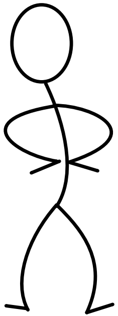
Test del χ^2 (di Pearson)



Test di adattamento (goodness of fit)

Un'urna contiene una grande quantità di biglie rosse, viola e blu.

Vogliamo testare la seguente ipotesi (sulle proporzioni dei tre colori)

H_0: Rosse $= p_1$ Viola $= p_2$ Blu $= p_3$

Estraendo casualmente (con reimbussolamento) otteniamo

Dati osservati: Rosse $= n_1$ Viola $= n_2$ Blu $= n_3$

Test di adattamento (goodness of fit)

Un'urna contiene una grande quantità di biglie rosse, viola e blu.

Vogliamo testare la seguente ipotesi (sulle proporzioni dei tre colori)

H_0: Rosse $= p_1$ Viola $= p_2$ Blu $= p_3$

Estraendo casualmente (con reimbussolamento) otteniamo

Dati osservati: Rosse $= n_1$ Viola $= n_2$ Blu $= n_3$

Teorema (Pearson) Se $X_1, \ldots, X_n$ sono v.a.i. equidistribuite che assumono un numero finito di valori $x_1, \ldots, x_m$. Sia

$$N_k = \#\{i \leq n \ : \ X_i = x_k\} \qquad \text{e} \qquad p_k = P(X_1 = x_k).$$

Allora per n sufficientente grande ($n \cdot p_k > 5$ per ogni k)

$$Q \quad = \quad \sum_{k=1}^{m} \frac{n}{p_i} \Big(\frac{N_k}{n} - p_i \Big)^2 \quad \sim \quad \chi^2_{m-1}$$

Test di adattamento (goodness of fit)

Un'urna contiene una grande quantità di biglie rosse, viola e blu.

Vogliamo testare la seguente ipotesi (sulle proporzioni dei tre colori)

H_0: Rosse $= p_1$ Viola $= p_2$ Blu $= p_3$

Estraendo casualmente (con reimbussolamento) otteniamo

Dati osservati: Rosse $= n_1$ Viola $= n_2$ Blu $= n_3$

Teorema (Pearson) Se $X_1, \ldots, X_n$ sono v.a.i. equidistribuite che assumono un numero finito di valori $x_1, \ldots, x_m$. Sia

$$N_k = \#\{i \leq n \ : \ X_i = x_k\} \qquad \text{e} \qquad p_k = P(X_1 = x_k).$$

Allora per n sufficientente grande ($n \cdot p_k > 5$ per ogni k)

$$Q \quad = \quad \sum_{k=1}^{m} \frac{n}{p_i}\Big(\frac{N_k}{n} - p_i\Big)^2 \quad \sim \quad \chi^2_{m-1}$$

$m = 3$
$n = n_1 + n_2 + n_3$

Test di adattamento

Un'urna contiene una grande quantità di biglie rosse, viola e blu.

Vogliamo testare la seguente ipotesi (sulle proporzioni dei tre colori)

H_0: Rosse $= 0.3$ Viola $= 0.5$ Blu $= 0.2$

Estraendo casualmente (con reimbussolamento) otteniamo

Dati osservati: Rosse $= 34$ Viola $= 55$ Blu $= 11$

Test di adattamento

Un'urna contiene una grande quantità di biglie rosse, viola e blu.

Vogliamo testare la seguente ipotesi (sulle proporzioni dei tre colori)

H_0: Rosse $= 0.3$ Viola $= 0.5$ Blu $= 0.2$

Estraendo casualmente (con reimbussolamento) otteniamo

Dati osservati: Rosse $= 34$ Viola $= 55$ Blu $= 11$

$$Q \;=\; \sum_{k=1}^{3} \frac{100}{p_i}\left(\frac{N_k}{100} - p_i\right)^2 \quad \sim \quad \chi^2_2$$

$n = 34 + 55 + 11 = 100$

Test di adattamento

Un'urna contiene una grande quantità di biglie rosse, viola e blu.

Vogliamo testare la seguente ipotesi (sulle proporzioni dei tre colori)

H_0: Rosse $= 0.3$ Viola $= 0.5$ Blu $= 0.2$

Estraendo casualmente (con reimbussolamento) otteniamo

Dati osservati: Rosse $= 34$ Viola $= 55$ Blu $= 11$

$$Q = \sum_{k=1}^{3} \frac{100}{p_i}\left(\frac{N_k}{100} - p_i\right)^2 \quad \sim \quad \chi^2_2$$

$n = 34 + 55 + 11 = 100$

$$q = \frac{100}{0.3}\left(\frac{34}{100} - 0.3\right)^2 + \frac{100}{0.5}\left(\frac{55}{100} - 0.5\right)^2 + \frac{100}{0.2}\left(\frac{11}{100} - 0.2\right)^2$$

Test di adattamento

Un'urna contiene una grande quantità di biglie rosse, viola e blu.

Vogliamo testare la seguente ipotesi (sulle proporzioni dei tre colori)

H_0: Rosse $= 0.3$ Viola $= 0.5$ Blu $= 0.2$

Estraendo casualmente (con reimbussolamento) otteniamo

Dati osservati: Rosse $= 34$ Viola $= 55$ Blu $= 11$

$n = 34 + 55 + 11 = 100$

$$Q = \sum_{k=1}^{3} \frac{100}{p_i} \left(\frac{N_k}{100} - p_i \right)^2 \sim \chi^2_2$$

$$\begin{aligned} q &= \frac{100}{0.3} \left(\frac{34}{100} - 0.3 \right)^2 + \frac{100}{0.5} \left(\frac{55}{100} - 0.5 \right)^2 + \frac{100}{0.2} \left(\frac{11}{100} - 0.2 \right)^2 \\ &= 5.0833 \end{aligned}$$

Test di adattamento

Un'urna contiene una grande quantità di biglie rosse, viola e blu.

Vogliamo testare la seguente ipotesi (sulle proporzioni dei tre colori)

H_0: Rosse $= 0.3$ Viola $= 0.5$ Blu $= 0.2$

Estraendo casualmente (con reimbussolamento) otteniamo

Dati osservati: Rosse $= 34$ Viola $= 55$ Blu $= 11$

$$Q = \sum_{k=1}^{3} \frac{100}{p_i} \left(\frac{N_k}{100} - p_i \right)^2 \quad \sim \quad \chi^2_2$$

$n = 34 + 55 + 11 = 100$

$$\begin{aligned} q &= \frac{100}{0.3} \left(\frac{34}{100} - 0.3 \right)^2 + \frac{100}{0.5} \left(\frac{55}{100} - 0.5 \right)^2 + \frac{100}{0.2} \left(\frac{11}{100} - 0.2 \right)^2 \\ &= 5.0833 \end{aligned}$$

$$\text{p-valore} = P(Q \geq 5.0833) = 0.07874$$

Test di adattamento

Un'urna contiene una grande quantità di biglie rosse, viola e blu.

Vogliamo testare la seguente ipotesi (sulle proporzioni dei tre colori)

H_0: Rosse $= 0.3$ Viola $= 0.5$ Blu $= 0.2$

Estraendo casualmente (con reimbussolamento) otteniamo

Dati osservati: Rosse $= 34$ Viola $= 55$ Blu $= 11$

$$Q = \sum_{k=1}^{3} \frac{100}{p_i}\left(\frac{N_k}{100} - p_i\right)^2 \sim \chi^2_2$$

$n = 34 + 55 + 11 = 100$

$$\begin{aligned} q &= \frac{100}{0.3}\left(\frac{34}{100} - 0.3\right)^2 + \frac{100}{0.5}\left(\frac{55}{100} - 0.5\right)^2 + \frac{100}{0.2}\left(\frac{11}{100} - 0.2\right)^2 \\ &= 5.0833 \end{aligned}$$

$$\text{p-valore} = P(Q \geq 5.0833) = 0.07874$$

$$1 - \texttt{pchisq}(5.0833, \texttt{df} = 2)$$

Test di adattamento

Un'urna contiene una grande quantità di biglie rosse, viola e blu.

Vogliamo testare la seguente ipotesi (sulle proporzioni dei tre colori)

H_0: Rosse $= 0.3$ Viola $= 0.5$ Blu $= 0.2$

Estraendo casualmente (con reimbussolamento) otteniamo

Dati osservati: Rosse $= 34$ Viola $= 55$ Blu $= 11$

Test di adattamento

Un'urna contiene una grande quantità di biglie rosse, viola e blu.

Vogliamo testare la seguente ipotesi (sulle proporzioni dei tre colori)

H_0: Rosse $= 0.3$ Viola $= 0.5$ Blu $= 0.2$

Estraendo casualmente (con reimbussolamento) otteniamo

Dati osservati: Rosse $= 34$ Viola $= 55$ Blu $= 11$

```
n1 = 34
n2 = 55
n3 = 11
p1 = 0.3
p2 = 0.5
p3 = 0.2
n = n1 + n2 + n3
q = n * ( (n1/n-p1)^2/p1+(n2/n-p2)^2/p2+(n3/n-p3)^2/p3 )
1 - pchisq( q, df=2 )
```

$$Q = \sum_{k=1}^{3} \frac{100}{p_i} \left(\frac{N_k}{100} - p_i \right)^2 \quad \sim \quad \chi^2_2$$

Test di adattamento

Un'urna contiene una grande quantità di biglie rosse, viola e blu.

Vogliamo testare la seguente ipotesi (sulle proporzioni dei tre colori)

H_0: Rosse $= 0.3$ Viola $= 0.5$ Blu $= 0.2$

Estraendo casualmente (con reimbussolamento) otteniamo

Dati osservati: Rosse $= 34$ Viola $= 55$ Blu $= 11$

```
freq = c ( 34, 55, 11 )

prob = c ( 0.3, 0.5, 0.2 )
```

$$Q = \sum_{k=1}^{3} \frac{100}{p_i} \left(\frac{N_k}{100} - p_i \right)^2 \sim \chi^2_2$$

```
n = sum ( freq )

n * sum ( ( freq / n - prob )^2 / prob )

1-pchisq( q, df=2 )
```

Test di adattamento

Un'urna contiene una grande quantità di biglie rosse, viola e blu.

Vogliamo testare la seguente ipotesi (sulle proporzioni dei tre colori)

H_0: Rosse $= 0.3$ Viola $= 0.5$ Blu $= 0.2$

Estraendo casualmente (con reimbussolamento) otteniamo

Dati osservati: Rosse $= 34$ Viola $= 55$ Blu $= 11$

```
freq = c ( 34, 55, 11 )
prob = c ( 0.3, 0.5, 0.2 )
```

$$Q = \sum_{k=1}^{3} \frac{100}{p_i} \left(\frac{N_k}{100} - p_i \right)^2 \sim \chi^2_2$$

```
n = sum ( freq )
n * sum ( ( freq / n - prob )^2 / prob )
1-pchisq( q, df=2 )
```

```
chisq.test( freq, p = prob )
```

Test di adattamento

Un'urna contiene una grande quantità di biglie rosse, viola e blu.

Vogliamo testare la seguente ipotesi (sulle proporzioni dei tre colori)

H_0: Rosse $= 0.3$ Viola $= 0.5$ Blu $= 0.2$

Estraendo casualmente (con reimbussolamento) otteniamo

Dati osservati: Rosse $= 34$ Viola $= 55$ Blu $= 11$

Out[1]:

$$Q = \sum_{k=1}^{3} \frac{100}{p_i} \left(\frac{N_k}{100} - p_i \right)^2 \quad \sim \quad \chi^2_2$$

```
Chi-squared test for given probabilities

data:  freq

X-squared = 5.0833, df = 2, p-value = 0.07874
```

Test di adattamento

Abbiamo un dado con 6 facce e vogliamo testare la seguente ipotesi

H_0: Il dado è equilibrato

Lanciando il dado 200 volte otteniamo le sequenti frequenze

⚀ 31, ⚁ 38, ⚂ 30, ⚃ 36, ⚄ 26, ⚅ 39.

Test di adattamento

Abbiamo un dado con 6 facce e vogliamo testare la seguente ipotesi

H_0: Il dado è equilibrato

Lanciando il dado 200 volte otteniamo le sequenti frequenze

⚀ 31, ⚁ 38, ⚂ 30, ⚃ 36, ⚄ 26, ⚅ 39.

$$Q \quad = \quad \sum_{k=1}^{m} \frac{n}{p_k}\left(\frac{N_k}{n} - p_k\right)^2 \quad = \quad 1200 \cdot \sum_{k=1}^{6}\left(\frac{N_k}{200} - \frac{1}{6}\right)^2 \quad \sim \quad \chi^2_5$$

$$\begin{aligned} q \quad &= \quad 1200 \cdot \Bigg(\left(\frac{31}{200} - \frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{38}{200} - \frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{30}{200} - \frac{1}{6}\right)^2 + \\ &\qquad \left(\frac{33}{200} - \frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{29}{200} - \frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{39}{200} - \frac{1}{6}\right)^2 \Bigg) \\ &= \quad 3.94 \end{aligned}$$

Test di adattamento

$$P(Q \geq 3.94) \quad = \quad \texttt{1 - pchisq(3.94, df=5) = 0.5581}$$

Test di adattamento

$P(Q \geq 3.94) \;=\;$ `1 - pchisq( 3.94, df=5 ) = 0.5581`

Scorciatoria:

```
freq = c( 31, 38, 30, 36, 26, 39 )
chisq.test( freq )
```

```
Out[1]:
Chi-squared test for given probabilities
data: freq
X-squared = 3.94, df = 5, p-value = 0.5581
```

Test di adattamento

Un urna contenente biglie di 4 colori $\{$*rosso*, *blu*, *viola*, *verde*$\}$. Vogliamo testare la seguente ipotesi:

H_0: le proporzioni sono rispettivamente 0.9, 0.09, 0.009, 0.001.

Estraendo 2000 volte una biglia otteniamo le frequenze: 1800, 175, 33, 2

Test di adattamento

Un urna contenente biglie di 4 colori $\{$*rosso*, *blu*, *viola*, *verde*$\}$. Vogliamo testare la seguente ipotesi:

H_0: le proporzioni sono rispettivamente 0.9, 0.09, 0.009, 0.001.

Estraendo 2000 volte una biglia otteniamo le frequenze: 1800, 175, 33, 2

```
freq = c( 1800, 175, 33, 2 )
prob = c( 0.9, 0.09, 0.009, 0.001)
chisq.test( freq, p=prob )
```

Test di adattamento

Un urna contenente biglie di 4 colori $\{$*rosso*, *blu*, *viola*, *verde*$\}$. Vogliamo testare la seguente ipotesi:

H_0: le proporzioni sono rispettivamente 0.9, 0.09, 0.009, 0.001.

Estraendo 2000 volte una biglia otteniamo le frequenze: 1800, 175, 33, 2

```
freq = c( 1800, 175, 33, 2 )
prob = c( 0.9, 0.09, 0.009, 0.001)
chisq.test( freq, p=prob )
```

```
Out[1]:
```

```
Warning message:
In chisq.test(freq, p = prob):  Chi-squared approximation
may be incorrect
```

```
Chi-squared test for given probabilities
data:  freq
X-squared = 12.526, df = 3, p-value = 0.005782
```

Test di adattamento

Un urna contenente biglie di 4 colori $\{$*rosso*, *blu*, *viola*, *verde*$\}$. Vogliamo testare la seguente ipotesi:

H_0: le proporzioni sono rispettivamente 0.9, 0.09, 0.009, 0.001.

Estraendo 2000 volte una biglia otteniamo le frequenze: 1801, 179, 17, 1

Test di adattamento

Un urna contenente biglie di 4 colori $\{$*rosso*, *blu*, *viola*, *verde*$\}$. Vogliamo testare la seguente ipotesi:

H_0: le proporzioni sono rispettivamente 0.9, 0.09, 0.009, 0.001.

Estraendo 2000 volte una biglia otteniamo le frequenze: 1801, 179, 17, 1

```
freq = c( 1803, 175, 33, 1 )
prob = c( 0.9, 0.09, 0.009, 0.001)
chisq.test( freq, p=prob )
```

Test di adattamento

Un urna contenente biglie di 4 colori $\{$*rosso*, *blu*, *viola*, *verde*$\}$. Vogliamo testare la seguente ipotesi:

H_0: le proporzioni sono rispettivamente 0.9, 0.09, 0.009, 0.001.

Estraendo 2000 volte una biglia otteniamo le frequenze: 1801, 179, 17, 1

```
freq = c( 1803, 175, 33, 1 )
prob = c( 0.9, 0.09, 0.009, 0.001)
chisq.test( freq, p=prob )
```

```
Out[1]:

Warning message:
In chisq.test(freq, p = prob):  Chi-squared approximation
may be incorrect

Chi-squared test for given probabilities
data:  freq
X-squared = 12.526, df = 3, p-value = 0.005782
```

Test di adattamento

Un urna contenente biglie di 4 colori $\{$*rosso*, *blu*, *viola*, *verde*$\}$. Vogliamo testare la seguente ipotesi:

H_0: le proporzioni sono rispettivamente 0.9, 0.09, 0.009, 0.001.

Estraendo 2000 volte una biglia otteniamo le frequenze: 1802, 180, 18, 0

Test di adattamento

Un urna contenente biglie di 4 colori $\{$*rosso*, *blu*, *viola*, *verde*$\}$. Vogliamo testare la seguente ipotesi:

H_0: le proporzioni sono rispettivamente 0.9, 0.09, 0.009, 0.001.

Estraendo 2000 volte una biglia otteniamo le frequenze: 1802, 180, 18, 0

```
freq = c( 1802, 180, 18, 0 )
prob = c( 0.9, 0.09, 0.009, 0.001)
chisq.test( freq, p=prob )
```

Test di adattamento

Un urna contenente biglie di 4 colori $\{$*rosso*, *blu*, *viola*, *verde*$\}$. Vogliamo testare la seguente ipotesi:

H_0: le proporzioni sono rispettivamente 0.9, 0.09, 0.009, 0.001.

Estraendo 2000 volte una biglia otteniamo le frequenze: 1802, 180, 18, 0

```
freq = c( 1802, 180, 18, 0 )
prob = c( 0.9, 0.09, 0.009, 0.001)
chisq.test( freq, p=prob )
```

```
Out[1]:

Warning message:
In chisq.test(freq, p = prob):  Chi-squared approximation
may be incorrect

Chi-squared test for given probabilities
data:  freq
X-squared = 2.0022, df = 3, p-value = 0.5719
```

Test di indipendenza

Per controllare l'efficienza di un vaccino un campione viene diviso in due gruppi. Al primo viene somministrato il vaccino al secondo un placebo. Vengono recensite quante persone si ammalano e con che gravità.

	Sani	Malati l.	Malati g.
Vaccinati	200688	24	33
Non vaccinati	201087	27	65

Test di indipendenza

Per controllare l'efficienza di un vaccino un campione viene diviso in due gruppi. Al primo viene somministrato il vaccino al secondo un placebo. Vengono recensite quante persone si ammalano e con che gravità.

	Sani	Malati l.	Malati g.
Vaccinati	200688	24	33
Non vaccinati	201087	27	65

Condideriamo due variabili aleatorie

X ha valori $\{$ vaccinato, non vaccinato $\}$

Y ha valori $\{$ sano, malato lieve, malato grave $\}$

Come ipotesi nulla prendiamo H_0: X e Y indipendenti.

Test di indipendenza

Consideriamo due campioni:

$X_1, \ldots, X_n$ ha valori $\left\{x_1, \ldots, x_{m_X}\right\}$

$Y_1, \ldots, Y_n$ ha valori $\left\{y_1, \ldots, y_{m_Y}\right\}$

Test di indipendenza

Consideriamo due campioni:

$X_1, \ldots, X_n$ ha valori $\{x_1, \ldots, x_{m_X}\}$

$Y_1, \ldots, Y_n$ ha valori $\{y_1, \ldots, y_{m_Y}\}$

$N_h^X = \#\{i \le n \ : \ X_i = x_h\}$ $\qquad P(X = x_h) \sim N_h^X / n$

$N_k^Y = \#\{j \le n \ : \ Y_j = y_k\}$ $\qquad P(Y = y_k) \sim N_k^Y / n$

$N_{h,k} = \#\{(i,j) \ : \ (X_i, Y_j) = (x_h, y_k)\}.$ $\qquad P(X, Y = x_h, y_k) \sim N_{h,k} / n$

Test di indipendenza

Consideriamo due campioni:

$X_1, \dots, X_n$ ha valori $\{x_1, \dots, x_{m_X}\}$

$Y_1, \dots, Y_n$ ha valori $\{y_1, \dots, y_{m_Y}\}$

$N_h^X \ = \#\{i \le n \ : \ X_i = x_h\}$ $\qquad P(X = x_h) \ \sim \ N_h^X \,/\, n$

$N_k^Y \ = \#\{j \le n \ : \ Y_j = y_k\}$ $\qquad P(Y = y_k) \ \sim \ N_k^Y \,/\, n$

$N_{h,k} = \#\{(i,j) \ : \ (X_i, Y_j) = (x_h, y_k)\}.$ $\qquad P(X, Y = x_h, y_k) \ \sim \ N_{h,k}/\, n$

Allora (per n sufficientente grande)

$$Q \quad = \quad \sum_{h=1}^{m_X} \sum_{k=1}^{m_Y} \frac{n^2}{N_{h,k}} \Big(\frac{N_{h,k}}{n} - \frac{N_h^X}{n} \frac{N_k^Y}{n} \Big)^2 \quad \sim \quad \chi^2_{(m_X - 1)(m_Y - 1)}$$

Test di indipendenza

Consideriamo due campioni:

$X_1, \ldots, X_n$ ha valori $\{x_1, \ldots, x_{m_X}\}$

$Y_1, \ldots, Y_n$ ha valori $\{y_1, \ldots, y_{m_Y}\}$

$N_h^X = \#\{i \leq n \ : \ X_i = x_h\}$ $\qquad P(X = x_h) \sim N_h^X / n$

$N_k^Y = \#\{j \leq n \ : \ Y_j = y_k\}$ $\qquad P(Y = y_k) \sim N_k^Y / n$

$N_{h,k} = \#\{(i,j) \ : \ (X_i, Y_j) = (x_h, y_k)\}.$ $\qquad P(X, Y = x_h, y_k) \sim N_{h,k}/ n$

Allora (per n sufficientente grande)

$$
\begin{aligned}
Q &= \sum_{h=1}^{m_X} \sum_{k=1}^{m_Y} \frac{n^2}{N_{h,k}} \Big(\frac{N_{h,k}}{n} - \frac{N_h^X}{n} \frac{N_k^Y}{n} \Big)^2 \quad \sim \quad \chi^2_{(m_X - 1)(m_Y - 1)} \\
&= \sum_{h=1}^{m_X} \sum_{k=1}^{m_Y} \frac{\big(n N_{h,k} - N_h^X N_k^Y \big)^2}{n N_{h,k}}
\end{aligned}
$$

Test di indipendenza

Consideriamo due campioni:

$X_1, \ldots, X_n$ ha valori $\{x_1, x_2\}$

$Y_1, \ldots, Y_n$ ha valori $\{y_1, y_2, y_3\}$

$N_h^X = \#\{i \leq n \; : \; X_i = x_h\}$

$N_k^Y = \#\{j \leq n \; : \; Y_j = y_k\}$

$N_{h,k} = \#\{(i,j) \; : \; (X_i, Y_j) = (x_h, y_k)\}$

$$Q = \sum_{h=1}^{2}\sum_{k=1}^{3} \frac{\left(n\, N_{h,k} - N_h^X \cdot N_k^Y\right)^2}{N_{h,k}}$$

$$q = \sum_{h=1}^{2}\sum_{k=1}^{3} \frac{\left(n \cdot n_{h,k} - n_h^X \cdot n_k^Y\right)^2}{n \cdot n_{h,k}}$$

	$y_1 =$ Sani	$y_2 =$ M$^-$	$y_3 =$ M$^+$	Totale
$x_1 =$ Vacc.	$n_{1,1} = 200688$	$n_{1,2} = 24$	$n_{1,3} = 33$	$n_1^X = 200745$
$x_2 =$ NonV.	$n_{2,1} = 201087$	$n_{2,2} = 27$	$n_{2,3} = 65$	$n_2^X = 201179$
Totale	$n_1^Y = 401775$	$n_2^Y = 51$	$n_3^Y = 98$	$n = 401974$

Test di indipendenza

```
vacc = c( 200688, 24, 33 ) # vaccinati
nonv = c( 201087, 27, 65 ) # non vaccinati
cont = rbind( vacc, nonv ) # tabella di contingenza
chisq.test( cont )
```

```
Out[1]:
Pearson's Chi-squared test
data:  cont
X-squared = 10.553, df = 2, p-value = 0.00511
```

	y_1 = Sani	$y_2 = \mathrm{M}^-$	$y_3 = \mathrm{M}^+$	Totale
x_1 = Vacc.	$n_{1,1} = 200688$	$n_{1,2} = 24$	$n_{1,3} = 33$	$n^X_1 = 200745$
x_2 = NonV.	$n_{2,1} = 201087$	$n_{2,2} = 27$	$n_{2,3} = 65$	$n^X_2 = 201179$
Totale	$n^Y_1 = 401775$	$n^(Y_2 = 51$	$n^Y_3 = 98$	$n = 401974$

Test di indipendenza

```
S  = c( 200688, 201087 )  # sani
M1 = c( 24, 27 )          # malati lievemente
M2 = c( 33, 65 )          # malati gravemente
cont = cbind( S, M1, M2 ) # tabella di contingenza
chisq.test( cont )

Out[1]:
Pearson's Chi-squared test
data:  cont
X-squared = 10.553, df = 2, p-value = 0.00511
```

	$y_1 =$ Sani	$y_2 = \mathrm{M}^-$	$y_3 = \mathrm{M}^+$	Totale
$x_1 =$ Vacc.	$n_{1,1} = 200688$	$n_{1,2} = 24$	$n_{1,3} = 33$	$n_1^X = 200745$
$x_2 =$ NonV.	$n_{2,1} = 201087$	$n_{2,2} = 27$	$n_{2,3} = 65$	$n_2^X = 201179$
Totale	$n_1^Y = 401775$	$n^(Y_2 = 51$	$n_3^Y = 98$	$n = 401974$