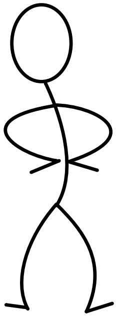
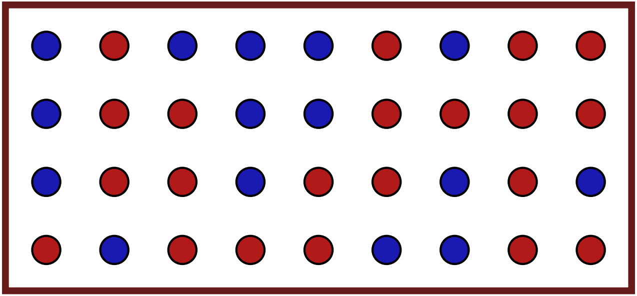
Spazi di probabilità



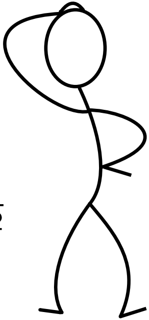
Esempio

Un'urna contiene biglie di colore rosso e blu.



Qual è la probabilità di estrarre una biglia blu?

Ci sono 36 biglie 21 rosse e 15 blu quindi la risposta è $\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$



Definizione (a)

Uno **spazio di probabilità** è una terna $\langle \boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\mathcal{E}}, \boldsymbol{P} \rangle$

Spesso si indica solo Ω sottointendendo $\mathcal{E}$ e P

In inglese **sample space**

- Ω è un insieme detto **spazio campionario** o anche **popolazione**

  Es.: Ω è l'insieme di tutte le biglie dell'urna (che indicheremo con $\boldsymbol{U}$)

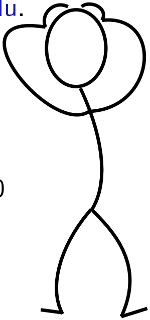
- $\mathcal{E}$ è un insieme di sottoinsiemi di Ω detto algebra degli **eventi**.

  Es.: $\{R, B, \boldsymbol{U}, \varnothing\}$, con R e B gli insiemi delle biglie rosse e blu.

  N.B. Ω e $\varnothing$ sono sempre in $\mathcal{E}$ per comodità/convenzione.

- $P : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ è una funzione detta **misura di probabilità**.

  Es.: $P(R) = \frac{21}{36}$, $\quad P(B) = \frac{15}{36}$, $\quad P(\boldsymbol{U}) = 1$, $\quad P(\varnothing) = 0$



Definizione (b)

Si richiede che $\langle \Omega, \mathcal{E}, P \rangle$ soddisfi a queste proprietà:

- $\Omega \neq \varnothing$.
- $\mathcal{E}$ deve soddisfare ad alcune condizioni di chiusura:
  - $\Omega, \varnothing \in \mathcal{E}$
  - $A, B \in \mathcal{E} \quad \Rightarrow \quad A \cup B \in \mathcal{E}$
  - $A \in \mathcal{E} \quad \Rightarrow \quad \neg A \in \mathcal{E}$

$\neg A = \Omega \setminus A =$ **complemento** di A

- $P : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ deve soddisfare le seguenti condizioni:
  - $P(\Omega) = 1$;
  - $P(A) \geq 0$ per ogni $A \in \mathcal{E}$;
  - $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ per $A, B \in \mathcal{E}$ **disgiunti**

$A \cap B = \varnothing$
$=$ **mutualmente esclusivi**

Questi assiomi sono sufficienti quando $\mathcal{E}$ è finito. Più avanti considereremo il caso generale e dovremo aggiungere una richiesta a $\mathcal{E}$ e P.

Proprietà (a)

Se seguenti proprietà dell'insieme degli eventi seguono dagli assiomi:

L'algebra degli eventi è chiusa per combinazioni booleane:

- $A, B \in \mathcal{E} \quad \Rightarrow \quad A \cap B \in \mathcal{E}$

  $A \cap B = \neg(\neg A \cup \neg B)$

- $A, B \in \mathcal{E} \quad \Rightarrow \quad A \setminus B \in \mathcal{E}$

  $A \setminus B = A \cap \neg B$

- $A, B \in \mathcal{E} \quad \Rightarrow \quad A \triangle B \in \mathcal{E}$

  $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

Inoltre:

- $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{E} \quad \Rightarrow \quad \bigcup_{i=1}^{n} A_i \;\in\; \mathcal{E}$

  $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup \cdots \cup A_n$

- $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{E} \quad \Rightarrow \quad \bigcap_{i=1}^{n} A_i \;\in\; \mathcal{E}$

Proprietà (b)

Le seguenti proprietà della misura di probabilità seguono dagli assiomi e valgono per ogni evento:

- $P(\neg A) = 1 - P(A)$
- se $A \subseteq B$ allora $P(B \setminus A) + P(A) = P(B)$ e quindi $P(A) \leq P(B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A \cap B) = 1 - P(\neg A \cup \neg B)$
- $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$
  Se $A_i \cap A_j = \varnothing$ per ogni $i \neq j$

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = P(A_1) + \cdots + P(A_n)$$

Ovvero, se gli eventi A_i sono mutualmente esclusivi.

Spazi di probabilità infiniti

Nel caso in cui $\mathcal{E}$ è infinito dobbiamo aggiungere i seguenti assiomi:

- $A_0, A_1, \dots \in \mathcal{E} \quad \Rightarrow \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{E}$
- $A_0, A_1, \dots \in \mathcal{E}$ mutualmente esclusivi $\quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = P\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big)$

L'importanza di questi assiomi emerge solo negli più sofisticati che qui non avremo occasione di considerare.

Esempio (a)

Su un dado con 8 facce sono incise le lettere a b e c.

- su 1 faccia è incisa la lettera a
- su 2 facce è incisa la lettera b
- su 5 facce è incisa la lettera c

Per modellare il lancio di questo dato usiamo $\langle \Omega, \mathcal{E}, P \rangle$ dove

- $\Omega = \{a, b, c\}$
- $\mathcal{E} = \{\text{tutti i sottoinsiemi di } \Omega\}$
  $= \big\{\{a\},\ \{b\},\ \{c\},\ \{a, b\},\ \{b, c\},\ \{a, c\},\ \varnothing,\ \Omega\big\}$
- $P : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ è la funzione:
  1. $P(\{a\}) = \dfrac{1}{8}, \qquad P(\{b\}) = \dfrac{2}{8}, \qquad P(\{c\}) = \dfrac{5}{8},$
  2. $P(\{a, b\}) = \dfrac{3}{8}, \qquad P(\{b, c\}) = \dfrac{7}{8}, \qquad P(\{a, c\}) = \dfrac{6}{8},$
  3. $P(\varnothing) = 0, \quad P(\Omega) = 1.$

Esempio (b)

Un modello alternativo:

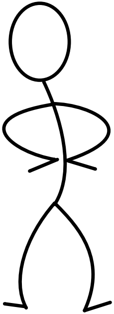
Immaginiamo che il dado sia numerato da 1 a 8.

Definiamo $A = \{1\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ e

- $\Omega = \{1, \dots, 8\}$;
- $\mathcal{E} = \{A,\ B,\ C,\ A \cup B,\ B \cup C,\ A \cup C,\ \varnothing,\ \Omega\}$
- $P : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ è la funzione definita da

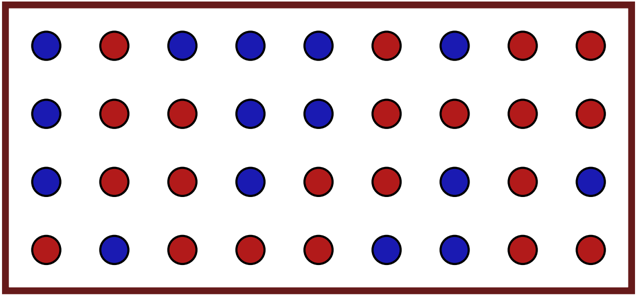
$$P(E) = \frac{|E|}{8} \text{ per ogni } E \in \mathcal{E}.$$

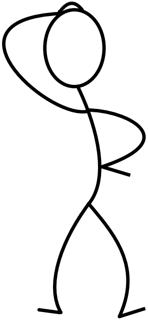
Prodotto di spazi di probabilità



Esempio (a)

Estraiamo una biglia, la <u>reintroduciamo</u> nell'urna, e ne estraiamo un'altra.





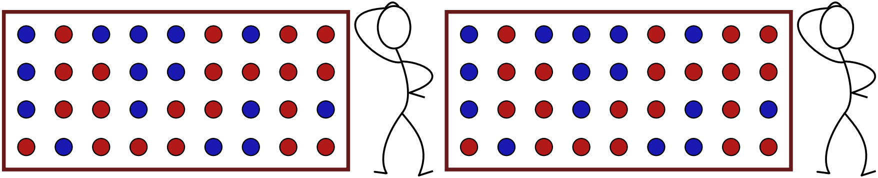
Qual è la probabilità che la prima sia rossa e la seconda blu?

N.B. il **reimbussolamento** semplifica il modello.
Se l'urna contiene molte biglie, i risultati differiscono di poco.

Esempio (b)

Stessa domanda, diversa formulazione.

Immaginiamo due urne con identico contenuto.



Estraiamo una biglia dalla prima urna e una dalla seconda.

Qual è la probabilità di estrarre rossa dalla prima e blu dalla seconda?

Ci sono 36^2 coppie di biglie. Ci sono $21 \cdot 15$ coppie $\langle \mathit{rossa}, \mathit{blu} \rangle$.

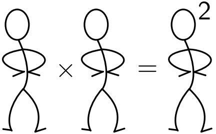
$$P(\{\mathit{coppie}\ \langle \mathit{rossa}, \mathit{blu} \rangle\}) = \frac{21 \cdot 15}{36^2} = \frac{21}{36} \cdot \frac{15}{36} = P(R)\ P(B)$$

Prodotto cartesiano (notazione)

Dati A e B insiemi arbitrari.

Il **prodotto cartesiano** di A e B è l'insieme:

$$A\times B \;=\; \Big\{\langle a, b\rangle \;:\; a \in A \text{ e } b \in B\Big\}$$



L'insieme delle sequenze di lunghezza 2 il cui primo elemento sta in A e il secondo in B.

Chiameremo **potenza cartesiana** di A un insieme della forma

$$A^n \;=\; \underbrace{A\times \ldots \times A}_{n \text{ volte}} \;=\; \Big\{\langle a_1, \ldots, a_n\rangle \;:\; a_1, \ldots, a_n \in A\Big\}$$

L'insieme delle sequenze di lunghezza n di elementi di A.

Definizione

Dati due spazi di probabilità $\langle \Omega_i, \mathcal{E}_i, P_i \rangle$ dove $i = 1, 2$.

Lo **spazio prodotto** è $\langle \Omega, \mathcal{E}, P \rangle$ così definito:

- $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$

  Es. Se $\Omega_1 = \Omega_2 = \boldsymbol{U}$, l'urna con biglie rosse e blu allora $\Omega = \boldsymbol{U}^2$

- $\mathcal{E} =$ contiene $A_1 \times A_2$ per $A_i \in \mathcal{E}_i$ e gli eventi che sono unione di questi.

  Es. $\{\emptyset,\ \boldsymbol{U}^2,\ R^2,\ B^2,\ R \times B,\ B \times R,\ \boldsymbol{U} \times R,\ R \times \boldsymbol{U},\ \boldsymbol{U} \times B,\ B \times \boldsymbol{U} \ldots.$

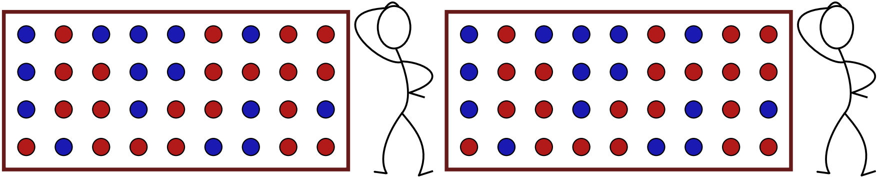
- $P : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ è una funzione:

$$P(A_1 \times A_2) = P_1(A_1) \cdot P_2(A_2)$$

  Es. $P(R \times B) =$ probabilità di estrarre $\langle$rossa,blu$\rangle = P(R) \cdot P(B)$

  $P(R^2) =$ probabilità di estrarre $\langle$rossa,rossa$\rangle = P(R)^2$

Esempio (c)

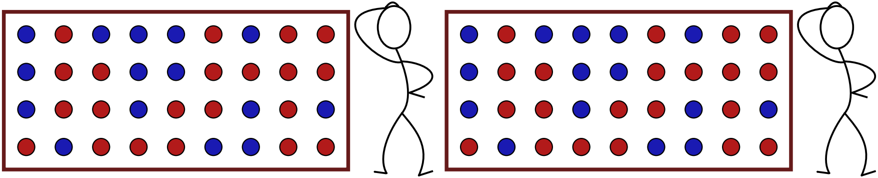


Qual è la probabilità che la seconda biglia estratta sia blu?

L'evento in questione è $\boldsymbol{U} \times B$

Quindi $P(\boldsymbol{U} \times B) \;=\; P(\boldsymbol{U}) \cdot P(B) \;=\; P(B)$.

Esempio (d)



Qual è la probabilità che almeno una delle due biglie estratte sia blu?

Dobbiamo calcolare la probabilità dell'evento $B \times B \;\cup\; B \times R \;\cup\; R \times B$

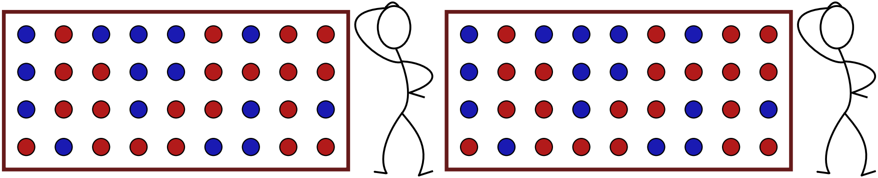
$$P\left(B \times B \;\cup\; B \times R \;\cup\; R \times B\right) =$$

$$P\left(B \times B\right) + P\left(B \times R\right) + P\left(R \times B\right) =$$

$$P(B) \cdot P(B) + P(B) \cdot P(R) + P(R) \cdot P(B) =$$

$$\frac{15}{36} \cdot \frac{15}{36} + \frac{15}{36} \cdot \frac{21}{36} + \frac{21}{36} \cdot \frac{15}{36} = \frac{95}{144}$$

Esempio (e)



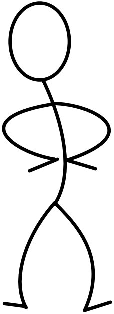
Qual è la probabilità che almeno una delle due biglie estratte sia blu?

Dobbiamo calcolare la probabilità dell'evento $B \times B \,\cup\, B \times R \,\cup\, R \times B$

N.B. Si semplificano i conti osservando che $\boldsymbol{U}^2 \setminus R^2$

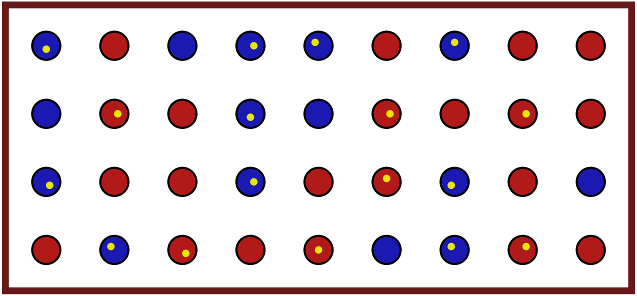
$$P\left(\boldsymbol{U}^2 \setminus R^2\right) \;=\; 1 - P\left(R^2\right) \;=\; 1 - P\left(R\right)^2 \;=\; 1 - \left(\frac{7}{12}\right)^2$$

Probabilità condizionata



Esempio (a)

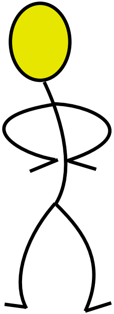
Alcune delle biglie hanno un puntino giallo:



G = insieme delle biglie con puntino giallo $|G| = 17$

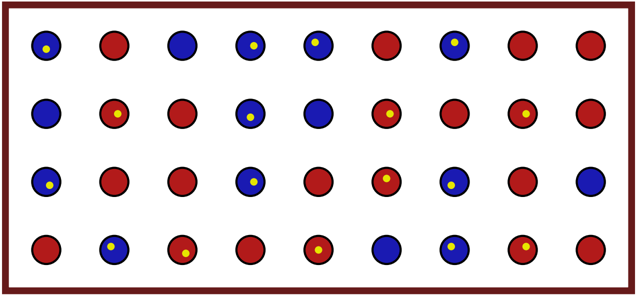
R = insieme delle biglie rosse $|R| = 21$

B = insieme delle biglie blue $|B| = 15$



Esempio (b)

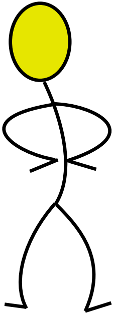
Alcune delle biglie hanno un puntino giallo:



L'insieme $\mathcal{E}$ contiene, oltre ai soliti $\varnothing$ e Ω, i seguenti eventi:

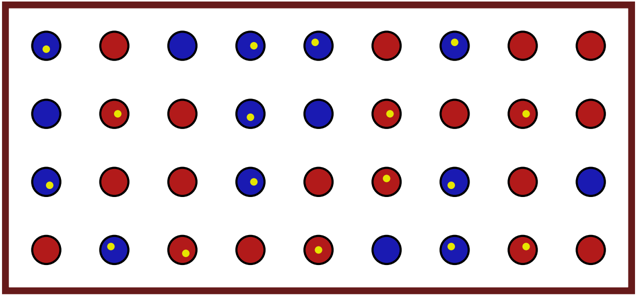
$$R \cap G \qquad B \cap G \qquad R \cap \neg G \qquad B \cap \neg G$$

E tutte le possibili unioni di questi insiemi (in tutto 2^4 eventi).



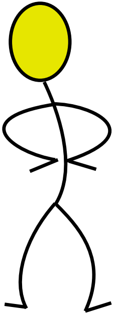
Esempio (c)

Alcune delle biglie hanno un puntino giallo:



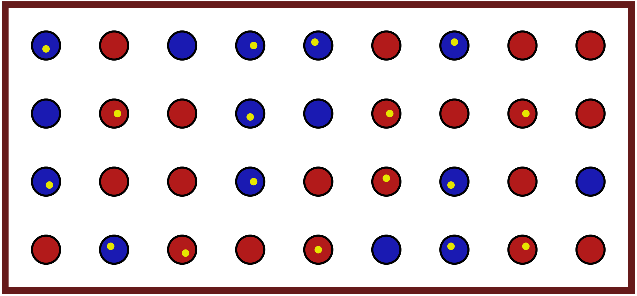
$$P(R \cap G) = \frac{7}{36} \qquad P(B \cap G) = \frac{10}{36}$$

$$P(R \cap \neg G) = \frac{14}{36} \qquad P(B \cap \neg G) = \frac{5}{36}$$



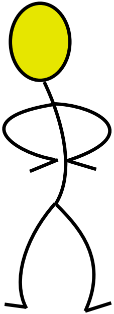
Esempio (d)

Alcune delle biglie hanno un puntino giallo:



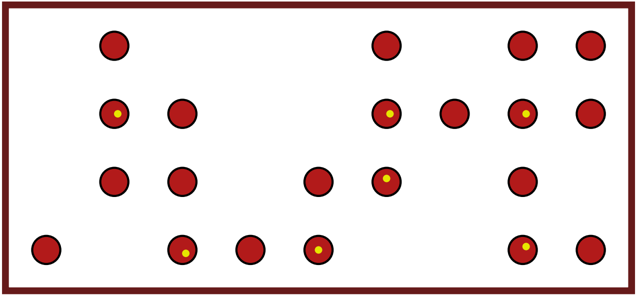
Se la biglia estratta è rossa, con che probabilità ha un puntino?

È come se sapere il colore riducesse lo spazio campionario a R.



Esempio (e)

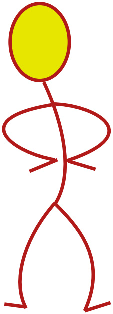
Alcune delle biglie hanno un puntino giallo:



Se la biglia estratta è rossa, con che probabilità ha un puntino?

È come se sapere il colore riducesse lo spazio campionario a R.

La probabilità di avere un puntino giallo è: $$\frac{|R \cap G|}{|R|} = \frac{7}{21}$$



Notiamo per uso futuro $\frac{P(R \cap G)}{P(R)} =$

Definizione

Se A e B sono eventi e $P(B) \neq 0$ definiamo

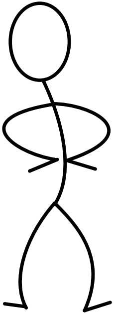
$$P(A|B) \; = \; \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Si legge: **probabilità di A condizionata a B** o anche **(dato B)**.

Con riferimento all'esempio possiamo calcolare:

$$P(G|R) = \frac{|R \cap G|}{|R|} = \frac{7}{21} = \frac{1}{3} \qquad P(G|B) = \frac{|B \cap G|}{|B|} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

$$P(R|G) = \frac{|R \cap G|}{|G|} = \frac{7}{17} \qquad P(B|G) = \frac{|B \cap G|}{|G|} = \frac{10}{17}$$



Osserviamo che il colore dà informazioni sul puntino e viceversa:

$$P(G) = \frac{17}{36} \qquad P(R) = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}, \qquad P(B) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

Lo spazio campionario contiene persone appartenenti ai seguenti gruppi di età:

$$A_1 = [60, 65) \qquad A_2 = [65, 70) \qquad A_3 = [70, 75) \qquad A_4 = [75, \infty).$$

Sappiamo che

$$P(A_1) = 0.45 \qquad P(A_2) = 0.28 \qquad P(A_3) = 0.20 \qquad P(A_4) = 0.07.$$

Dalla letteratura è noto che la probabilità di sviluppare la cataratta nei successivi 5 anni per questi gruppi di età è rispettivamente 0.024, 0.046, 0.088, 0.153. Qual è la probabilità per i membri della nostra popolazione?

Sia C l'evento "sviluppare la cataratta nei successivi 5 anni".

Vogliamo calcolare $P(C)$. Conosciamo:

$$P(C|A_1) = 0.024 \quad P(C|A_2) = 0.046 \quad P(C|A_3) = 0.088 \quad P(C|A_4) = 0.153.$$

Gli eventi A_i sono disgiunti e la loro unione è Ω quindi

$$C = \bigcup_{i=1}^{4} (C \cap A_i)$$

$$P(C) = P\Big(\bigcup_{i=1}^{4} C \cap A_i\Big) = \sum_{i=1}^{4} P(C \cap A_i) = \sum_{i=1}^{4} P(A_i) \cdot P(C|A_i) = 0.052$$

Teorema delle probabilità totali

Generalizzando il procedimento usato nell'esempio precedente otteniamo:

Se $A_1, \ldots, A_n$ sono eventi

mutuamente esclusivi ed **esaustivi**

= A due a due disgiunti e la loro unione è Ω.

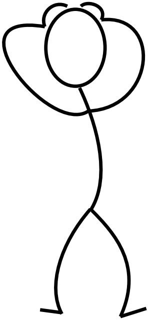
= Formano una **partizione** di Ω.

e tali che $P(A_i) \neq 0$ per tutti gli i.

Sia C è un qualsiasi altro evento.

Allora

$$P(C) \; = \; \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P\big(C|A_i\big).$$



Esercizio

Una popolazione contiene persone appartenenti ai seguenti gruppi:

gruppo A gruppo $B = \neg A$ malati M sani $S = \neg M$

Sappiamo che:

$P(A) = 0.4$ $P(B) = 0.6$ $P(M|A) = 0.25$ $P(M|B) = 0.07$

Qual è la probabilità che una persona malata appartenga al gruppo A?

In altre parole, dobbiamo calcolare $P(A|M)$.

$$P(A|M) = \frac{P(A \cap M)}{P(M)} = \frac{P(A \cap M) \cdot P(A)}{P(M) \cdot P(A)} = \frac{P(M|A) \cdot P(A)}{P(M)} =$$

$$= \frac{P(M|A) \cdot P(A)}{P(M|A)P(A) + P(M|B)P(B)} = 0.7$$

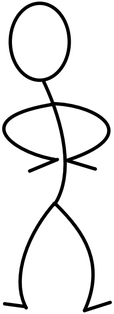
Generalizzando il procedimento usato nell'esempio precedente otteniamo:

Per ogni coppia di eventi C e D di probabilità $\neq 0$ vale

$$P(C|D) = \frac{P(D|C) \cdot P(C)}{P(D)}$$

Formulazione alternativa

$$= \frac{P(D|C) \cdot P(C)}{P(D|C)P(C) + P(D|\neg C)P(\neg C)}$$



Esempio test diagnostico (a)

- Let $+$ and $-$ be the events that the result of a diagnostic test is positive or negative respectively
- Let D and $\neg D$ be the event that the subject of the test has or does not have the disease respectively
- The **sensitivity** is the probability that the test is positive given that the subject actually has the disease, $P(+ \mid D)$
- The **specificity** is the probability that the test is negative given that the subject does not have the disease, $P(- \mid \neg D)$

Esempio test diagnostico (b)

- The **positive predictive value** is the probability that the subject has the disease given that the test is positive, $P(D \mid +)$
- The **negative predictive value** is the probability that the subject does not have the disease given that the test is negative, $P(\neg D \mid -)$
- The **prevalence of the disease** is the marginal probability of disease, $P(D)$

Esempio test diagnostico (c)

- A study comparing the efficacy of HIV tests, reports on an experiment which concluded that HIV antibody tests have a sensitivity of 99.7% and a specificity of 98.5%

- Suppose that a subject, from a population with a .1% prevalence of HIV, receives a positive test result. What is the probability that this subject has HIV?

- Mathematically, we want $P(D \mid +)$ given the sensitivity, $P(+ \mid D) = .997$, the specificity, $P(- \mid \neg D) = .985$, and the prevalence $P(D) = .001$

Esempio test diagnostico (d)

$$
\begin{aligned}
P(D \mid +) &= \frac{P(+ \mid D)P(D)}{P(+ \mid D)P(D) + P(+ \mid \neg D)P(\neg D)} \\
&= \frac{P(+ \mid D)P(D)}{P(+ \mid D)P(D) + \{1 - P(- \mid \neg D)\}\{1 - P(D)\}} \\
&= \frac{.997 \times .001}{.997 \times .001 + .015 \times .999} \\
&= .062
\end{aligned}
$$

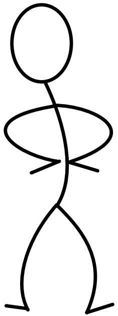
- In this population a positive test result only suggests a 6% probability that the subject has the disease
- (The positive predictive value is 6% for this test)

Esempio test diagnostico (e)

- The low positive predictive value is due to low prevalence of disease and the somewhat modest specificity
- Suppose it was known that the test was taken in South Africa where the prevalence is estimated to be around 20%

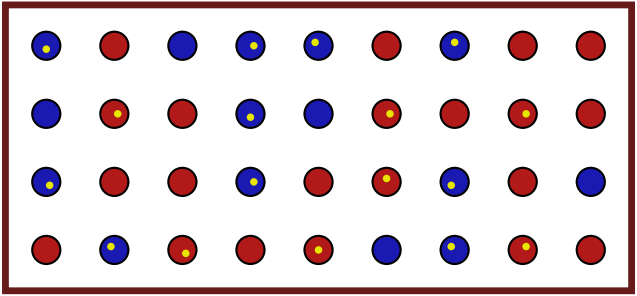
$$
\begin{aligned}
P(D \mid +) &= \frac{P(+ \mid D)P(D)}{P(+ \mid D)P(D) + P(+ \mid \neg D)P(\neg D)} \\
&= \frac{P(+ \mid D)P(D)}{P(+ \mid D)P(D) + \{1 - P(- \mid \neg D)\}\{1 - P(D)\}} \\
&= \frac{.997 \times .2}{.997 \times .2 + .015 \times .8} \\
&= .943
\end{aligned}
$$

Indipendenza stocastica



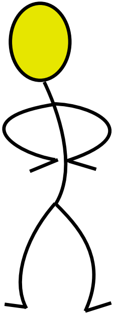
Esempio di eventi dipendenti (a)

Alcune delle biglie hanno un puntino giallo:



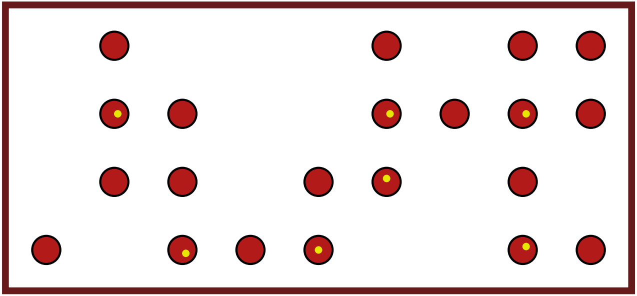
$P(G) = \frac{17}{36}$

È informativo sapere che il colore è rosso?



Esempio di eventi dipendenti (b)

Alcune delle biglie hanno un puntino giallo:

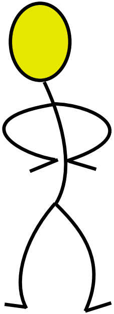


$P(G) = \frac{17}{36}$

È informativo sapere che il colore è rosso?

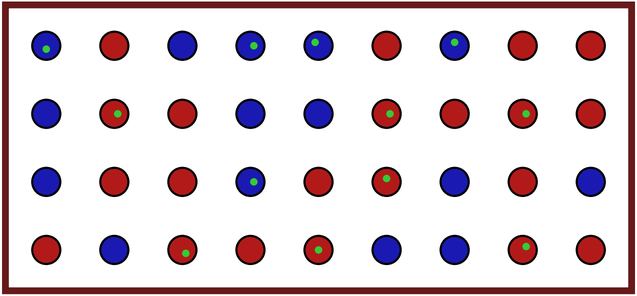
$P(G|R) = \frac{7}{21} = \frac{1}{3}$

Sapere che la biglia è rossa ci informa che il puntino giallo è più improbabile



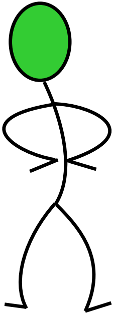
Esempio di eventi indipendenti (a)

Alcune delle biglie hanno un puntino verde:



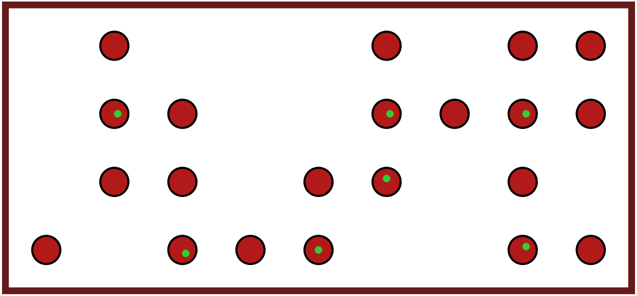
$$P(V) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

È informativo sapere che il colore è rosso?



Esempio di eventi indipendenti (b)

Alcune delle biglie hanno un puntino verde:

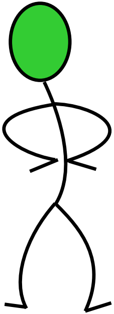


$$P(V) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

È informativo sapere che il colore è rosso?

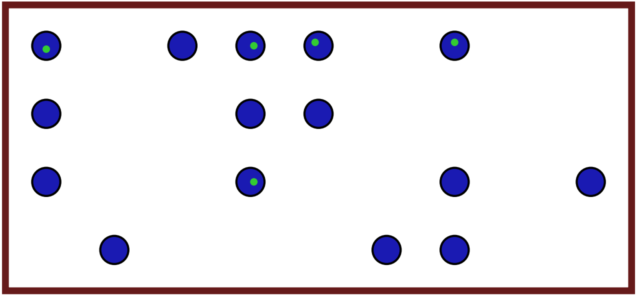
$$P(V|R) = \frac{7}{21} = \frac{1}{3}$$

Sapere che la biglia è rossa non dà alcun informazione sul puntino verde.



Esempio di eventi indipendenti (c)

Alcune delle biglie hanno un puntino verde:

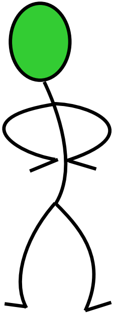


$$P(V) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

È informativo sapere che il colore è blu?

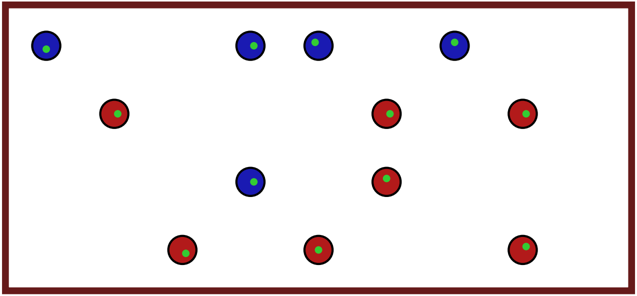
$$P(V|B) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

Sapere che la biglia è blu non dà alcun informazione sul puntino verde.

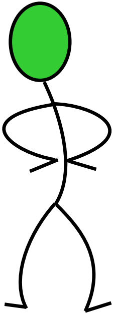


Esempio di eventi indipendenti (d)

Alcune delle biglie hanno un puntino verde:



E viceversa: il puntino verde non dà informazioni sul colore.

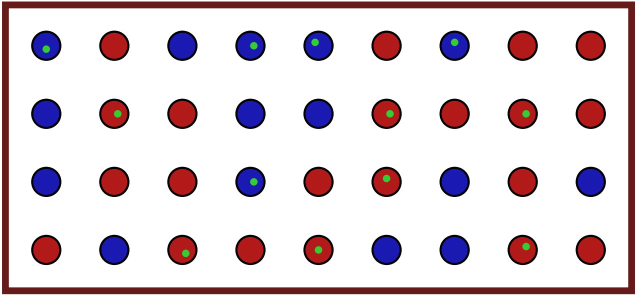


$$P(R|V) = \frac{7}{12} \qquad P(B|V) = \frac{5}{12}$$

$$P(R) = \frac{21}{36} \qquad P(B) = \frac{15}{36}$$

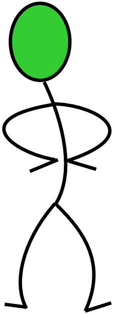
Esempio di eventi indipendenti (e)

Alcune delle biglie hanno un puntino verde:



Diremo che R e V sono **eventi indipendenti**

Idem per B e V



Definizione

Due eventi A e B si dicono **indipendenti** se

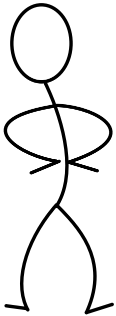
$$P(A \cap B) \quad = \quad P(A)\, P(B)$$

Equivalentemente (ma dobbiamo richiedere $P(B) \neq 0$) se

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$$

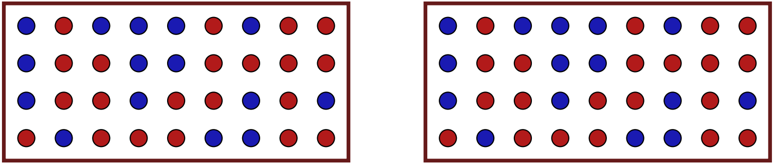
E/o, simmetricamente, (richiedendo $P(A) \neq 0$) se

$$P(B|A) = P(B)$$



Esempio

I risultati dell'estrazione da due urne sono eventi indipendenti.



I seguenti eventi sono tra loro indipendenti:

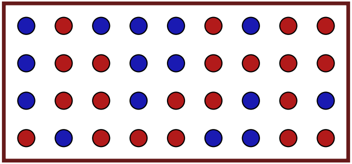
estrarre una biglia rossa dalla prima urna $R \times \boldsymbol{U}$

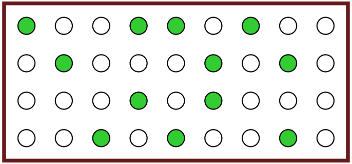
estrarre una biglia blu dalla seconda urna $\boldsymbol{U} \times B$

$$P\Big(R \times \boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{U} \times B\Big) = P(R \times B) = P(R) \cdot P(B) = P(R \times \boldsymbol{U}) \cdot P(\boldsymbol{U} \times B)$$

Esempio

L'indipendenza permette la seguente rappresentazione:



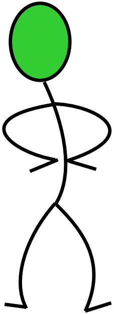


L'estrazione di una biglia con puntino è equivalente a 2 estrazioni.

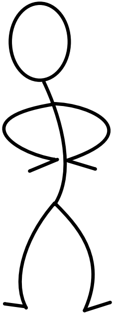
Dalla prima urna estraiamo una biglia e dalla seconda un puntino.

Ovvero è come lavorare in uno spazio prodotto.

N.B. La probabilità nello spazio prodotto è per definizione proprio il prodotto della probabilità.

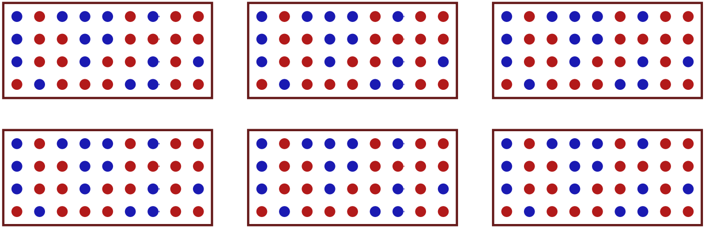


La distribuzione binomiale



Esempio (a)

Abbiamo 6 urne con identico contenuto e da ognuna estraiamo una biglia.



Qual è la probabilità di ottenere esattamente 4 biglie rosse e 2 biglie blu?

Ovviamente, per risparmiare urne e biglie potremmo estrarre 6 volte dalla stessa urna, reimbussolando ogni volta la biglia estratta.

Lo spazio campionario è $\boldsymbol{U}^6 = \{\text{sequenze di biglie di lunghezza } 6\}$.

Esempio (b)

L'evento 4 biglie rosse e 2 biglie blu è unione dei seguenti insiemi:

$$\underbrace{\begin{matrix} \mathbf{B}\times\mathbf{B}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R} \\ \mathbf{B}\times\mathbf{R}\times\mathbf{B}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R} \\ \mathbf{B}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{B}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R} \\ \mathbf{B}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{B}\times\mathbf{R} \\ \mathbf{B}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{B} \end{matrix}}_{5} \quad \underbrace{\begin{matrix} \mathbf{R}\times\mathbf{B}\times\mathbf{B}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R} \\ \mathbf{R}\times\mathbf{B}\times\mathbf{R}\times\mathbf{B}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R} \\ \mathbf{R}\times\mathbf{B}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{B}\times\mathbf{R} \\ \mathbf{R}\times\mathbf{B}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{B} \\ \end{matrix}}_{4} \quad \underbrace{\begin{matrix} \mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{B}\times\mathbf{B}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R} \\ \mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{B}\times\mathbf{R}\times\mathbf{B}\times\mathbf{R} \\ \mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{B}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{B} \\ \\ \end{matrix}}_{3} \quad \underbrace{\begin{matrix} \mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{B}\times\mathbf{B}\times\mathbf{R} \\ \mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{B}\times\mathbf{R}\times\mathbf{B} \\ \\ \\ \end{matrix}}_{2} \quad \underbrace{\begin{matrix} \mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{B}\times\mathbf{B} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}}_{1}$$

Calcoliamo per esempio la probabilità dell evento

$$P\big(R\times R\times R\times R\times B\times B\big) \;=\; P(R)^4 P(B)^2$$

Ma anche per tutti gli altri 15 eventi il risultato è lo stesso $P(R)^4 P(B)^2$.

N.B. Sono eventi tra loro disgiunti.

$$P\big(\{4 \; rosse \; e \; 2 \; blu\}\big) \;=\; 15 \; P(R)^4 P(B)^2 \;=\; 15 \left(\frac{21}{36}\right)^4 \left(\frac{15}{36}\right)^2.$$

Distribuzione binomiale (3)

Abbiamo n copie identiche della solita urna $\boldsymbol{U}$.

Qual è la probabilità di estrarre k biglie rosse e $n-k$ biglie blu?

Dall'esempio precedente è chiaro che la risposta ha la forma:

$$C_{n,k}\ P(R)^k\ P(B)^{n-k}$$

ovvero,
$$C_{n,k}\ P(R)^k\ \big(1-P(R)\big)^{n-k}$$

Rimane da determinare il coefficiente $C_{n,k}$.

$$C_{n,k} = \Big|\big\{ \text{ eventi } R\times B\times \ldots \times R\times B\times R \text{ con } k \text{ volte } R \text{ e } n-k \text{ volte B}\big\}\Big|$$

coefficienti binomiali

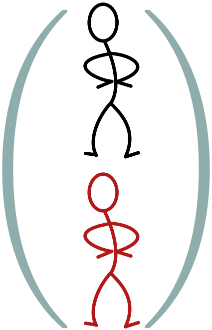
Coefficenti binomiali (notazione)

$$C_{n,k} \quad = \quad \binom{n}{k} \quad = \quad \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Si legge: ***n* su *k***.

In inglese: ***n* choose *k***.

I numeri $\binom{n}{k}$ si chiamano **coefficienti binomiali**.



Distribuzione binomiale (8)

Abbiamo n copie identiche della solita urna $\boldsymbol{U}$.

Qual è la probabilità di estrarre k biglie rosse e $n-k$ biglie blu?

Dall'esempio precedente è chiaro che la risposta ha la forma:

$$\binom{n}{k}\ P(R)^k\ P(B)^{n-k}$$

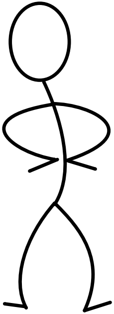
$$= \binom{n}{k}\ P(R)^k\ \Big(1-P(R)\Big)^{n-k}$$

I coefficiente richiesto è $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

$$\binom{n}{k} = \Big|\{\text{ eventi } R\times B\times\ldots\times R\times B\times R \text{ con } k \text{ volte } R \text{ e } n-k \text{ volte B}\}\Big|$$

coefficienti binomiali

Variabili aleatorie (v.a.)



Definizione/Esempi

Una **variabile aleatoria** (quantitativa)

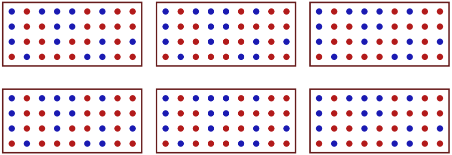
In inglese **random variable (r.v.)**

è una funzione $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

Per il momento vedremo solo v.a. **discrete**
che sono funzioni $X : \Omega \to \mathbb{N}$

Esempi:

$\Omega = \boldsymbol{U}^6 = \{\langle b_1 \ldots, b_6\rangle \;:\; b_i \in \boldsymbol{U}\}$



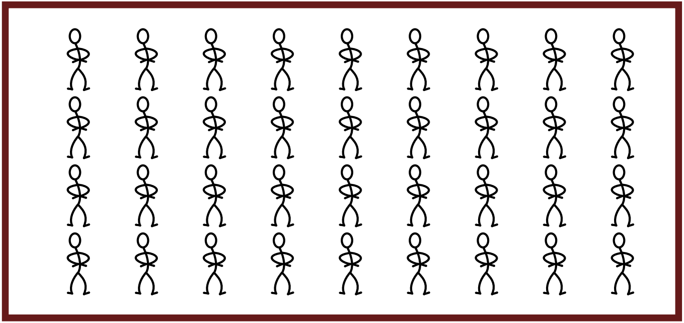
Le seguenti sono variabili aleatorie:

- $X \;:\; \langle b_1 \ldots, b_6\rangle \mapsto$ numero di biglie rosse in $\{b_1 \ldots, b_6\}$.
- $X \;:\; \langle b_1 \ldots, b_6\rangle \mapsto$ minimo i tale che b_i è blu, altrimenti 0.
- $X \;:\; \langle b_1 \ldots, b_6\rangle \mapsto$ massimo numero di biglie rosse consecutive.

NonEsempio: $X : \boldsymbol{U} \to \{\textit{rosso}, \textit{blu}\}$, **v.a.** ~~quantitativa~~ **qualitativa**.

Esempi

Lo spazio campionario Ω è una popolazione di persone.



Le seguenti sono variabili aleatorie:

- X :  $\mapsto$ altezza in millimetri.
- X :  $\mapsto$ peso in grammi.

Più precisamente: una **variabile aleatoria** quantitativa $X : \Omega \to \mathbb{R}$

è tale che $\{\omega \in \Omega \ : \ X(\omega) \leq r\} \ \in \ \mathcal{E}$ per ogni $r \in \mathbb{R}$.

NonEsempio (in $\boldsymbol{U}$): X è il numero della riga in cui occorre la biglia.

Scriveremo $\boldsymbol{P(X \leq r)}$ per $P(\{\omega \in \Omega \ : \ X(\omega) \leq r\})$.

Scriveremo $\boldsymbol{P(X = r)}$ per $P(\{\omega \in \Omega \ : \ X(\omega) = r\})$.

Se X è una v.a. discreta, la funzione $r \mapsto P(X = r)$

si chiama la **distribuzione** di X.

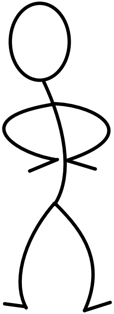
In inglese **probability mass function (p.m.f.)**

Operazioni su v.a.

Se $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ sono due variabili aleatorie, anche le seguenti lo sono:

- $X + Y \ : \ \omega \ \mapsto \ X(\omega) + Y(\omega)$;
- $X \cdot Y \ : \ \omega \ \mapsto \ X(\omega) \cdot Y(\omega)$;
- $e^X \ : \ \omega \ \mapsto \ e^{X(\omega)}$;
- ecc. ecc. . . .

Esempio: Se Ω è un gruppo di persone, X il peso e Y l'altezza. Allora anche il BMI (body mass index) è una variabile aleatoria.



Variabili aleatorie indipendenti

Per $i = 1, 2$ siano $X_i : \Omega \to \mathbb{R}$ due variabili aleatorie discrete.

Diremo che sono indipendenti se per ogni $r_i \in \mathbb{R}$

$$P(X_1{=}r_1 \text{ e } X_2{=}r_2) \;=\; P(X_1{=}r_1) \cdot P(X_2{=}r_2)$$

Esempio:

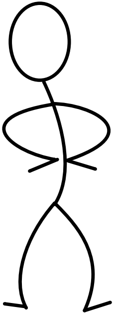
X_1 è il primo risultato di due lanci di un dado;

X_2 è il secondo risultato.

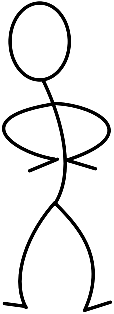
NonEsempio:

X_1 è il primo risultato di due lanci di un dado;

X_2 è la somma del risultato dei due lanci.



Distribuzione binomiale



Definizione.

Sia $\langle \Omega, \mathcal{E}, P \rangle$ uno spazio di probabilità.

Siano B e R due eventi tali che $B = \neg R$

Sia $p = P(B)$ e quindi $P(R) = P(\neg B) = 1 - p$.

spesso di scrive q per $1 - p$

La variabile aleatoria $X : \Omega^n \to \mathbb{R}$ così definita:

$$X(\langle x_1, \ldots, x_n \rangle) = \left| \left\{ i \ : \ x_i \in B \right\} \right|$$

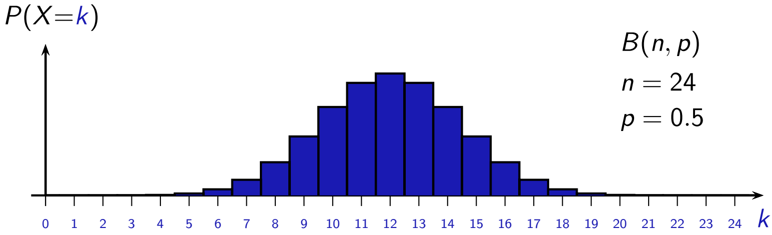
Si dice **v.a. binomiale** di parametri n e p.

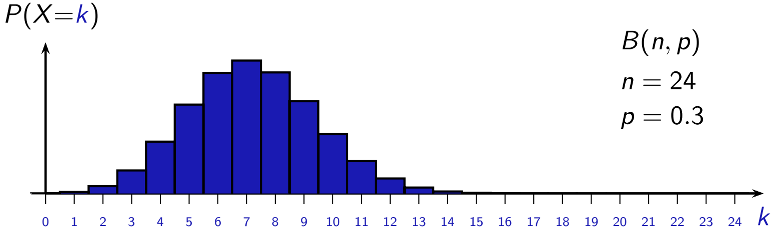
Si indica con $B(n, p)$.

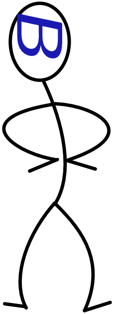
Per quanto visto $P(X{=}k) \ = \ \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

$B(1, p)$ si dice **v.a. di Bernoulli**.

Esempi.


$P(X{=}k)$
$B(n, p)$
$n = 24$
$p = 0.5$
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24
k


$P(X{=}k)$
$B(n, p)$
$n = 24$
$p = 0.3$
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24
k


B