

(15)

Quindi $\frac{x}{\sin x}$ intrappolato tra quantità $\rightarrow 1$

$$\Rightarrow \frac{x}{\sin x} \rightarrow 1, \quad \frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$$

Abbiamo dimostrato: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$

Caso $x < 0$: $\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin(-x)}{-x} \quad (-x > 0)$

$\downarrow$

1

Quindi $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1$

Limiti dx/sin coincidono $\Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Altro esempio:

• $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = ?$ anche questo indet: $\frac{0}{0}$

$$= \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x(1 + \cos x)} = \frac{1 - \cos^2 x}{x(1 + \cos x)} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$

$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$

1 \qquad \qquad 0

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

Oss: riipilogando, abbiamo trovato forme indetermin. $\frac{0}{0}$ che convergono a 0 (caso di $\frac{1-\cos x}{x}$) oppure a 1 (caso di $\frac{\sin x}{x}$). Facile trovare esempi che convergono a $+\infty$ (caso di $\frac{x^2}{x^4+1}$), etc: ciò giustifica la terminologia "forma indeterminata" e dimostra che, in questi casi, è necessaria un'attenzione particolare. Situazioni simili accadono con limiti della forma $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, in cui i due termini sono "in contrasto".

La forma $\frac{0}{\infty}$ ha natura ^{molto} diversa: in questo caso ^{ciascun} termine ~~spinge~~ ^{spinge} nella stessa direzione (imprescindere i valori della funzione), quindi non è indeterminata: il limite è sicuramente 0.

Esercizio: $\frac{\infty}{0}$? [attenzione al segno!!!]

Conclusione: quasi tutte le funzioni che si incontrano nella vita quotidiana sono continue. Basta solo fare attenzione ai punti dove non sono definite & ad alcune forme indeterminata. In particolare, i teoremi visti inizialmente riguardo l'esistenza di sol. di un'equazione o di sol. ottimali sono molto potenti — ma solo per l'esistenza! Dobbiamo ora affrontare il problema: come trovare tali soluzioni?

Per il II problema (trovare sol. ottimali) non c'è ancora una buona risposta: servono le derivate.

Per il I problema, invece, possiamo già indicare un metodo per trovare ~~una~~ almeno una buona soluzione approssimativa: "metodo di bisezione".

Esempio:

Vogliamo risolvere $f(x)=0$, dove $f(x)=x^3+x-9$

- cerchiamo 2 punti x_1, x_2 tali che $f(x_1) < 0, f(x_2) > 0$.

Esempio: $x_1=0, x_2=2$. Il teorema ci dice che, da qualche parte nell'intervallo $[x_1, x_2]$, c'è una soluzione al problema $f(x)=0$.

- prendiamo il punto medio $\bar{x}$ dell'intervallo $[x_1, x_2]$: nel nostro caso, $\bar{x}=1$. Se per caso $f(\bar{x})=0$, abbiamo trovato la soluzione. Nel nostro caso invece $f(\bar{x}) = f(1) = (1)^3 + 1 - 9 = -7 < 0$. Allora ripetiamo l'intero procedimento con $[\bar{x}, x_2]$.

Se siamo fortunati, prima o poi troveremo la soluzione richiesta (100 passaggi? 1000 passaggi? ...)

Altrimenti troviamo una successione di punti medi di intervalli sempre più piccoli: tale successione convergerà alla soluzione richiesta.

Esercizio:

- Usare questo metodo per trovare una soluzione approssimativa al problema $x^3 + x - 9 = 0$
- Usare questo metodo per trovare una approssimazione decimale del numero irrazionale $\sqrt{2}$.

———— 16 bis ————

Torniamo ora al II problema: sol. ottimale.

Come già detto, per costruire la "lattina ideale" bisogna

trovare il raggio r per cui la funzione

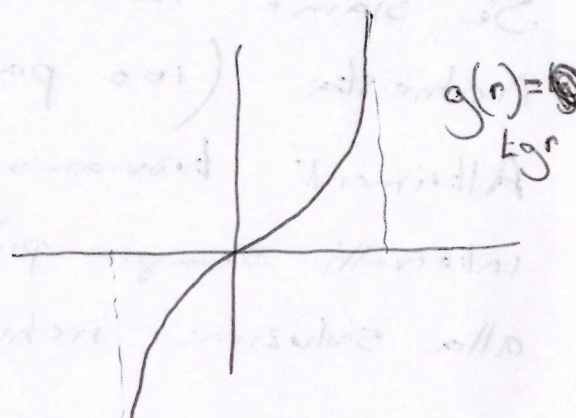
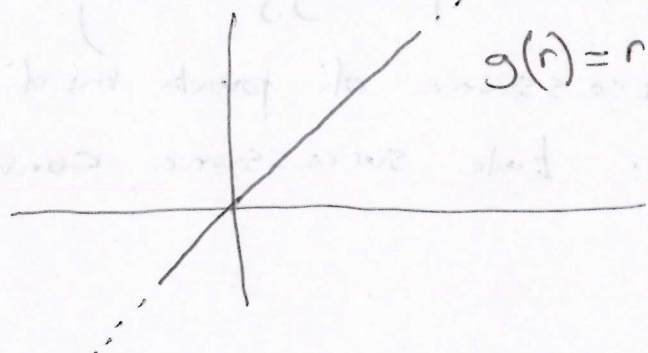
$$g(r) = 2\pi r^2 + \frac{66}{r}$$

assume valore minimo.

Bisogna però fare attenzione a 2 questioni:

- 1) Vero o falso, g è cont. quindi il Teo #2 dice che il minimo esiste.

Falso! Controesempi:



Bonus: prima di passare a nuovo argomento, sfogliamo quanto imparato per dimostrare un fatto sorprendente:

Teo. in ogni istante, sulla superficie della terra, ci sono 2 punti antipodali aventi la stessa temperatura

Dimostrazione:

- Superficie terra = sfera



temperatura (al momento fissato): funzione

$$T: \text{sfera} \longrightarrow \mathbb{R}$$

- Intuitivamente, T è continua: se mi sposto di poco, T cambia di poco.

Matematicamente? Guardiamo def. classica:

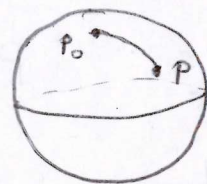
$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \text{ se } |x - x_0| < \delta \text{ allora } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Ingredienti essenziali: nozione di distanza tra punti

$$x, x_0 \in \mathbb{R}.$$

Anche sulla sfera esiste nozione di distanza tra punti:

misuriamo distanza tramite archi



Con questa modifica, la funzione $T: \text{sfera} \rightarrow \mathbb{R}$
è continua per motivi fisici.

$$p \mapsto T(p)$$

- Dato $\tilde{p} \in \text{sfera}$, sia $\tilde{\tilde{p}}$ il suo punto antipodale
Come già visto, le operazioni elementari preservano la
continuità quindi la funzione differenza

$$S: \text{sfera} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$p \mapsto S(p) = T(p) - T(\tilde{p})$$

è continua. All'istante fissato si possono verificare

2 casi:

- i) $S(p) = 0 \quad \forall p$ ossia ogni coppia di punti
antipodali ha stessa temperatura: possibile ma improbabile

- ii) esiste almeno 1 punto $p_1: S(p_1) \neq 0$.

Per esempio, sia $S(p_1) > 0$. Allora ~~$S(p_1) > 0$~~

$$S(\tilde{p}_1) = T(\tilde{p}_1) - T(\tilde{\tilde{p}}_1) = T(\tilde{p}_1) - T(p_1) = -S(p_1)$$

↑
"doppio antipodale" < 0

ossia abbiamo trovato 2 punti sulla sfera aventi
uno valore positivo, l'altro valore negativo

• L'analogo del Teo #2 (OK perché sfera è chiusa & lim.)
dice esiste terzo punto $P: S(p) = 0$
In entrambi i casi i, ii il nostro teorema "bonus" è dimostrato

Il Teo #2 si applica solo a g cont. su
intervallo chiuso & limitato

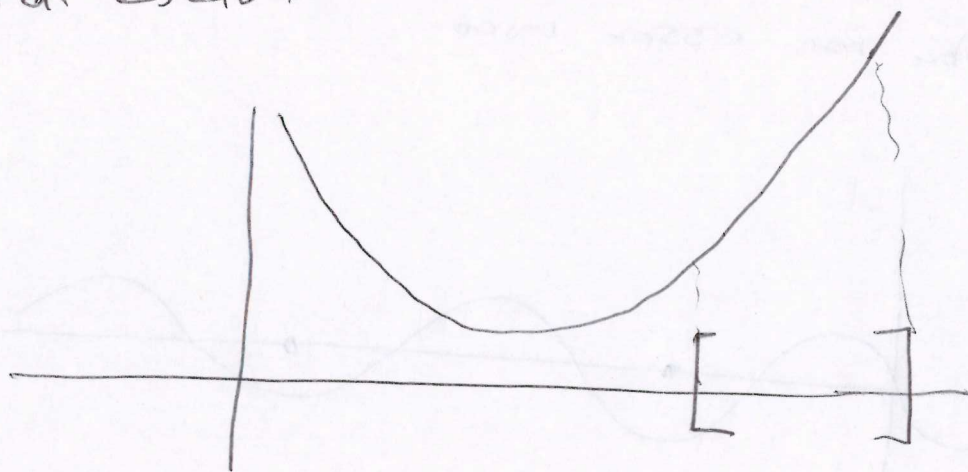
Nel nostro caso, $r \in (0, \infty)$: nè chiuso nè limitato!

Però, $r \rightarrow 0$: $2\pi r^2 + \frac{66}{r} \rightarrow +\infty$

$r \rightarrow \infty$: $2\pi r^2 + \frac{66}{r} \rightarrow +\infty$

Quindi inutile cercare minimo vicino a $0, \infty$: possiamo restringere la nostra g ad un intervallo chiuso & lim!

Quale intervallo? Se lo scegliamo male, rischiamo
di escludere la soluzione che cerchiamo!



Notiamo che: $r < 1 \Rightarrow 2\pi r^2$ è piccolo (conta poco)
 $\frac{66}{r}$ è grande

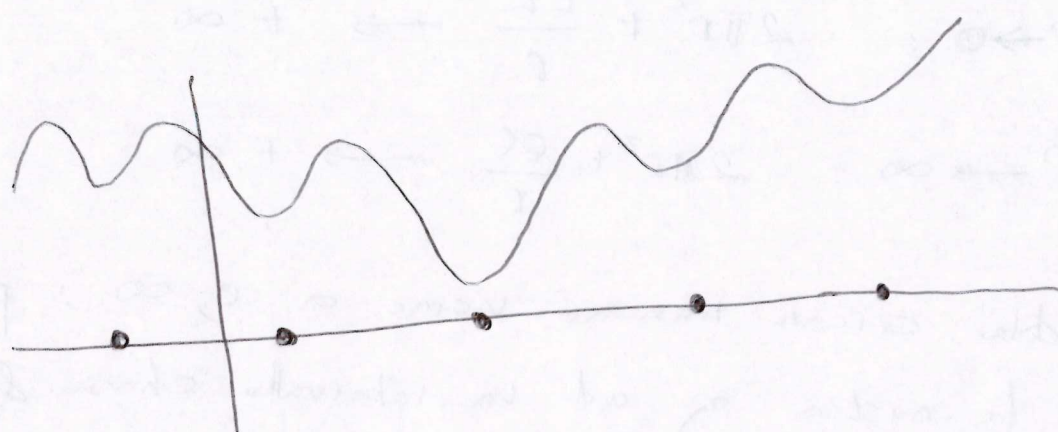
quindi: il minimo di g non sarà nell'intervallo $(0, 1)$

$r > 66 \Rightarrow \frac{66}{r}$ conta poco, $2\pi r^2$ è grande:

il minimo di g non sarà nell'intervallo $(66, \infty)$

Questo ragionamento ci incoraggia a restringere
g all'intervallo chiuso & limitato $[1, 66]$.

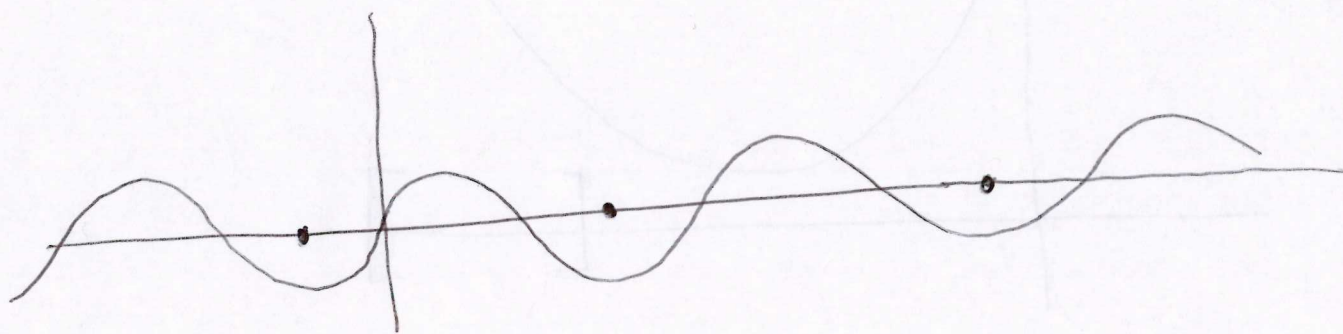
2) Bisogna essere chiari sul concetto di "minimo"



tanti minimi
 "locali", un
 Solo minimo
 "assoluto"

A noi interessa il punto di minimo assoluto

Però potrebbe non essere unico



Dobbiamo stare attenti: forse ci sono 2 latine
ideali ?!

Come trovare i punti di minimo?

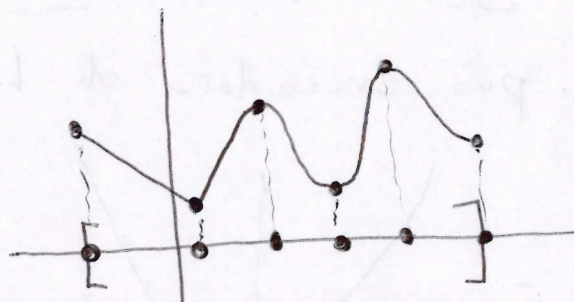
Osservazione fondamentale: guardando le figure precedenti, notiamo che nei punti di minimo la retta tangente è orizzontale.

Anche qui però bisogna stare attenti

Teo #3: $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ cont. (I intervallo)

Allora i punti di minimo (locali o assoluti) sono da cercarsi tra i seguenti:

- punti in cui la retta tangente è orizzontale
- punti in cui non esiste la retta tangente
- punti estremi dell'intervallo.



Quando I è chiuso & limitato, i punti sopra saranno tipicamente in numero finito. Il teorema ci permette di scartare tutti gli altri (infiniti!) punti di I . Per trovare il/i punti di minimo assoluto, basta dunque compilare la lista dei punti sopra &, per ciascuno di essi, calcolare il valore $f(x)$. Basta ora confrontare questi valori. Il/i punti con valore minimo in questa lista sono anche quelli con valore minimo tra tutti i punti di I .

Esempi:

- la funzione disegnata sopra genera una lista di 6 punti. Notiamo che tra questi comparono anche i punti di massimo (locale/assoluto)!

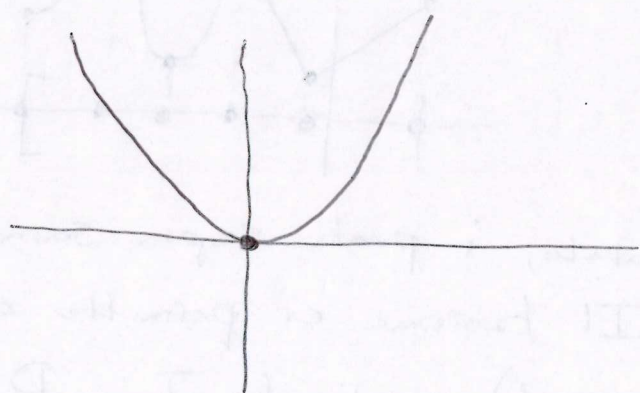
Infatti lo stesso ragionamento si applica anche a tali punti, generando la stessa lista.

La lista includerà dunque sempre sia i punti di minimo sia i punti di massimo.

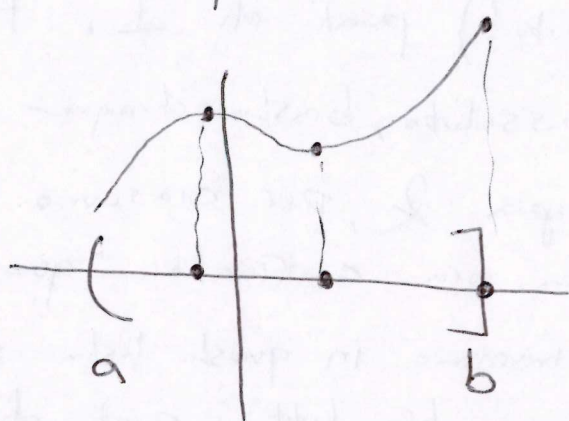
- Se l'intervallo è chiuso & limitato, sappiamo che il minimo assoluto c'è, ed è nella lista.

Lo stesso vale per il massimo assoluto.

Se l'intervallo non è chiuso o non è limitato, può succedere di tutto:

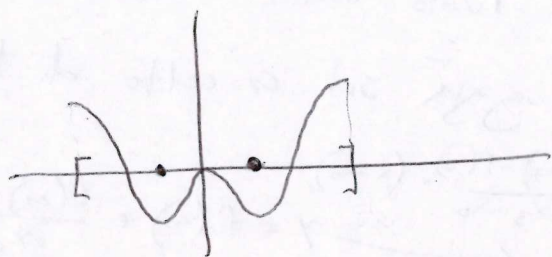


il minimo c'è comunque

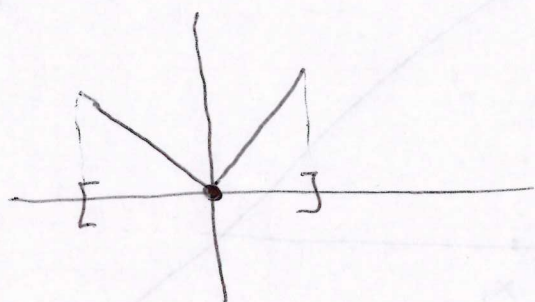


la lista non è vuota (ha 3 punti) ma non contiene un minimo assoluto perché tale minimo non esiste ("sarebbe" nel punto a, ma tale punto non sta nel dominio di def.)

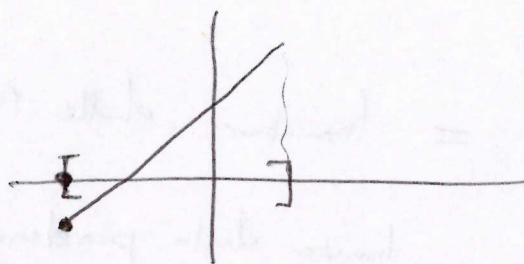
- Come già detto, il punto di minimo assoluto potrebbe non essere unico, oppure potrebbe essere situato proprio in uno dei punti "strani": senza retta tang. oppure estremo dell'intervallo:



2 punti di min. ass.



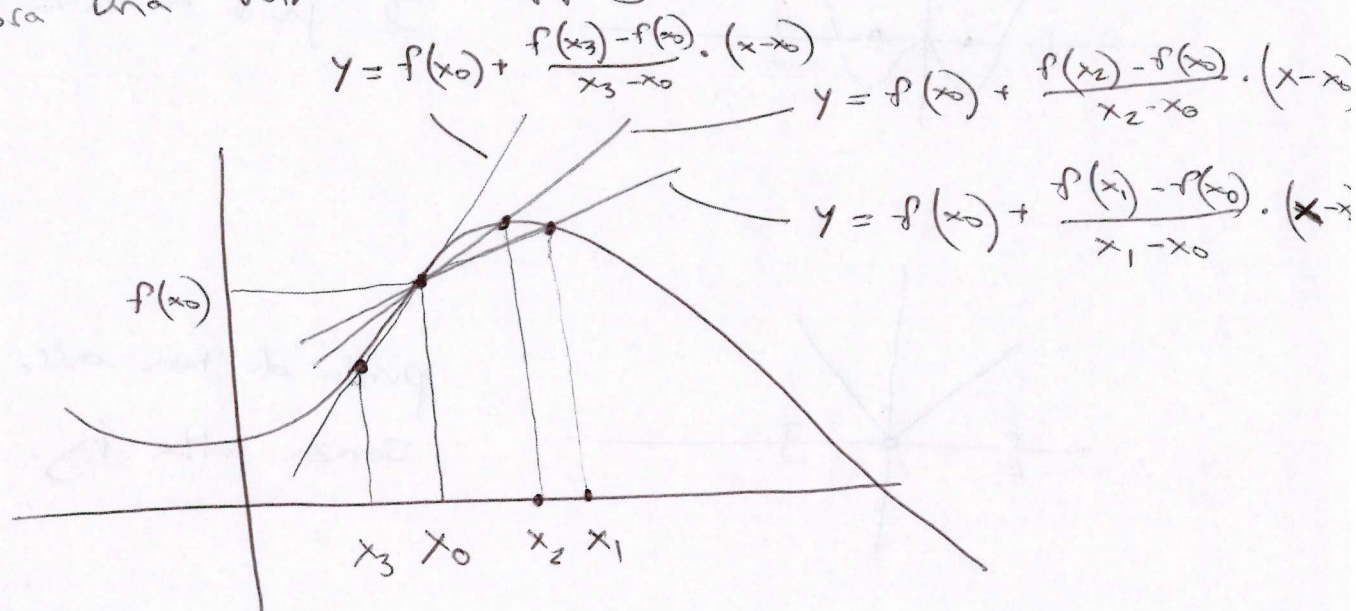
punto di min. ass.
Senza retta tang.



punto di min. ass.
in estremo dell'intervallo

Il teorema #3 pone il problema di trovare un metodo efficiente per verificare se la retta tangente al grafico esiste, e ~~che~~ per calcolarne la pendenza.

Questo è precisamente il ruolo della "derivata", che ancora una volta si appoggia sul concetto di limite.



retta $t_{g.}$ in $(x_0, f(x_0))$ = limite delle rette secanti;

ossia pendenza retta $t_{g.}$ = ~~pendenza retta~~ limite della pendenza delle rette secanti

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \left(\begin{array}{l} \text{se} \\ \text{esiste!} \end{array} \right)$$

$\rightarrow$ retta $t_{g.}$: $y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

Esempi:

20

• $f(x) = 3x + 7$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{3x + 7 - (3x_0 + 7)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{3(x - x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} 3 = 3$$

• $f(x) = x^2$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{(x - x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x + x_0) = 2x_0$$

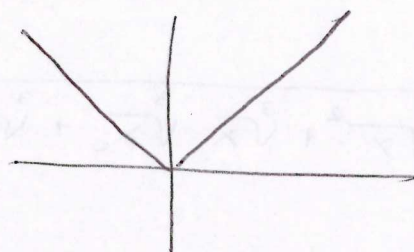
• $f(x) = |x|$

$$x_0 > 0: \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|x| - |x_0|}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$$

$$x_0 < 0: \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|x| - |x_0|}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-x - (-x_0)}{x - x_0} = -1$$

$$x_0 = 0: \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} = \begin{cases} +1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

non esiste
valore limite!



↕
non esiste
retta tg.
in (0,0)

Oss: come nel caso della continuità, questo esempio ci stimola a introdurre il concetto di

"derivata sinistra": $\exists \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}$

"derivata destra": $\exists \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}$

Si ottiene così che $\exists f'(x_0) \Leftrightarrow \exists$ der. sin. & der. in x_0

Esempio: $f(x) = |x|$ ha der. sin. & der. in $x_0 = 0$,
ma non coincidono $\Rightarrow$ non esiste $f'(0)$.

Altro esempio:

• $f(x) = \sqrt[3]{x}$

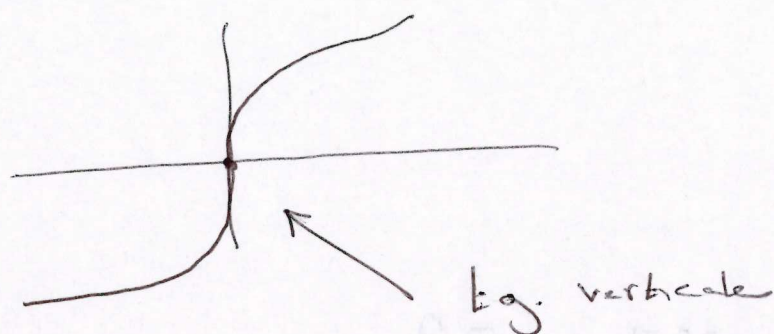
$x_0 \neq 0$: $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x_0}}{x - x_0}$

$$= \frac{(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x_0}) \left(\sqrt[3]{x}^2 + \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x_0} + \sqrt[3]{x_0}^2 \right)}{(x - x_0) \cdot \left(\text{stesso} \right)}$$

$$= \frac{\cancel{x - x_0}}{(\cancel{x - x_0}) \cdot \left(\sqrt[3]{x}^2 + \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x_0} + \sqrt[3]{x_0}^2 \right)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \frac{1}{3 \sqrt[3]{x_0}^2}$$
$$= \frac{1}{3} \frac{1}{x_0^{2/3}}$$

$$x=0: \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \frac{1}{x^{2/3}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \infty \quad (21)$$

quindi $\lim \notin \mathbb{R}$, ossia $\nexists f'(0)$



Come per la continuità, fortunatamente di solito non occorre calcolare le derivate "a mano", basta ricordarsi ~~alcuni~~ pochi casi & applicare il seguente

Teo: $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in I$

f, g derivabili in $x_0 \Rightarrow$

- $f+g$ derivabile: $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
- λf derivabile: $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$
- $f \cdot g$ derivabile: $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$
- $\frac{f}{g}$ derivabile (se $g(x_0) \neq 0$): $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$

Prima di considerare la derivabilità di funzioni composte, notiamo che il teo ci permette di derivare qualsiasi polinomio o funz. razionale

Esempio:

$$\bullet (x^n)'(x_0) = n x_0^{n-1}$$

$$\bullet \left(\frac{1}{x^n}\right)'(x_0) = (-n) (x_0)^{-n-1} = \frac{-n}{x_0^{n+1}}$$

$$\bullet (3x^3 + \pi x^2 - 3x + 2)'(x_0) = 27 x_0^2 + 2\pi x_0 - 3$$

$$\bullet \left(\frac{3x+2}{x^3-1}\right)'(x_0) = \frac{3 \cdot (x_0^3 - 1) - (3x_0 + 2) \cdot (3x_0^2)}{(x_0^3 - 1)^2}$$

In particolare possiamo finalmente risolvere il problema della "lattina ideale":

• Cerchiamo il punto di minimo della funzione

$$g(r) = 2\pi r^2 + \frac{66}{r} \quad \text{sul dominio } [1, 66]$$

$$\bullet g'(r) = 4\pi r - \frac{66}{r^2} = 0 \Leftrightarrow 4\pi r = \frac{66}{r^2}$$

$$4\pi r^3 = 66$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{66}{4\pi}} \simeq 1.74$$

Notiamo che questo $r \in [1, 66]$

22

- altri punti speciali: $r=1$, $r=66$

Conclusione: basta confrontare i seguenti 3 valori

di $g(r)$: $g(1) = 2\pi + 66$

$$g(1.74) \approx 56.93 \leftarrow \text{minimo!}$$

$$g(66) = 2\pi 66^2 + 1$$

Risultato: il punto di minimo è $r = \sqrt[3]{66/4\pi}$

Problema risolto?...

Guardiamo il risultato: la lattina ideale avrebbe
raggio piccolo: ≈ 1.74 cm! (molto minore delle
lattine reali)

E' possibile che la Coca-cola sbagli di tanto?

In realtà stiamo sbagliando noi, ed è costruttivo
capire dove sta l'errore...

Suggerimento: attenzione alle unità di misura!

Usando le idee viste fin qui, possiamo anche calcolarle:

$$\bullet f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{1/n} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{n} x^{(1/n)-1}$$

(vedi caso $n=3$, risolto precedentemente)

Nota: ~~stessa formula~~ ~~stessa formula~~ già usata per $(x^n)'$

$$\bullet f(x) = \sin x : \quad \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \frac{\sin(x_0 + h) - \sin x_0}{h}$$

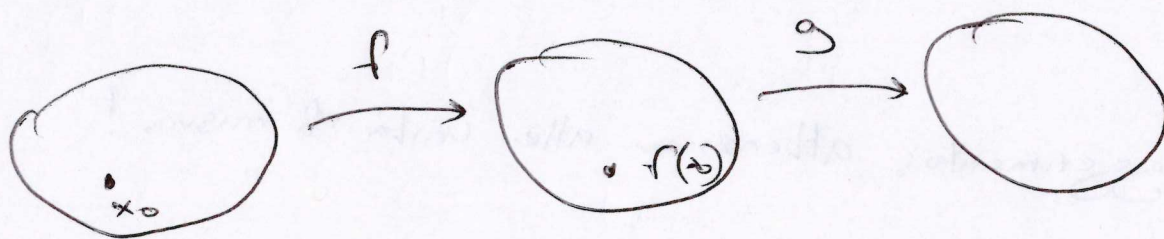
$$= \frac{\sin x_0 \cosh + \cos x_0 \sinh - \sin x_0}{h} =$$

$$= \sin x_0 \frac{\cosh - 1}{h} + \cos x_0 \frac{\sinh}{h} \rightarrow \cos x_0$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 0 1

$$\bullet f(x) = \cos x \rightsquigarrow f'(x) = -\sin x \quad (\text{stessa tecnica})$$

Rimane da capire cosa succede con la composizione:



$$(g \circ f)'(x_0) = ? = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

formula

Esercizi: (controllare anche dom. di def.)

23

• $(\sqrt{\sin x})' = ?$

• $[\sin(x^2+3x)]' =$

• $[\sin(\frac{x^2+3x}{\sqrt{x}})]' =$

• $(\frac{\sin(x^2+3x)}{\sqrt{x}})' =$

• $(f^n)' =$

• $(\frac{x^2-1}{x^2+1})' =$ direttamente
come composizione di $\frac{y-1}{y+1}$ & di x^2

• $[\log(x^2)]' =$

• $[(\log x)^2]' =$

Esempio:

$(x^{\frac{m}{n}})' = ?$ composizione di y^m con $x^{1/n}$

oppure: ponendo $f(x) = x^{m/n}$, nota che $f^n(x) = x^m$

$\Rightarrow n \cdot f^{n-1} \cdot f' = m x^{m-1} \Rightarrow f' = \frac{\frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1}}{f^{n-1}}$
 $= \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1} x^{\frac{m}{n} \cdot (1-\frac{n}{n})} = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}}$

~~Fatti importanti~~

Conclusione: $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$

Lo stesso vale anche per $\alpha \in \mathbb{R}$ e si dimostra approssimando x^α con $x^{m/n}$ appropriato.

Fatti importanti sulle derivate:

• $f' > 0$ su $(a,b) \Rightarrow f$ crescente

$f' < 0$ su $(a,b) \Rightarrow f$ decrescente

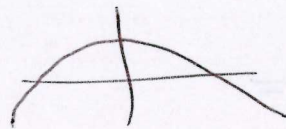
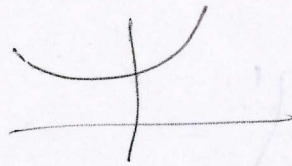
(segue dal
teorema di
Lagrange)

• Iterando l'operazione di derivazione, si può definire f'' , f''' , etc.

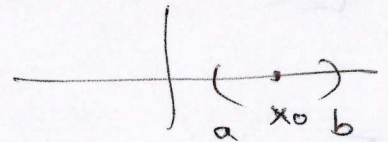
In particolare:

$f'' > 0 \Rightarrow f$ convessa

$f'' < 0 \Rightarrow f$ concava



Utile per studiare punti con $f' = 0$:



• $f'(x_0) = 0$, $f'(x) > 0$ $x \in (x_0, b)$
 $f'(x) < 0$ $x \in (a, x_0)$ $\Rightarrow$ punto di minimo locale

• $f'(x_0) = 0$, $f''(x) < 0$ $x \in (a,b) \Rightarrow$ punto di max locale

Etc.

Integrazione:

Prendiamo una funzione

$$f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{continua} (\Rightarrow \text{limitata})$$

oppure

$$f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{limitata, con solo \# finito di punti di discontinuità}$$

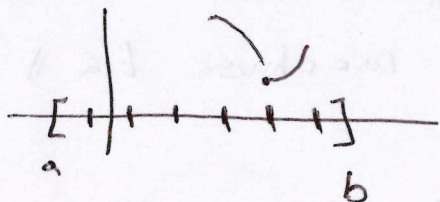


Scegliamo una "partizione" P di $[a, b]$, ossia punti

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

Per ogni intervallo $[x_{i-1}, x_i]$ sia $m_i =$ valore minimo di f su $[x_{i-1}, x_i]$
 $M_i =$ valore massimo

Nota: se f è continua, sappiamo che tali valori esistono
 Se f avesse punti di discontinuità, sarebbe più corretto parlare di "inf" & "sup":

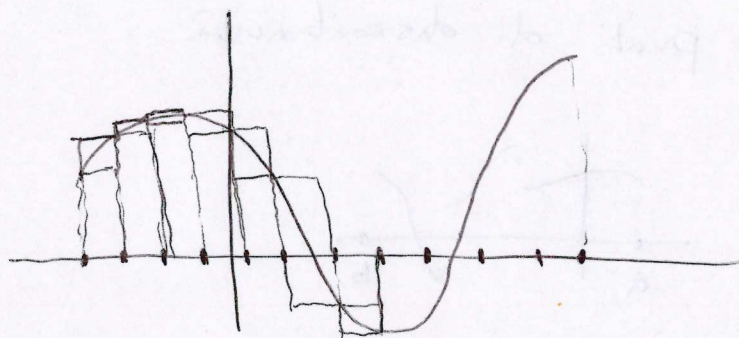


Non ci soffermeremo su questo punto

Definiamo:

$$I_f(P) := m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1) + \dots + m_n(x_n - x_{n-1})$$

$$S_f(P) := M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1) + \dots + M_n(x_n - x_{n-1})$$



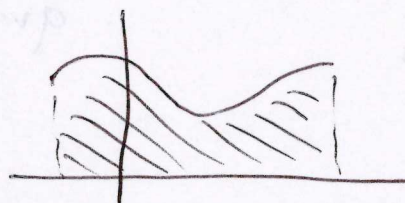
$$m_i \leq M_i \Rightarrow I_f(P) \leq S_f(P)$$

Teo: scegliendo f come sopra, $\exists ! I \in \mathbb{R}$:

$$I_f(P) \leq I \leq S_f(P) \quad \forall P$$

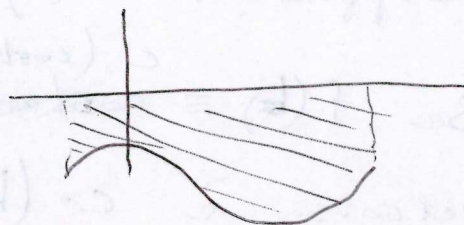
Poniamo dunque $\int_a^b f(x) dx := I$.

Quando $f \geq 0$, il significato geometrico di I è chiaro: corrisponde all'area della regione racchiusa tra il grafico di f e l'asse x .

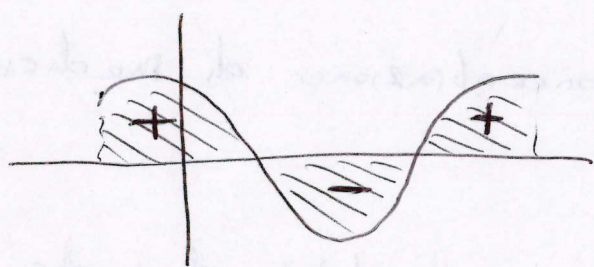


Quando $f \leq 0$, lo stesso ragionamento indica che

$$I = - (\text{area raffigurata}) :$$

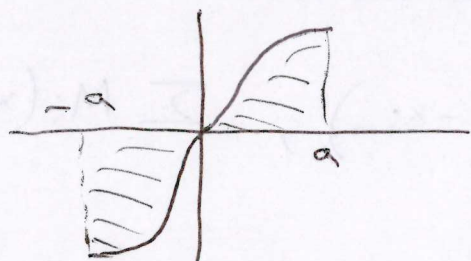


In generale, dunque $I = \int_a^b f =$ "somma algebrica" di tali aree



In particolare è possibile che le aree si "annullino" a vicenda,

Esempio: supponiamo $f(-x) = -f(x) \quad x \in [-a, a]$
"funzione dispari"



esempio: $f(x) = \sin x$

Il calcolo degli integrali ha dunque un ruolo fondamentale in geometria (data una regione, cerchiamo f che la delimiti) ma, a seconda del "significato fisico" della f , è importante in molti altri contesti.

e della
variabile.

Esempio:

1) Supponiamo $f(t) = \text{velocità al tempo } t$

Se $f(t) \equiv \overset{c \text{ (costante)}}{\text{costante}}$, è chiaro che la distanza percorsa è $c \cdot (b-a)$

In generale, però, la velocità cambia con il tempo

In questo caso la distanza percorsa è $\int_a^b f(t) dt$.

2) Supponiamo $f(x) = \text{concentrazione di medicinale}$
in una provetta

Allora $\int_a^b f(x) dx = \text{quantità totale di medicinale nella provetta}$

In casi molto semplici, I può essere calcolato usando il teorema che lo definisce:

- bisogna calcolare $\sum_{i=1}^n m_i (x_i - x_{i-1})$, $\sum M_i (x_i - x_{i-1})$
per ogni partizione

- bisogna trovare ^{qualche} un numero compreso tra tali
valore

Il teo garantisce che tale numero è unico, quindi necessariamente coincide con I .

Esempio:

(26)

- $f(x) \equiv c$ costante: $\forall P, m_i = c = M_i$

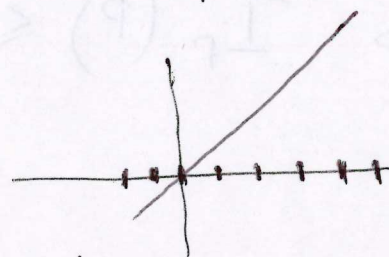
$$\Rightarrow \forall P, I_f(P) = \sum c(x_i - x_{i-1}) = c(b-a)$$

$$S_f(P) = \text{stesso}$$

$$\Rightarrow I = c \cdot (b-a)$$

- $f(x) = x$: è funzione crescente, quindi:

$$\forall P, m_i = x_{i-1}, M_i = x_i$$



Si noti che:

$$I_f(P) = \sum_{i=1}^n x_{i-1} (x_i - x_{i-1}) \leq \sum \underbrace{\frac{1}{2} (x_{i-1} + x_i)}_{\text{media}} (x_i - x_{i-1})$$

$$\leq \sum x_i (x_i - x_{i-1}) = S_f(P)$$

$$\Rightarrow I_f(P) \leq \sum \frac{1}{2} (x_i^2 - x_{i-1}^2) \leq S_f(P)$$

$$\Rightarrow = \frac{1}{2} (x_1^2 - x_0^2) + \frac{1}{2} (x_2^2 - x_1^2) + \dots + \frac{1}{2} (x_n^2 - x_{n-1}^2)$$

$$= \frac{1}{2} (b^2 - a^2)$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2} (b^2 - a^2)$$

- $f(x) = x^2$: di nuovo crescente, quindi :

$$\forall P, m_i = x_{i-1}^2, M_i = x_i^2$$

$$\text{Notiamo che } x_{i-1}^2 \leq \frac{1}{3} (x_{i-1}^2 + x_{i-1} \cdot x_i + x_i^2) \leq x_i^2$$

e quindi:

$$x_{i-1}^2 (x_i - x_{i-1}) \leq \underbrace{\frac{1}{3} (x_{i-1}^2 + x_{i-1} \cdot x_i + x_i^2)}_{x_i^3 - x_{i-1}^3} (x_i - x_{i-1}) \leq x_i^2 (x_i - x_{i-1})$$

$$\Rightarrow I_f(P) \leq \sum \frac{1}{3} (x_i^3 - x_{i-1}^3) \leq S_f(P)$$

$$= \frac{1}{3} (b^3 - a^3)$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{3} (b^3 - a^3)$$

Ovviamente questa tecnica diventa sempre più difficile da usare, man mano che le funzioni diventano più complicate.

Un piccolo miglioramento è rappresentato dal fatto seguente:

- scegliamo una partizione iniziale $\{x_i\}$ e punti qualunque $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$
- ovviamente $I_f(P) \leq \sum f(x_i^*) \cdot (x_i - x_{i-1}) \leq S_f(P)$

- aggiungiamo alcuni punti in più: "raffiniamo la (27) partizione": si ottiene nuova disuguaglianza come sopra.

Teo: procedendo per raffinamenti successivi in modo che gli intervalli $\rightarrow 0$, le "somme di Riemann"

$$\sum f(x_i^*) (x_i - x_{i-1})$$

convergono al valore I .

Questo teorema ci permette di calcolare I usando solo certe partizioni (scelte opportunamente).

La tecnica più efficiente è però quella delle "antiderivate" / "primitive", che nasce dall'osservazione seguente.

Data f , costruiamo la funzione

$$F(x) := \int_a^x f(t) dt$$

usiamo nome diverso per non confondere i due ruoli

Teo se ~~f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}~~ $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ è cont.
allora $F: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ è cont. ed è derivabile
su (a,b) , con $F'(x) = f(x)$

Dim, fissiamo $x \in (a,b)$. Vogliamo studiare

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

Sia per esempio $h \geq 0$:

$$F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(t) dt$$

Poniamo $M_h := \max$ valore di f su $[x, x+h]$

$m_h := \min$ valore

$$\Rightarrow m_h \cdot h \leq \int_x^{x+h} f(t) dt \leq M_h \cdot h$$

$$\parallel$$

$$F(x+h) - F(x)$$

$$\Rightarrow m_h \leq \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \leq M_h$$

$$\downarrow h \rightarrow 0$$

$$f(x)$$

$=$

$$\downarrow h \rightarrow 0$$

$$f(x)$$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

$$\parallel$$

$$f(x)$$

Conclusioni:

$$\left\{ \text{tutte le } F: F' \equiv f \right\} = \left\{ \int_a^x f(t) dt + \text{cost.} \right\}$$

Dentro questo insieme, possiamo caratterizzare la funzione

$\int_a^x f(t) dt$ come quella che vale 0 per $x=a$.

Applicazione: spesso è facile trovare una primitiva di f . Per ottenere quella "giusta" (ossia

$\int_a^x f(t) dt$) basta aggiustare la costante.

Esempi:

funzione f primitiva generica

$$\int_a^x f(t) dt$$

$$x \quad \frac{x^2}{2} + c$$

$$\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{2}$$

$$x^2 \quad \frac{x^3}{3} + c$$

$$\frac{x^3}{3} - \frac{a^3}{3}$$

$$x^n \quad (n \in \mathbb{Z}, n \neq -1) \quad \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

$$\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

$$\sin x \quad -\cos x + c$$

$$-\cos x + \cos a$$

$$\cos x \quad \sin x + c$$

$$\sin x - \sin a$$

$$\frac{1}{x} \quad x > 0 \quad \ln x + c$$

$$\ln x - \ln a$$

$$\frac{1}{x} \quad x < 0 \quad \ln(-x) + c$$

$$\ln(-x) - \ln(-a)$$

$$e^x + c$$

$$e^x - e^a$$

Analogamente si studia il caso $h \leq 0$ & si dimostra la continuità in $[a, b]$. $\square$

Quindi:

- vogliamo calcolare $\int_a^b f(t) dt$; più in generale, vogliamo saper valutare $F(x) := \int_a^x f(t) dt \quad \forall x$
- abbiamo ottenuto l'informazione seguente su F :

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x$$
- chiediamoci: quanto è determinante questa proprietà?
 Ossia: quante sono le funzioni F : $F'(x) = f(x) \quad \forall x$

Supponiamo che F_1, F_2 soddisfino: $F_1'(x) = F_2'(x) \quad \forall x$

Allora $(F_1 - F_2)' \equiv 0$ (es: $= f(x)$)

$$\Rightarrow F_1 - F_2 \equiv \text{costante}$$

$$\text{ossia } F_2 = F_1 + \text{costante}$$

Viceversa: se $F_2 = F_1 + \text{costante}$ allora $F_1' \equiv F_2'$.

(29)

Oss. la "primitiva generica" si scrive $\int f dx$
(senza specificare alcun punto a, b)

A volte è chiaro anche come integrare espressioni un po' più complicate

Esempio: $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ $\int f(x) dx = \tan x + c$

In generale, però, quando f è un prodotto/quoziente/composizione la situazione è più complicata e per trovare una primitiva bisogna tenere ben presente le regole (complesse) per la derivata di prodotto/quoziente/composizione.

Vediamo due tecniche:

I) Integrazione per sostituzione:

Si tratta di notare che f è della forma

$$f(x) = (g \circ h(x)) \cdot h'(x)$$

per qualche $g(y)$ e $h(x)$.

In questo caso:

$$\int f(x) dx = (g \circ h)(x) + c$$

Esempio: $f(x) = (x^2-1)^4 \cdot 2x$

$\leadsto g'(y) = y^4, \quad h(x) = x^2-1$

$\Rightarrow \int f(x) dx = \frac{1}{5}(x^2-1)^5 + C$

Esercizi: ~~integrare~~ trovare la primitiva generica delle seguenti funzioni

• $3x^2 \cdot \cos(x^3+2)$

• $\sin x \cdot \cos x$

• $\frac{1}{(3+5x)^2}$

• $x^2 \sqrt{4+x^3}$

• $\lg x$

• $\int x(x-3)^5 dx$

• $\int \frac{t}{(4t^2+9)^2} dt$

• $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}$

Calcolare:

• $\int_0^2 (x^2-1)(x^3-3x+2)^3 dx$

• $\int_{-1}^1 \frac{r}{(1+r^2)^4} dr$

• $\int_0^{12} \cos^3 \pi x \cdot \sin \pi x dx$

• $\int_0^a y \sqrt{a^2-y^2} dy$

Perché si chiama "per sostituzione"?

$$\int (g' \circ h(x)) h'(x) dx = \int g'(y) dy = g(y) + C$$

$y = h(x)$
 $\frac{dy}{dx} = h'(x)$
 $dy = h'(x) dx$

$\parallel$
 $(g \circ h)(x) + C$

Si noti che se x varia tra a e b allora $y = h(x)$ varia tra $h(a)$ e $h(b)$ e dunque (30)

$$\int_a^b (g \circ h(x)) h'(x) dx = \int_{h(a)}^{h(b)} g(y) dy$$

Più in generale:

$$\int_a^b (g \circ h(x)) h'(x) dx = \int_{h(a)}^{h(b)} g(y) dy$$

Anche se non riusciamo a trovare una primitiva generale per g , abbiamo comunque semplificato l'espressione e possiamo ora provare a ~~calcolare~~ proseguire il calcolo usando un metodo diverso (per esempio l'integrazione per parti; vedi sotto).

Esempio:

$$\bullet \int_0^{\sqrt{3}} x^5 \sqrt{x^2+1} dx = ?$$

$$\text{Poniamo } y = x^2+1, \quad dy = 2x \cdot dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^4 (y-1)^2 \sqrt{y} dy$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^4 (y^{5/2} - 2y^{3/2} + y^{1/2}) dy$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{7} y^{7/2} - 2 \frac{2}{5} y^{5/2} + \frac{2}{3} y^{3/2} \right) \Big|_1^4$$

II) Integrazione per parti

Si tratta di notare che f è della forma

$$f(x) = g'(x) \cdot h(x) \quad \text{per qualche } g, h$$

Ricordando che

$$(gh)' = g'h + h g'$$

$$g'h = (gh)' - h g'$$

otteniamo che

$$\begin{aligned} \int g'h \, dx &= \int (gh)' \, dx - \int h g' \, dx \\ &= gh + c - \int h g' \, dx \end{aligned}$$

Abbiamo dunque ricondotto il problema di integrare $g'h$ al problema di integrare $h g'$: la speranza è che questo sia più facile.

Esempio:

$$\begin{aligned} \int x e^x \, dx &= x e^x + c - \int \underset{\substack{\uparrow \\ h}}{1} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ g}}{e^x} \, dx \\ &= x e^x - e^x + c \end{aligned}$$

Possiamo usare questo metodo per calcolare integrali definiti come segue:

$$\int_a^b g' \cdot h \, dx = g \cdot h \Big|_a^b - \int_a^b g h' \, dx$$

Calcolare:

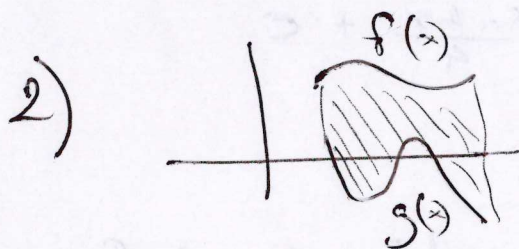
$$\bullet \int_1^{e^2} x \ln \sqrt{x} \, dx$$

$$\bullet \int_0^{\pi/2} x^2 \sin x \, dx$$

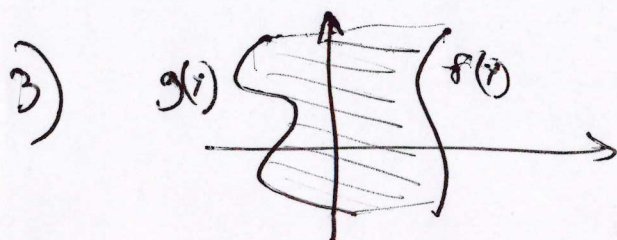
Applicazione al calcolo di Area/Volumi:



$$\text{Area} = \int_a^b f(x) \, dx$$



$$\text{Area} = \int_a^b (f(x) - g(x)) \, dx$$



$$\text{Area} = \int_a^b (f(y) - g(y)) \, dy$$



Area = Somma 3 parti, come sopra

Per sicurezza, controlliamo:

$$\frac{d}{dx} (xe^x - e^x + c) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x - e^x = xe^x \checkmark$$

Oss: In teoria avremmo anche potuto usare

$$\int \underset{\substack{\uparrow \\ g}}{x} \underset{\substack{\uparrow \\ h}}{e^x} dx = \frac{x^2}{2} e^x - \int \underset{\substack{\uparrow \\ g}}{\frac{x^2}{2}} \underset{\substack{\uparrow \\ h}}{e^x} dx + c$$

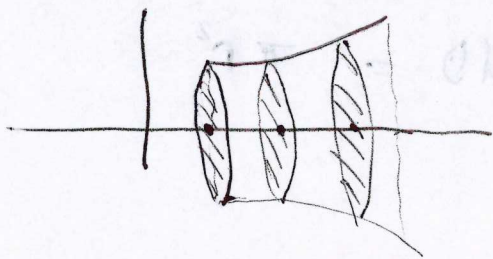
Con questa scelta, però, l'espressione da calcolare è diventata più complicata di prima: bisogna dunque scegliere bene...

$$\begin{aligned} \bullet \int \underset{\substack{\uparrow \\ h}}{x} \underset{\substack{\uparrow \\ g}}{\sin(2x)} dx &= -x \frac{\cos 2x}{2} - \int \underbrace{\frac{-\cos 2x}{2}}_{-\frac{\sin 2x}{4}} dx + c \\ &= -x \cdot \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + c \end{aligned}$$

Esercizi: Trovare la primitiva generale delle seguenti funzioni

- $x \ln x$
- $x^2 e^{-x}$
- $x^5 \cos(x^3)$
- $\ln x$

5)



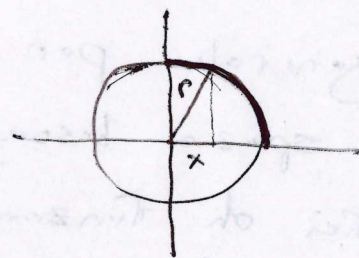
$$\text{Volume} = \int_a^b \pi f^2(x) dx$$

(= somma di Riemann di
dischi sottili: $\pi f^2(x_i) \Delta x$)

etc.

Esempio: Area (disco) = ?

$$1) = 4 \int_0^{r^2} \sqrt{r^2 - x^2} dx$$



$$= 4 \int_{\pi/2}^0 r \sin \theta (-r \sin \theta) d\theta$$

$$x = r \cos \theta$$

$$dx = -r \sin \theta d\theta$$

$$= 4 r^2 \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta d\theta$$

Nota: $\int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta d\theta = \left[-\cos \theta \sin \theta \right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 - \sin^2 \theta} d\theta$

$$\Rightarrow 2 \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta d\theta = \int_0^{\pi/2} 1 d\theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{4}$$

Quindi Area (disco) = πr^2 . Alternativamente,

$$2) =$$



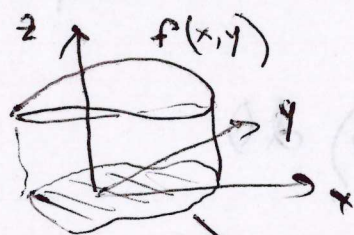
Somma di Riemann di anelli

$$2\pi r_i \cdot \Delta r$$

$$\Rightarrow \pi = \int_0^r 2\pi \rho d\theta = \pi r^2$$

Esempio: Volume (palla) = ?

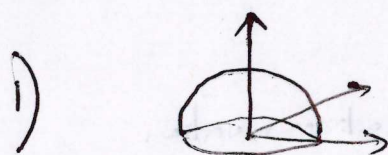
Analogamente al caso di regioni nel piano (esempi 1-4),
 in generale per calcolare il volume di una regione
 nello spazio bisogna tentare di descriverlo mediante
 grafici di funzioni a 2 variabili:



Il volume sottostante il grafico si calcola con un
 "integrale doppio": $\iint_D f(x, y) dx dy$

Come visto nell'esempio 5 sopra, però, a volte
 il volume di regioni particolarmente "simmetriche" può
 essere ricondotto ad un integrale in 1 variabile.

Nel caso della palla:



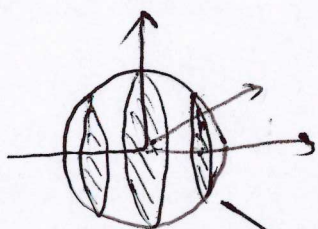
$$f(x, y) = r^2 - x^2 - y^2$$

$$\Rightarrow \text{Vol (palla)} = 2 \iint_{\text{disco}} (r^2 - x^2 - y^2) dx dy = \dots$$

Alternativamente:

(33)

2)



disco solido: volume $\pi (\sqrt{r^2 - x^2})^2 \cdot \Delta x$

Somma di Riemann $\leadsto$

$$\text{Vol (Palla)} = \int_{-r}^r \pi (r^2 - x^2) dx = 2 \int_0^r \pi (r^2 - x^2) dx$$

$$= 2\pi r^2 \cdot r - 2\pi \frac{r^3}{3} = \frac{4}{3} \pi r^3$$

Oss: pensando palla = cipolla, ossia Unione di "gusci sferei", possiamo anche scrivere

$$\text{Vol (Palla)} = \int_0^r \text{Area}(\text{guscio sferico}_{\text{raggio } \rho}) d\rho$$

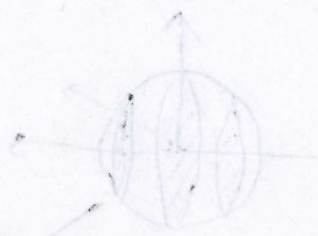
Ricordando la formula per $\text{Area}(\text{guscio sferico}) = 4\pi \rho^2$ otteniamo III modo di calcolare Vol (palla).

Viceversa, conoscendo già il Vol (palla) possiamo ricavare la formula dell'Area (guscio sferico):

$$\begin{aligned} \text{Area}(\text{guscio}) &= \frac{d}{dr} \text{Vol (Palla)} = \frac{d}{dr} \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right) \\ &= 4\pi r^2 \end{aligned}$$

Questo è il modo più semplice per calcolare Area(guscio);
in alternativa dovremmo trovare formula generale per

Calcolare Area (grafico $f(x,y)$) : nel nostro caso,
 $f(x,y) = r^2 - x^2 - y^2$.



Per concludere l'argomento "integrazione", è importante osservare che non tutte le funzioni possono essere integrate con le tecniche viste qui: anche funzioni elementari ($e^{-\frac{x^2}{2}}$, usato in probabilità/stat.)

possono non ammettere primitive elementari, ossia:

la primitiva esiste: $\int_a^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$, ma non è scrivibile in termini di funzioni elem.

In questi casi bisogna tornare alla def. originale di integrale, calcolando il valore dell'integrale per approssimazioni successive.