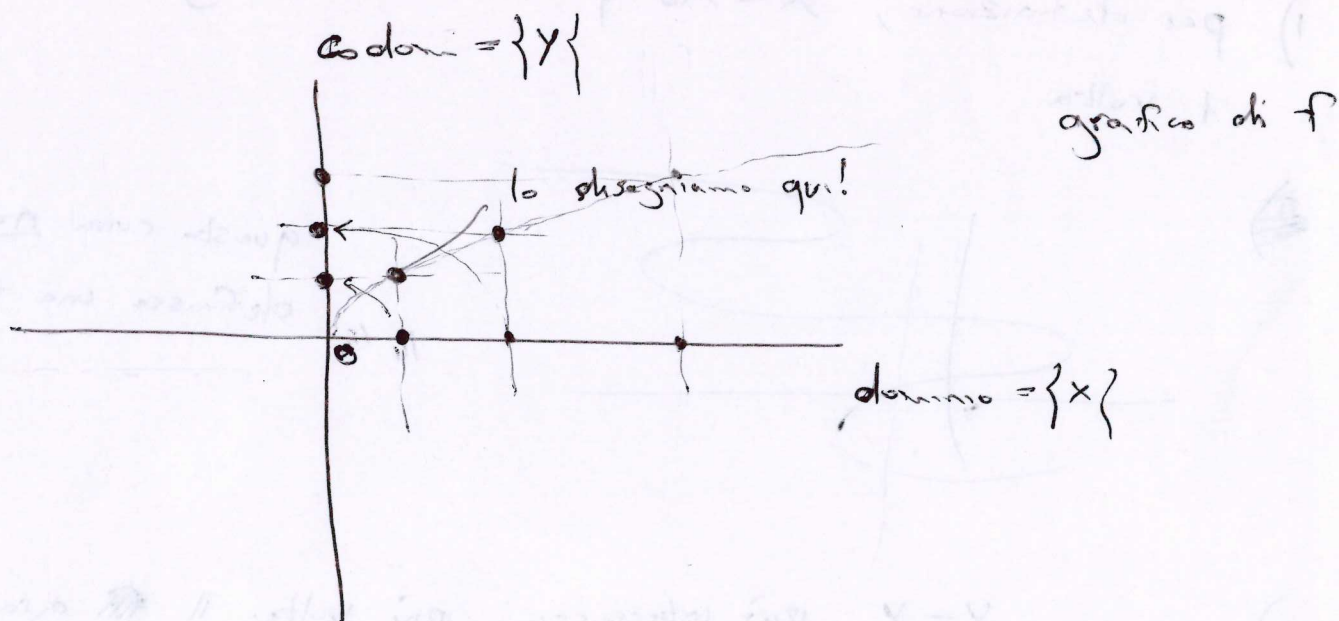
$\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$

$\text{dom} = \mathbb{R}, \text{codom} = \mathbb{R}, \text{dom di def} = \{x \geq 0\}, \text{immagine} = \{y \geq 0\}$

Oss: per non ~~confonderci~~ confonderci, a volte usiamo lettere diverse per dom & codom (anche se ambo sono insiem. numerici)

Rappresentazione migliore: scriviamo sotto che foglio è bidimensionale



Oss: f completamente def. dal suo grafico

In particolare:

dom. di def. = $\left\{ \text{punti dell'asse } x \text{ che stanno sopra/} \right.$
 $\left. \text{sotto il grafico} \right\}$

"Spiaccichiamo ~~il grafico~~ orizz."

Immagine = $\left\{ \text{punti dell'asse } y \text{ che stanno a dx/sin.} \right.$
 $\left. \text{del grafico} \right\}$

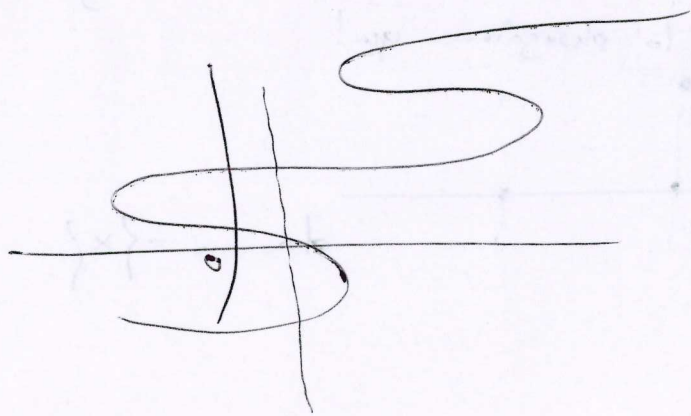
"Spiaccichiamo vert."

Quindi: $x_0 \in \text{dom. di def.} \iff$ retta verticale $x = x_0$
interseca il grafico

$y_0 \in \text{imm.} \iff$ retta orizzontale $y = y_0$
interseca il grafico

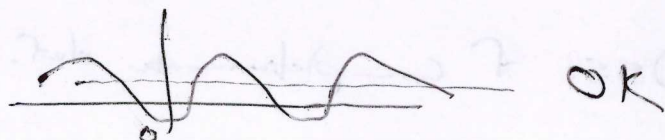
OSS:

1) per definizione, $x = x_0$ può intersecare grafico al max.
1 volta



questa curva non
definisce una funzione

2) invece, $y = y_0$ può intersecare più volte il ~~grafico~~ grafico
($\iff f$ non su)



OK

Q: A cosa servono le funzioni?

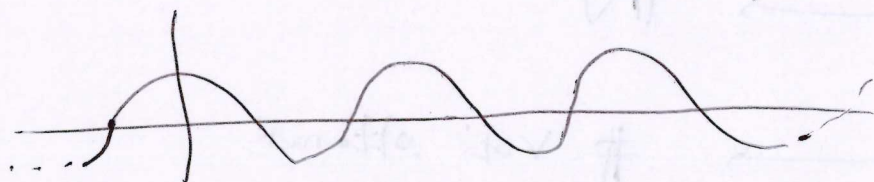
③

Le funzioni descrivono tutto

• temperatura ora = 1 numero

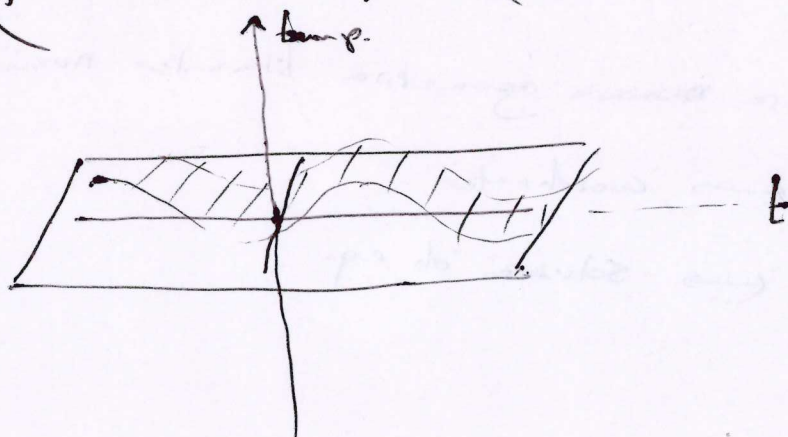
temperatura tempo $t \mapsto f(t)$

(lanti numeri)
"organizzati"



• temperatura di sbarretta di ferro

(posizione, ora) = $(x, t) \mapsto f(t, x)$

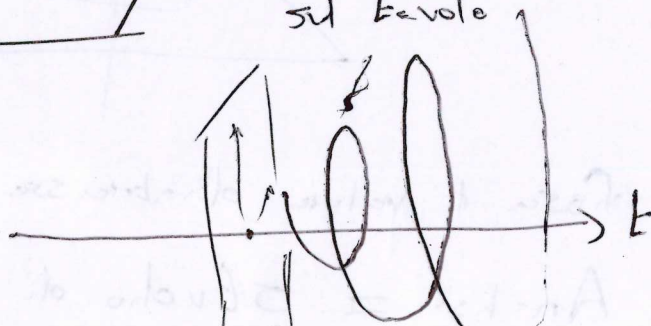


• posizione scarafaggio sul tavolo, 2 numeri (= coord.)

moto: $t \mapsto (x(t), y(t))$



bracchetta dello scarafaggio
sul tavolo



Rappresentazione
del grafico
della funzione
di moto

• Statistica:

Sondaggio

su preferenze politiche di mille persone
~~non sotto persona~~

dati raccolti ("grazie") $\{1, \dots, 1000\} \longrightarrow \{\text{partiti}\}$

dati raggruppati / distribuzione di frequenza

$\{\text{partiti}\} \longrightarrow \mathbb{N}$

partito $\longrightarrow$ # voti ottenuti

Oss: matematica antica $\begin{cases} \text{numeri / aritmetica} \\ \text{geometria} \end{cases}$

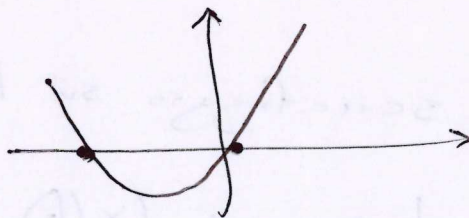
Cartesio $\longrightarrow$ studiare ~~numeri~~ geometria tramite numeri:

punti $\longleftrightarrow$ coordinate

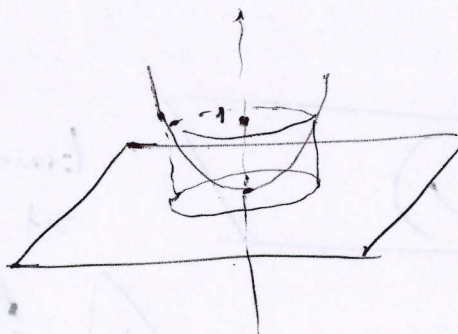
figure $\longleftrightarrow$ soluzioni di eq.

Esempio:

$$\underbrace{ax^2 + bx + c = 0}_{f(x)}$$



$$\underbrace{x^2 + y^2 = 1}_{f(x, y)}$$



Quindi: l'eq. fissa il valore d'interesse della funzione

Conclusione: Analisi = studio di funzioni

Esercizi

(4)

- 1) ~~Calcolare~~ ^{Trovare} dom- di def. massimale per le seguenti funzioni & calcolarne i valori in qualche punto

$$f(x) = x^2$$

$$f(x) = \sqrt{x^2} \quad (=|x|)$$

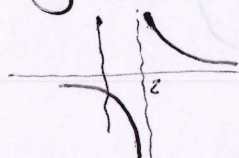
$$f(x) = \sqrt{2x-4}$$

$$f(x) = \frac{1}{2x-4}$$

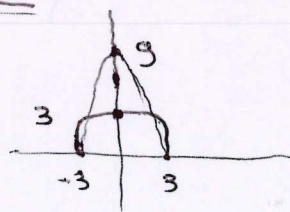
$$f(x) = \sqrt{9-x^2}$$

- 2) ~~Disegnare~~ ^{Tracciare} il grafico delle seguenti funzioni

$$f(x) = \frac{1}{2x-4}$$



$$f(x) = \sqrt{9-x^2}$$



$$\left(\begin{array}{l} \text{Vicino a } \pm 3, 9-x^2 \approx 0 \\ \Rightarrow \sqrt{x} > x \end{array} \right)$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 7 \\ -1 & x < 7 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x < 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases}$$

Funzioni elementari

• Polinomi: x^3 , x^2+7x-2 , —

• Funzioni razionali $\equiv \frac{p(x)}{q(x)}$, $\frac{x^3}{2x-3}$, $\frac{x^3+7x^2}{-x^5+\pi x}$ —

dom max = $\mathbb{R}$

facili da valutare

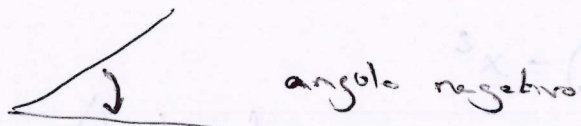
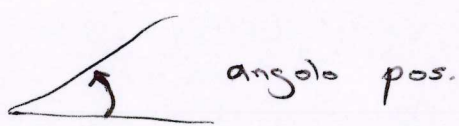
facili da tracciare

dom max esclude punti dove $q \neq 0$
non difficili da valutare/tracciare

- Funzioni trigonometriche: $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ —

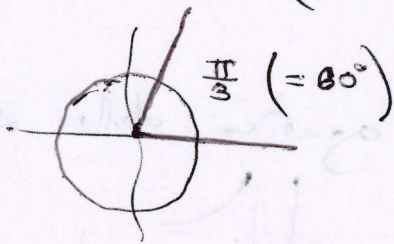
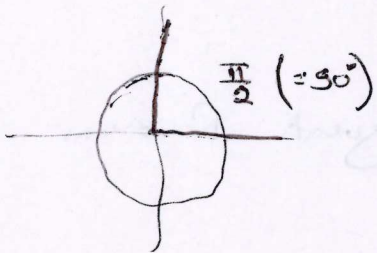
In questo caso, variable x ha significato geometrico:

x = misura di un angolo, calcolato in radianti, ossia



misura

- in gradi : nessun significato "intrinseco"
- in radianti : = lunghezza dell'arco sotteso
(con raggio 1)

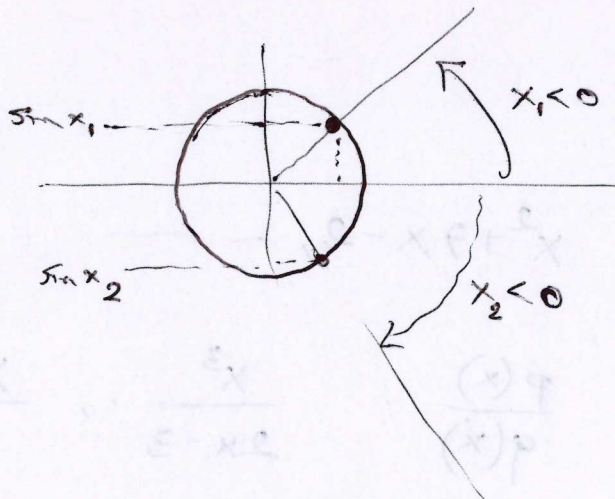


angolo "giri", senso
pos., $= 2\pi$

Senso neg: $= -2\pi$

$$\sin x = ?$$

$x \in \mathbb{R} \mapsto$ angolo di
misura x
(partendo da asse orizz.) $\xrightarrow{\quad}$ altezza del
punto di
raggio 1



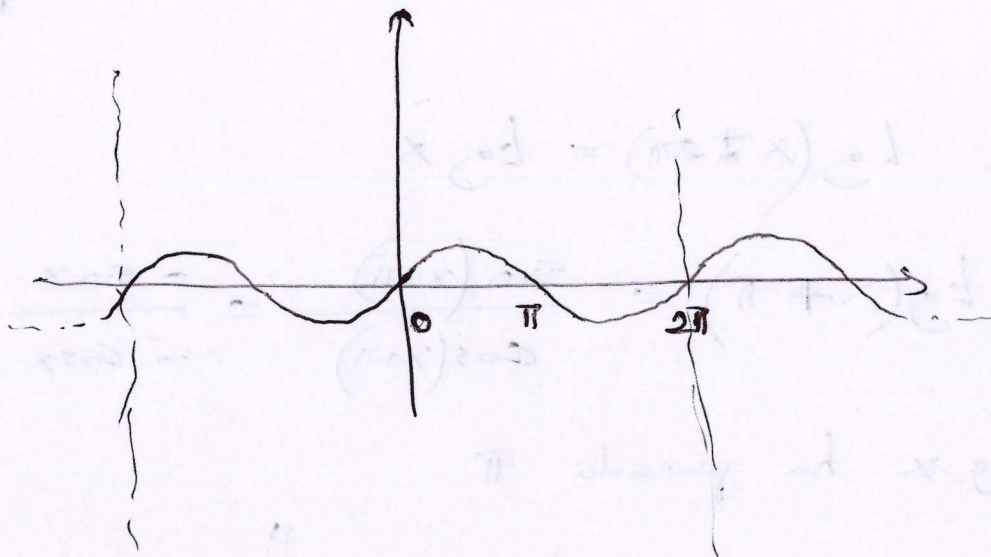
Oss: $x \pm 2\pi \longrightarrow$ stesso angolo $\longrightarrow$ stesso valore $\sin x$

$\uparrow$
perdita di info!

OSSIA

$\sin x$ è funzione periodica

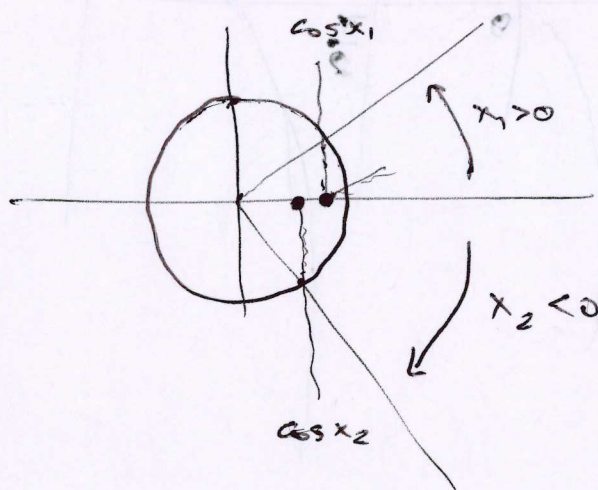
5



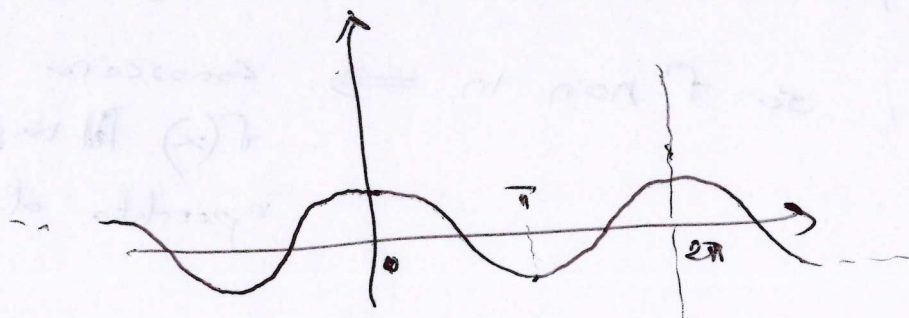
$$\cos x = ?$$

x $\longleftrightarrow$ angolo di
misura x

$\longleftrightarrow$ ~~lunghezza~~
I coordinate
del punto con
raggio 1



Come prima, $\cos(x \pm 2\pi) = \cos x$

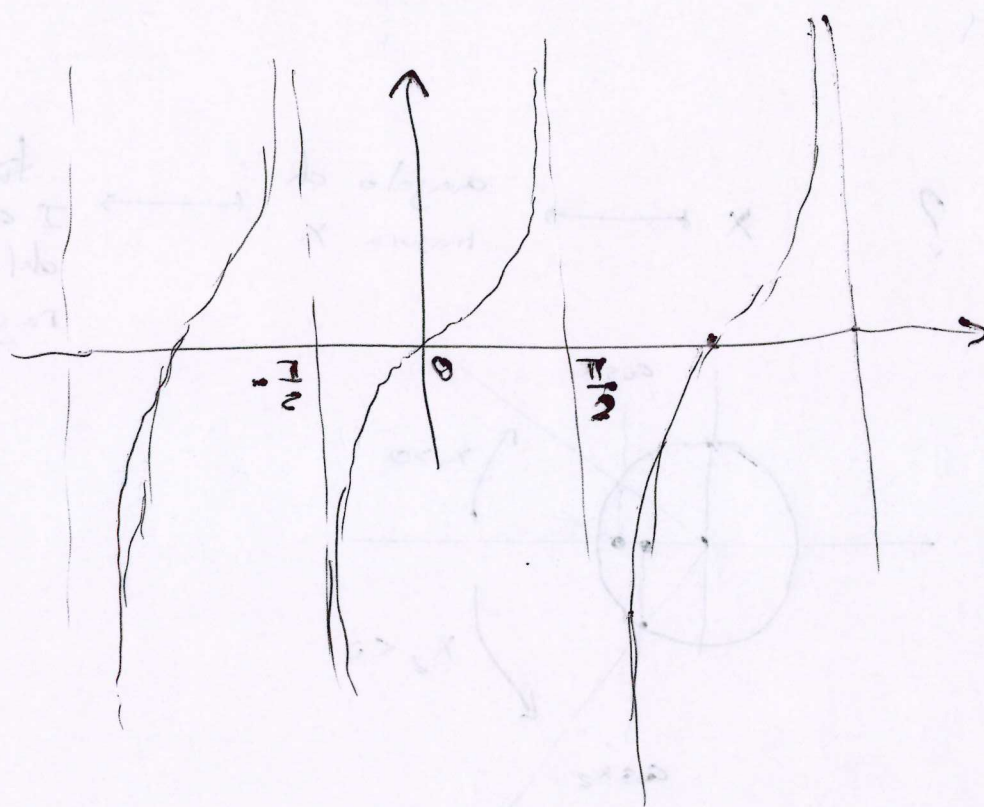


$$\operatorname{tg} x = ? = \frac{\text{II coord.}}{\text{I coord.}} = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{def. solo per } x: \cos x \neq 0$$

Ovviamente $\operatorname{tg}(x \pm 2\pi) = \operatorname{tg} x$

Anzi: $\operatorname{tg}(x \pm \pi) = \frac{\sin(x \pm \pi)}{\cos(x \pm \pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \operatorname{tg} x$

$\Rightarrow \operatorname{tg} x$ ha periodo π

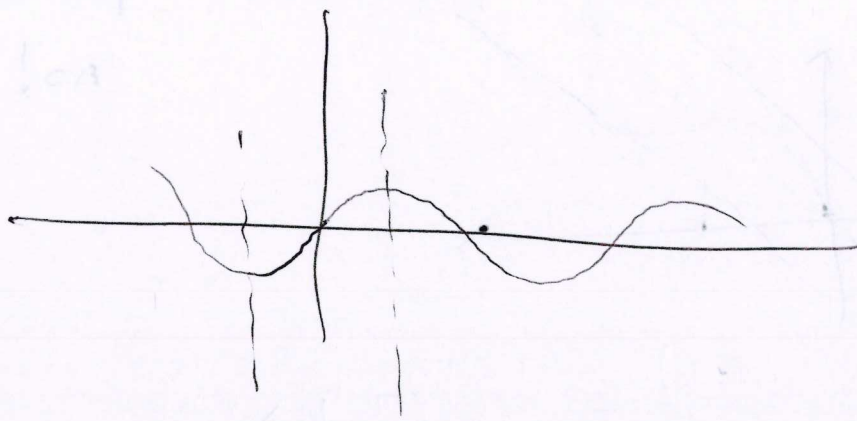


Q: se conosciamo $\sin x$, possiamo risalire a x ?

no! f periodica $\Rightarrow$ stesso valore generato da ∞ punti

In generale: se f non in $\Rightarrow$ conoscere solo valore $f(x)$ ~~implica~~ ^{richiede} una "perdita di informazione"

Però: su intervalli più piccoli, $\sin x$ è m. (6)



sul dom. $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ $f(x) = \sin x$ è m.

Quindi monotonicità dipende dal dom. di definizione prescelto

(non m. su $[0, \pi]$)

Operazioni tra funzioni:

f, g stesso dom. $\longrightarrow \mathbb{R}$

$$(f+g)(x) := ? = f(x) + g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) := ? = f(x) \cdot g(x)$$

$$(3f)(x) := ? = 3 \cdot f(x)$$

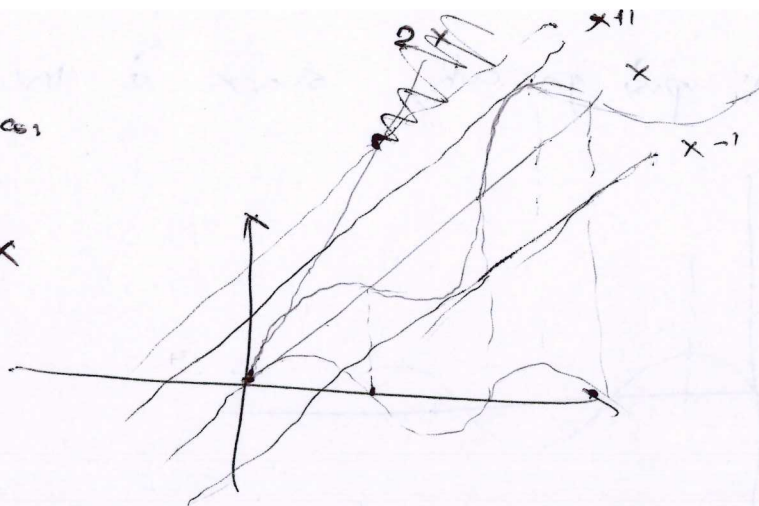
Attenzione: $\frac{f}{g}$ ha dom. più piccolo! $\{x: g(x) \neq 0\}$

Esempio: $\log x$ ha da $\{x \in \mathbb{R}: x \neq k \frac{\pi}{2}\}$

$$\frac{x^2+1}{3x+2} \text{ ha dom. } \{x \in \mathbb{R}: x \neq -\frac{2}{3}\}$$

Graphs

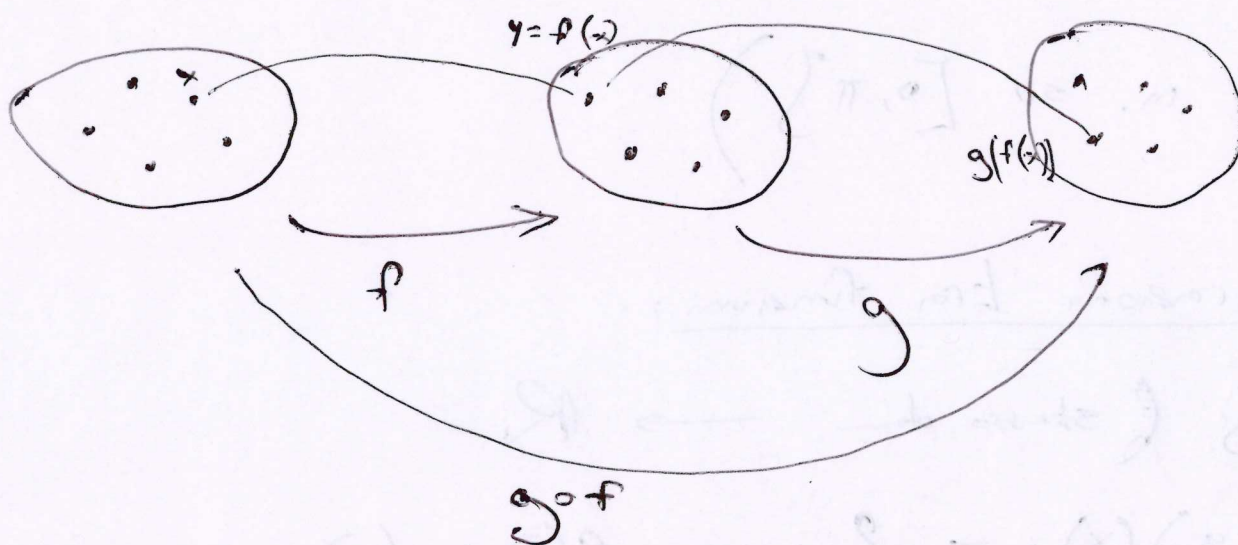
$\sin x + x$



periodico?

no!

Composizione: $g \circ f(x)$



Attenzione: possibile solo se $f(x) \in \text{dom. di } g$!

Esempio: $x \mapsto x^2$

$y \mapsto \sqrt{y}$ serve: $y \geq 0$

$x \mapsto \sqrt{x^2}$

OK! $(= |x|)$

$x \mapsto x^4$

$y \mapsto \sqrt{y}$

$x \mapsto \sqrt{x^4} = x^2$ OK!

Pero:

$$\begin{array}{ccc}
 x & \longmapsto & x^3 \\
 & & y \longmapsto \sqrt{y} \\
 & \searrow & \\
 & & x \longmapsto \sqrt{x^3}
 \end{array}$$

(7)

occhio! Solo se $x^3 \geq 0$
~~non vale per~~

Quindi composizione OK solo sul dominio $\{x \geq 0\}$

Esercizi: trovare il dom. max di def. delle
 seguenti funzioni composte

$$\sin\left(x^7 + 4x^3 - \frac{3}{2}x\right)$$

$$\sin\left(\frac{x^2 - 7}{3x + 2}\right)$$

$$\sqrt{9 - x^2}$$

$$\sqrt{\frac{9 - x^2}{x}}$$

$$\sqrt{f(x)} \quad \text{per qualche } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

~~$$f(x+1)$$~~

$$f(x+1)$$

per qualche $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$

$$f \circ f(x)$$

per qualche $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$

$$f \circ f(x)$$

_____ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\sqrt{f(x)}$$

_____ $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$

Esercizio : decomporre le seguenti funzioni
in prodotti/quozienti/composizioni di funz.
elementari, e trovare il dom. di def.

[Includiamo qui anche la funz. elementare $x \mapsto e^x$,
avente dom. max di def. $\mathbb{R}$: lo discuteremo
meglio più avanti]

$$e^x \cdot \sin(x^2 + 2)$$

$$\frac{\cos(x^3 + 2x)}{\sin x^2}$$

$$e^{\sin(x^3 + e^{x^2+1})}$$

$$\frac{3^{\lg x}}{e^{x^2 - 5x + 6} - 1}$$

$$\cos^2 x - 5 \cos x + 6$$

$$\sin(\cos(\lg x))$$

$$\sin x \cdot \cos x \cdot \lg x$$

$$\lg(x^2)$$

Analisi: problemi tipici

- risolvere l'equazione ...

$$\text{Eg: } x^3 + x - 9 = 0$$

- trovare soluzione ottimale ...

Eg: "lattina ideale", ossia cilindro con
volume = 33 cl & superficie minima.

Analizziamo II problema:

cilindro $\longleftrightarrow$ raggio r , altezza h : 2 variabili

$$\text{volume: } \pi r^2 \cdot h = 33 \quad \text{"vincolo"}$$

$$\text{Sup: } 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot h \rightsquigarrow f = f(r, h)$$

~~Abbassare~~

Usiamo vincolo per ridurre # di variabili:

$$\begin{aligned} h &= \frac{33}{\pi r^2} \rightsquigarrow \text{Sup} = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{33}{\pi r^2} \\ &= 2\pi r^2 + \frac{66}{r} \\ &= g(r) \end{aligned}$$

dom. di def: $r \in (0, \infty)$

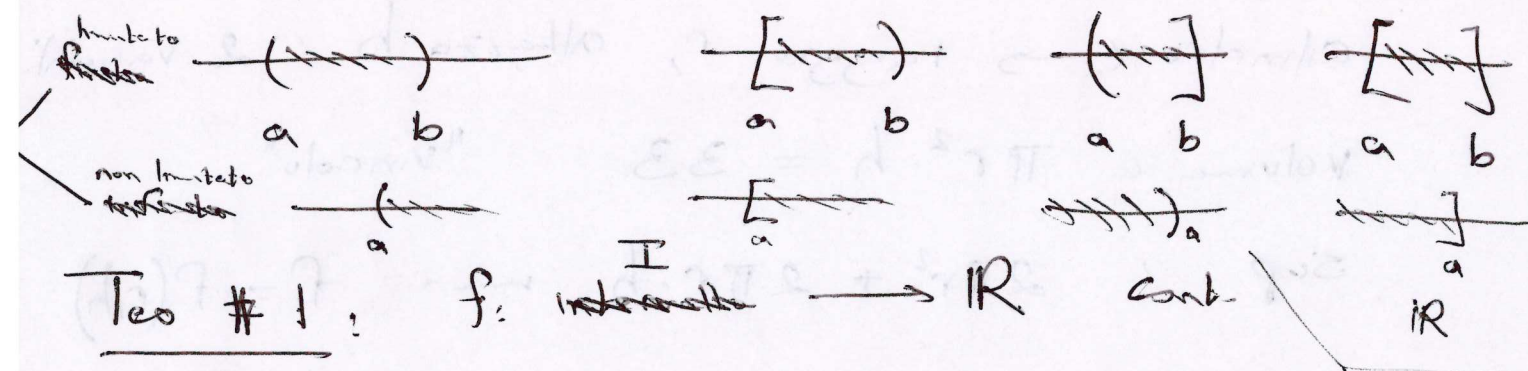
Per quale r otteniamo valore minimo per g ?

In entrambi i casi, prima di procedere conviene prima accertarsi che la soluzione esista davvero (altrimenti perdiamo tempo e basta)

Esistenza sol $\longleftrightarrow$ Continuità della funzione

$$\begin{cases} x^3 + x - 9 \\ 2\pi r^2 + \frac{66}{r} \end{cases}$$

Terminologia: "intervallo" I



$\Rightarrow$ $\text{Im } f$ è un intervallo

Esempio: se $f(x_1) < 0$ & $f(x_2) > 0$ allora $\text{Im } f \supseteq [f(x_1), f(x_2)]$
 In particolare $0 \in \text{Im } f$.

Teo # 2 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ cont.

$\Rightarrow$ $\text{Im } f$ è un intervallo chiuso & limitato

Per spiegare concetto "continuità", serve concetto "limite"

9

$$f: (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$$

Def. f ha limite $l \in \mathbb{R}$

per $x \rightarrow c$ se, man mano

che x si avvicina a c , $f(x)$ si avvicina a l

distanza δ

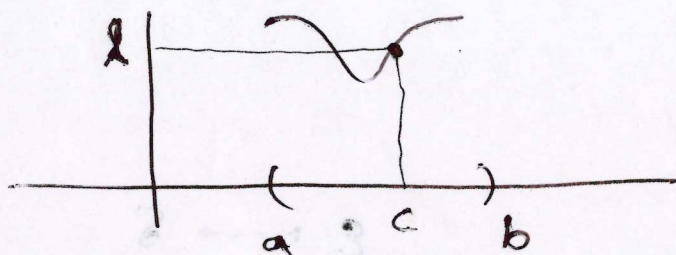
distanza ε

ossia: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ se $|x - c| < \delta$, $x \neq c$

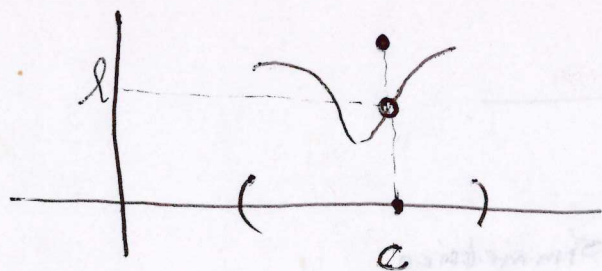
allora $|f(x) - l| < \varepsilon$

!

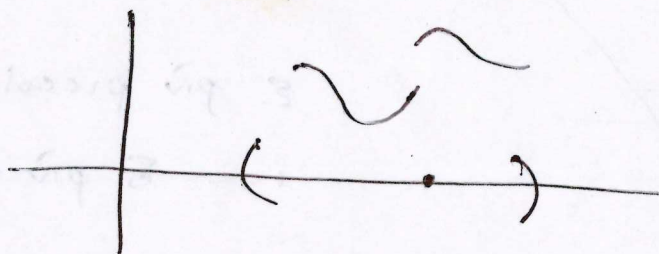
Esempio:



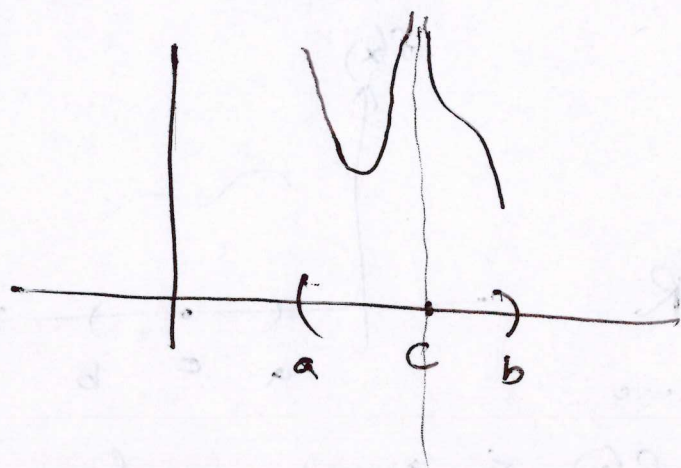
$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l$$



$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l$$

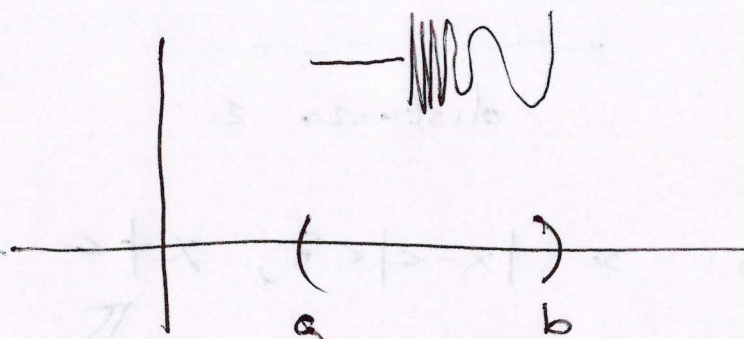


$$\nexists \lim_{x \rightarrow c} f(x)$$



$$\nexists \lim_{x \rightarrow c} f(x)$$

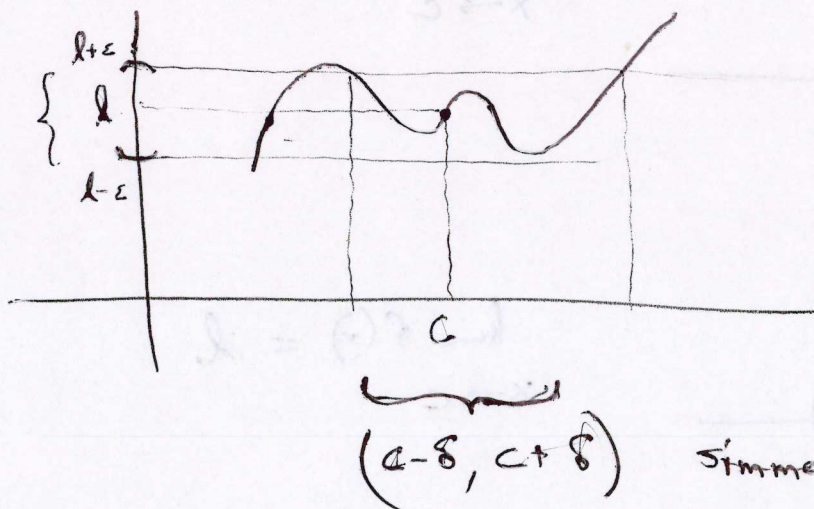
(oppure $\exists, ma = +\infty$)



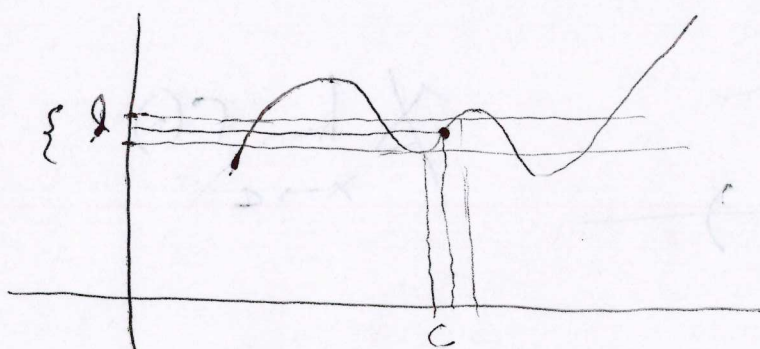
$$\nexists \lim_{x \rightarrow c} f(x)$$

Osservazione: tipicamente, il "δ giusto" dipende da ε

Esempio:



$$\varepsilon \rightsquigarrow \delta$$



ε più piccolo
 $\rightsquigarrow$ δ più piccolo

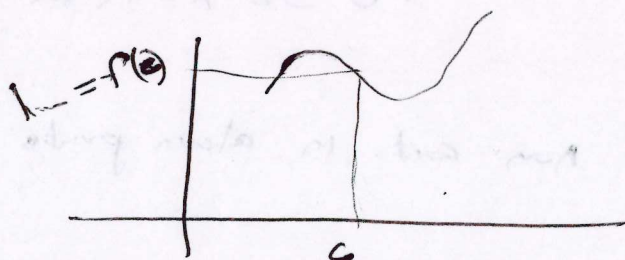
Abbiamo visto che il concetto $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ non 13
 ha nulla a che vedere con il valore $f(c)$

Il legame tra questi due numeri arriva solo con
 il concetto di continuità:

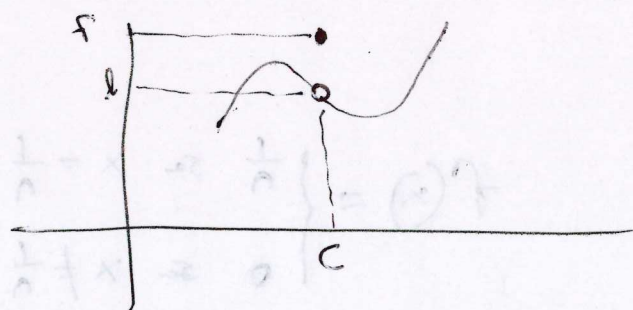
Def. $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ è cont. in c se

i) $\exists \lim_{x \rightarrow c} f(x)$ & ii) questo limite $= f(c)$

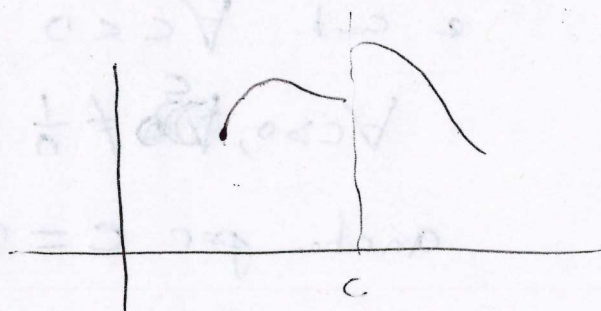
Esempio:



Cont. in c



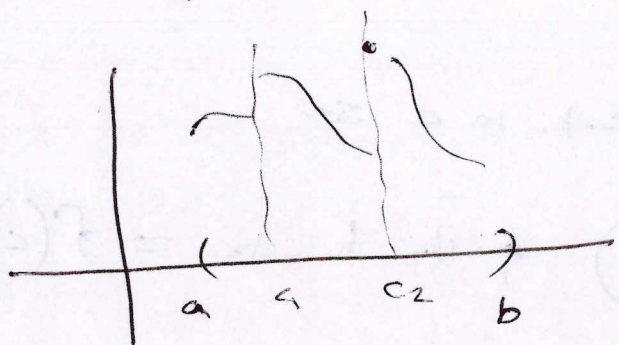
$\exists \lim_{x \rightarrow c} f(x)$ ma
 non cont. in c



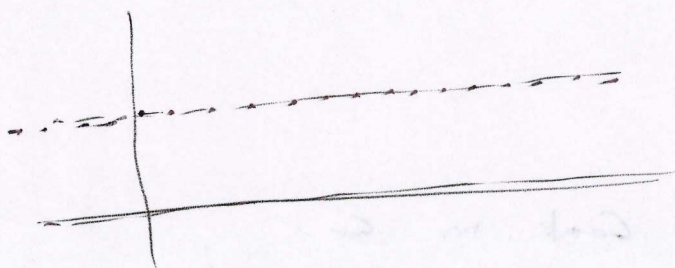
$\nexists \lim_{x \rightarrow c} f(x)$ quindi non
 Cont. in c

Def. $f: \cancel{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ cont. $\iff$ cont. in c ,
 $\forall c \in (a, b)$

Esempio:

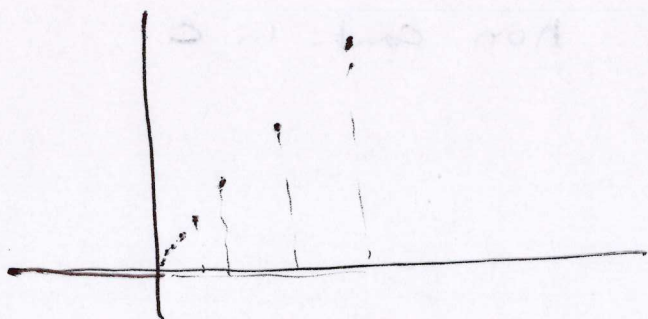


cont. $\forall c$ eccetto c_1, c_2



$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

non cont. in alcun punto



$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{se } x = \frac{1}{n} \\ 0 & \text{se } x \neq \frac{1}{n} \end{cases}$$

è cont. $\forall c < 0$

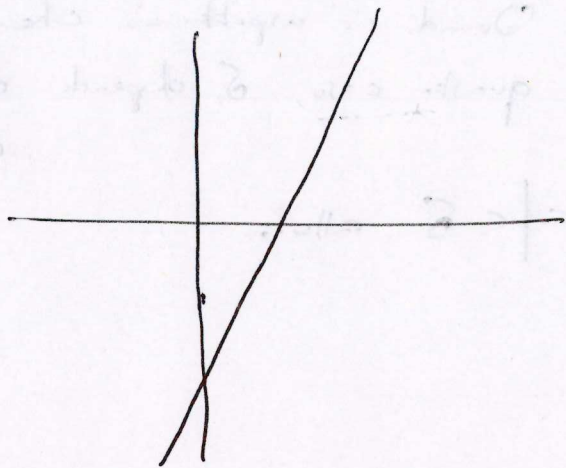
$\forall c > 0, \cancel{c} \neq \frac{1}{n}$

anche per $c = 0$!

Le figure possono ingannare, quindi a volte è meglio controllare limiti/cont. per via analitica

Esempi:

• $f(x) = 3x - 7$



Sembra continua

Controlliamo:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c) ?$$

Bisogna che: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$: se $|x - c| < \delta$ allora

$$|f(x) - f(c)| < \varepsilon$$

$$|3x - 7 - (3c - 7)| < \varepsilon$$

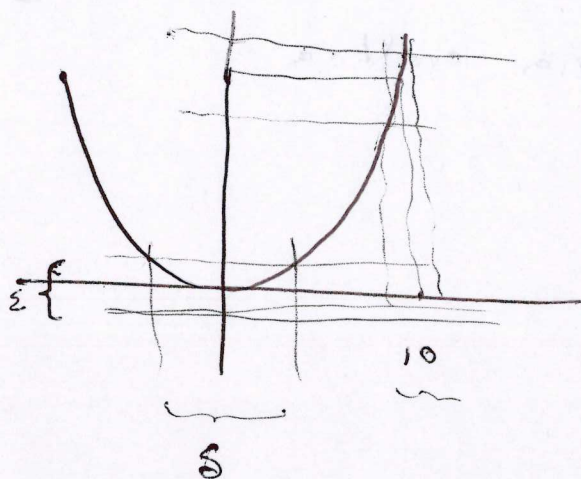
$$|3x - 3c| < \varepsilon$$

$$3|x - c| < \varepsilon$$

Opprimente: se $|x - c| < \frac{\varepsilon}{3}$ allora OK!

$$\forall \varepsilon \quad \delta = \frac{\varepsilon}{3}$$

• $f(x) = x^2$



guardando figura, notiamo
che, fissato ε ,

• $c = 0$: OK δ grande

• $c = 10$: serve δ piccolo

Quindi ci aspettiamo che, in
questo caso, δ dipende da ε e
da c

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$: se $|x - c| < \delta$ allora

$$|x^2 - c^2| < \varepsilon$$

$$|x - c| |x + c| < \varepsilon$$

Nota che $|x + c| < |x - c| + 2|c|$, quindi basta dire che:

se $|x - c| < \delta$ allora $|x - c| \cdot (|x - c| + 2|c|) < \varepsilon$

Supponiamo $\delta < 1$. Allora basta dire che

$$|x - c| \cdot (1 + 2|c|) < \varepsilon$$

OK se $\delta = \frac{\varepsilon}{1 + 2|c|}$!

Quindi: $\varepsilon \mapsto \delta = \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{1 + 2|c|} \right\}$

↑
dipende da c !
 c grande $\Rightarrow \delta$ piccolo

Esercizi: dimostrare che

$$f(x) = x$$

$$f(x) = |x|$$

$$f(x) = 7$$

} Sono funz. cont.

Fortunatamente, non serve ~~controllare~~ ^{controllare} sempre a meno!

Teo:

$$f, g \text{ cont.} \Rightarrow f+g, f-g, f \cdot g \text{ cont.}$$

$$f \text{ cont.} \Rightarrow \lambda \cdot f, -1 \cdot f, \text{ etc. cont.}$$

$$\text{ossia: } \lambda f \text{ cont. } \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$f, g \text{ cont.} \& g \neq 0 \Rightarrow \frac{f}{g} \text{ cont.}$$

$$f, g \text{ cont.} \& g \circ f \text{ esiste} \Rightarrow g \circ f \text{ cont.}$$

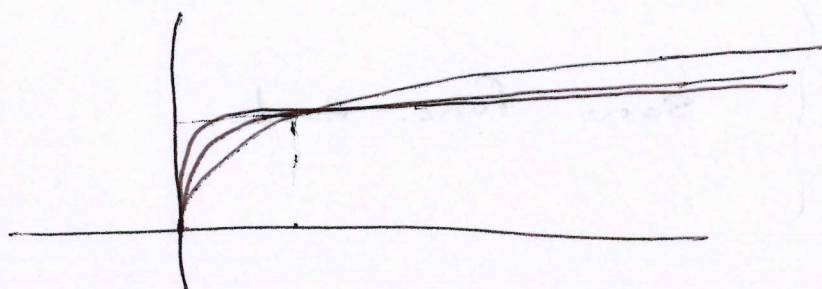
Insieme: tutte le operazioni naturali preservano la
continuità

Esempio: le nostre funzioni

$$x^3 + x - 9, \quad 2\pi r^2 + \frac{66}{r}$$

sono continue (in ogni punto, ~~del~~ ^{del} dom. di def.)

Altre funz. cont.



$$\sqrt{x} = x^{1/2}$$

$$\sqrt[3]{x} = x^{1/3}$$

$$\sqrt[4]{x} = x^{1/4}$$

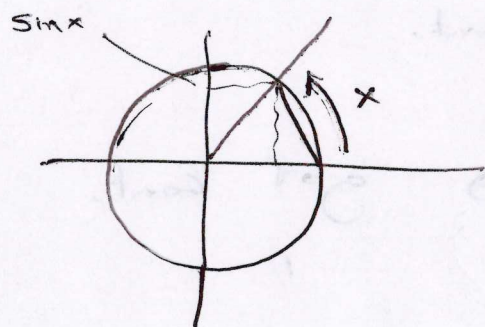
etc.

funz. trigonometriche

Controlliamo per esempio $\sin x$

$\epsilon = 0$; vogliamo dim. che $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$:

se $|x| < \delta$ allora $|\sin x| < \epsilon$



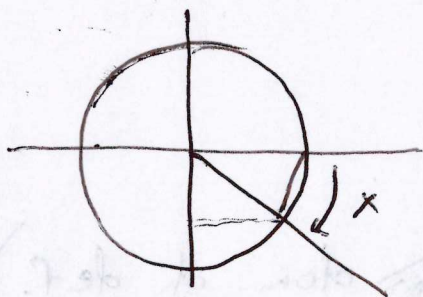
Supponiamo x piccolo, $x \geq 0$

allora :

$$0 \leq \sin x < \text{corda} < \text{arco} = x$$

$$\underbrace{\hspace{1cm}}_{= |\sin x|} \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{\text{teo Pitagora}} \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{= |x|}$$

Se invece x piccolo, $x \leq 0$ allora :



$$-\sin x < \text{corda} < \text{arco} = -x$$

$$\underbrace{\hspace{1cm}}_{= |\sin x|} \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{\text{teo Pitagora}} \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{= |x|}$$

In ambo casi, possiamo prendere $\delta = \epsilon$

$c \neq 0$: Vogliamo dimostrare che $\lim_{x \rightarrow c} \sin x = \sin c$

Basta dimostrare che $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x+c) = \sin c$

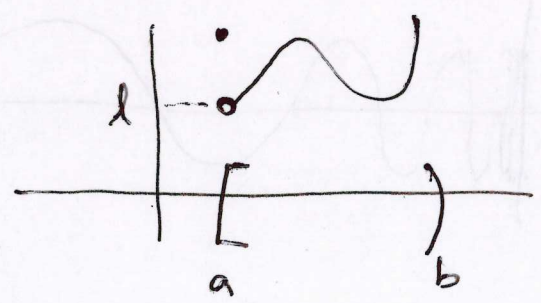
|| formule trig.

$$\begin{array}{ccccccc} \sin x \cdot \cos c + \cos x \cdot \sin c & & & & & & \\ \downarrow & \uparrow & & \parallel & & \uparrow & \\ 0 & \text{costante} & & \sqrt{1 - \sin^2 x} & & \text{cost.} & \\ & & & \downarrow & & & \\ & & & 1 & & & \end{array}$$

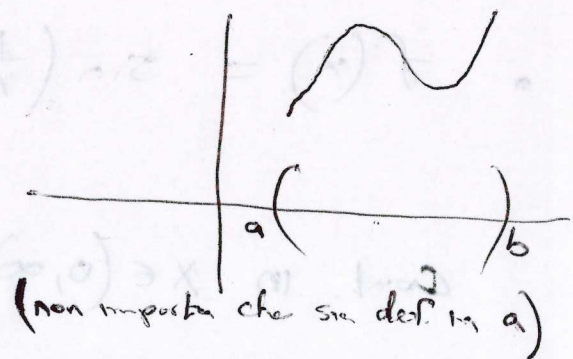
$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \sin(x+c) = \sin c$$

Variazioni sul tema:

- Limiti unilaterali



oppure anche



$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l$ vuol dire: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tale che

se $x > a$ & $a - x < \delta$ allora $|f(x) - l| < \varepsilon$

$\uparrow$ new!
 $\uparrow$ non serve |·|

- Continuità unilaterale:

$f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ è cont. in a se

- i) $\exists \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ ii) questo limite $= f(a)$

Oss: applicato ad un punto interno $c \in (a, b)$,

è immediato che $\exists \lim_{x \rightarrow c} f(x) \iff$

- i) $\exists \lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$
- ii) $\exists \lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$
- iii) questi limiti coincidono

Esempio:

- $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

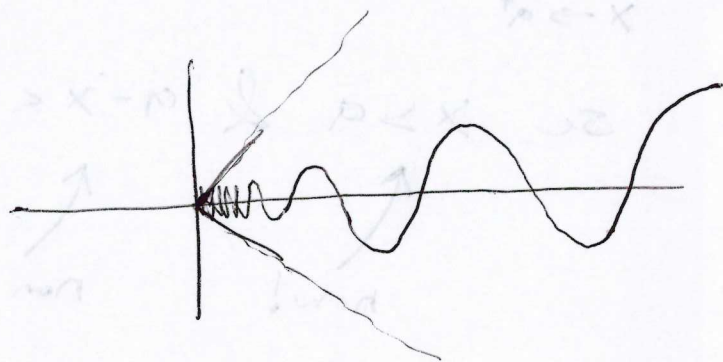
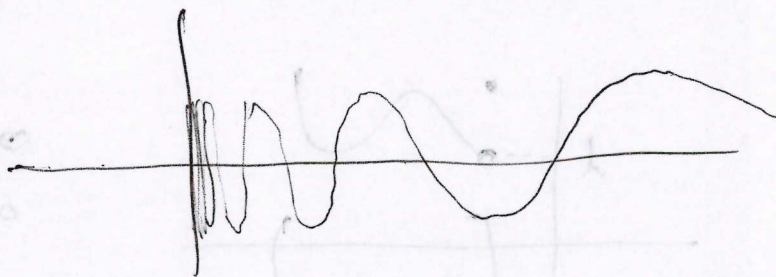
cont. in $x \in (0, \infty)$

non def. per $x = 0$

non $\exists \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

- $f(x) = x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

$\exists \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$

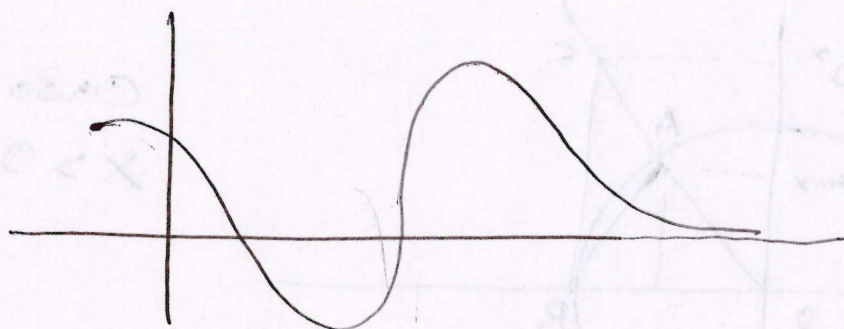


• $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$: "avvicinarsi all' ∞ " vuol dire

$\exists M : x > M$

quindi $\forall \varepsilon > 0 \exists M > 0 : \text{se } x > M \text{ allora}$

$$|f(x) - l| < \varepsilon$$



Oss: non ha senso parlare di "cont. all' ∞ "
perché $\infty \notin \text{dom}(f)$

Esempio:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = ?$$

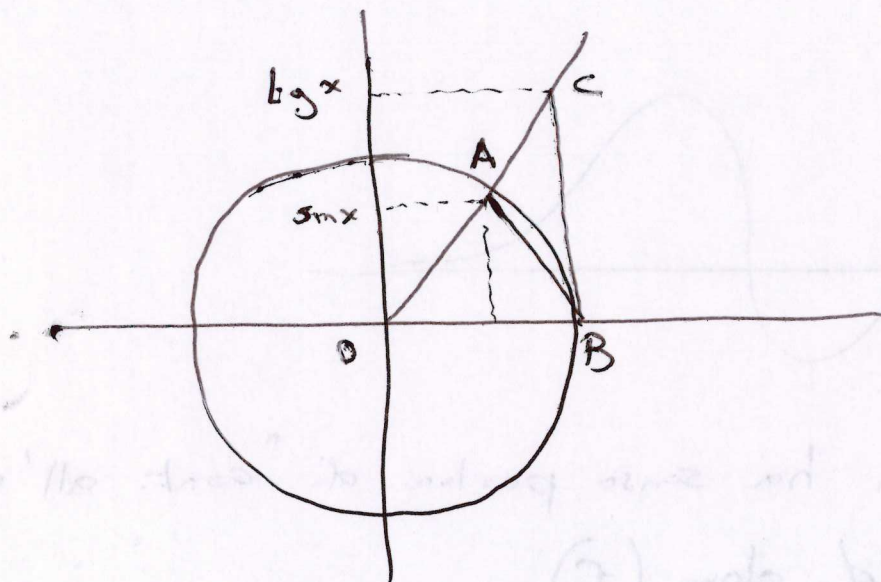
$$x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \quad \& \quad \frac{1}{x} \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{\tilde{x} \rightarrow 0} \frac{\sin \tilde{x}}{\tilde{x}} = ? = 1$$

Oss: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ è una "forma indeterminata" $\frac{0}{0}$

Come si calcola il limite?

Geometricamente:



Caso
 $x > 0$

2 triangoli: $OAB \rightsquigarrow \text{area} = \frac{\text{base} \times \text{altezza}}{2} = \frac{1}{2} \sin x$
 $OBC \rightsquigarrow \text{area} = \frac{1}{2} \lg x$

1 Settore circolare, angolo x : $\text{area} = \frac{x}{2} r^2 = \frac{x}{2}$
 $\uparrow$
 $= 1$

Contenuti uno dentro l'altro, quindi:

$$\frac{1}{2} \sin x < \frac{x}{2} < \frac{1}{2} \lg x = \frac{1}{2} \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \leftarrow \begin{matrix} \cos x \rightarrow 1 \\ (x \rightarrow 0^+) \end{matrix}$$

Quindi $\frac{x}{\sin x}$ intrappolato tra quantità $\rightarrow 1$ (15)

$$\Rightarrow \frac{x}{\sin x} \rightarrow 1, \quad \frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$$

Abbiamo dimostrato: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$

$$\text{Caso } x < 0: \quad \frac{\sin x}{x} = \frac{\sin(-x)}{-x} \quad (-x > 0)$$
$$\downarrow$$
$$1$$

$$\text{Quindi } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\text{Limiti } dx/\sin \text{ coincidono} \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$