

Equazioni Differenziali

(34)

Possiamo suddividere gli eventi del mondo naturale in due grandi categorie. Compito della matematica è fornire gli strumenti per studiarle entrambi.

Processi casuali: teoria della probabilità
Processi deterministici: teoria delle eq. diff.

Nel primo caso non possiamo predire con certezza ciò che accadrà / come evolverà il sistema: solo calcolare cos'è +/- probabile.

Nel secondo caso l'evoluzione del sistema è perfettamente prevedibile.

Esempi:

1) lascio cadere un sasso / sparo un razzo: moto governato dalle leggi della natura (forza di gravità), possiamo predire il moto con esattezza a partire dalle condizioni iniziali (posizione/velocità)

2) lancio un dado: in teoria anche questo sarebbe governato dalla forza di gravità ($\Rightarrow$ prevedibile), ma le influenze esterne (mano, vento, sup. tavolo) giocano un ruolo così grande che in pratica l'esito finale è puramente casuale.

Vediamo esempi del primo tipo più in dettaglio:

- Auto su strada: posizione $x = x(t)$
Supponiamo di conoscere la velocità $v(t)$, e.g.

$$\dot{x} \equiv 100 \quad (\text{km/h})$$

Q $x(t) = ?$

Sostanzialmente abbiamo già studiato questo problema:

$$\{x \text{ aventi stessa derivata}\}$$

Contiene unica funzione a meno di costante:

$$= \int 100 \, dt = 100t + C$$

Se conosciamo anche la posizione iniziale:

$$x(0) = x_0$$

allora sostituendo troviamo $x_0 = 100 \cdot 0 + C$

ossia troviamo il valore corrispondente di C

Conclusione: l'equazione

$$\begin{cases} \dot{x} = 100 \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad \text{ha ! soluzione } x(t) = 100t + x_0$$

- Sasso: altezza dal suolo $h = h(t)$

Ricordando che la gravità imprime un'accelerazione

di $9,8 \, \text{m/s}^2$, troviamo che il moto del sasso è

descritto dall'equazione

$$\ddot{h}(t) = -9,8$$

Come prima, questo ~~segno~~ implica:

$$\dot{h}(t) = \int -9,8 dt = -9,8 t + C_1$$

$$h(t) = \int (-9,8 t + C_1) dt = -9,8 \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2$$

Abbiamo dunque trovato la "soluzione generale" tramite doppia integrazione; dipende da 2 costanti. Possiamo determinare le costanti tenendo conto, come prima, della posizione iniziale:

$$h_0 = h(0) = -9,8 \frac{0^2}{2} + C_1 \cdot 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = h_0$$

e della velocità iniziale:

$$v_0 = \dot{h}(0) = -9,8 \cdot 0 + C_1 \Rightarrow C_1 = v_0$$

Conclusione: l'equazione

$$\begin{cases} \ddot{h}(t) = -9,8 \\ h(0) = h_0, \quad \dot{h}(0) = v_0 \end{cases} \quad \text{ha ! sol. } h(t) = -9,8 \frac{t^2}{2} + v_0 t + h_0$$

Fin qui stiamo sfruttando quanto imparato dalla teoria dell'integrazione per risolvere equazioni differenziali.

In generale però la situazione è più difficile perché

l'equazione è della forma

$$y'(t) = \underline{\hspace{2cm}}$$

dipende da t & da $y(t)$

↑
Sconosciuto

oppure

$$y''(t) = \underline{\hspace{2cm}}$$

dipende da t , $y(t)$, $\dot{y}(t)$

↑
↑
Sconosciuti

In altre parole, la variazione di y dipende da y stesso: meccanismo di "reazione istantanea" ("feedback")

In questi casi non possiamo immediatamente integrare l'espressione sul lato dx per ottenere la primitiva generale, perché tale espressione contiene quantità ignote: dobbiamo in qualche modo prima manipolare l'equazione, in modo da renderla adatta all'integrazione.

Facciamo ancora qualche esempio per vedere questo "feedback" in azione!

- Dinamica delle popolazioni secondo Malthus:

$$P = P(t) \quad \# \text{ persone / batteri}$$

Variazione (= nascite/morti) proporzionale alla pop:

$$\dot{P} = k P \quad \text{~~(eg. } k = \frac{1}{10} \text{)}~~$$

Q: Qual è la soluzione?

È chiaro che non è possibile ricorrere ad una semplice integrazione del lato dx. Però in realtà non serve perché sappiamo già la risposta:

$P(t) = e^{kt}$ ha esattamente la proprietà richiesta.

Più in generale: $P(t) = A e^{kt}$

Al solito possiamo determinare A tramite la condizione iniziale: $P(0) = A e^{k \cdot 0} = A \cdot 1 = A$

→ crescita esponenziale

- Interessi (eg su una carta di credito)

Supponiamo che la banca ponga un tasso di interesse dello 0,07 (7%) annuo.

Se lo calcolasse solo a fine anno, il debito $\$(0)$

diventerebbe $\$(1) = \$(0) + 0,07 \cdot \$(0)$

~~Il~~ Se gli interessi fossero calcolati solo sul debito iniziale, il II anno ci sarebbe un secondo salto uguale al primo:

$$\$(2) = \$(0) + 2 \cdot 0,07 \cdot \$(0)$$

In realtà l'interesse è di solito "composto", ossia viene calcolato sul nuovo debito:

$$\$(2) = \$(0) + 0,07 \cdot \$(0) + 0,07 \left(\$(0) + 0,07 \cdot \$(0) \right)$$

e quindi cresce più rapidamente.

Però ~~ma~~: di solito la banca non aspetta un anno prima di applicare gli interessi, ne aspetta 6 mesi — li ricalcola invece istantaneamente, $\forall t$:

$$\$(t) = 0,07 \cdot \$(t)$$

$\rightarrow \$(t)$ cresce esponenzialmente

- È chiaro che una popolazione non può crescere esponenzialmente: interverranno fattori esterni (mancanza di cibo/malattie). Il modello di Malthus non descrive dunque accuratamente la realtà.

Modello di Verhulst: $\dot{P} = K P (M - P)$ "equazione logistica"

Costanti da determinare sperimentalmente

Questa eq. è molto più affidabile (ma anche più 37)
difficile da risolvere: vedere più avanti).

Al solito, prima di perdere tempo, conviene chiedersi
se la soluzione di un'eq. diff. esiste davvero
(come già fatto per le eq. standard & per i
problemi di max e min.). La teoria generale
dimostra che, in effetti, tipicamente la soluzione
esiste (almeno per un tempo limitato) ~~perché~~ ^{e che}
dipende da alcune costanti. Il numero di queste
costanti dipende dall'ordine dell'equazione:

$\dot{y} = \dots$ I ordine: 1 costante (che si può det.
tramite 1 Cond. iniziale)

$\ddot{y} = \dots$ II ordine: 2 costanti (che si possono
det. tramite 2
Condiz. iniziali)

etc.

Non esiste però un'unica tecnica per risolvere tutte
le eq. diff. Tra l'altro, non si può sempre scrivere
la soluzione in forma esplicita. Molto spesso
bisogna accontentarsi di approssimazioni numeriche.

Prima di affrontare tecniche specifiche per risolvere/risolvere equazioni diff., vediamo un ultimo esempio per esplorare ancora le potenzialità di questo tipo di equazione.

Problema: Una fabbrica di prodotti chimici ha una cisterna per raccogliere liquami tossici, prima di smaltirli. Inizialmente la cisterna contiene 360 litri di acqua in cui sono mescolati 2 kg/litro di sostanze tossiche. ~~Inizialmente~~ Ogni ora entrano 80 litri/ora di acqua contenente 3 kg/litro di sostanze tossiche, mentre ne escono 40 litri/ora.

Determinare:

- i) $L(t)$ = litri di liquame nella cisterna
- ii) $T(t)$ = chili di sostanze tossiche nella cisterna

Soluzione:

- i) variazione di $L \leftrightarrow$ liquame in ingresso / uscita

$$L'(t) = 80 - 40 = 40$$

$$\Rightarrow L(t) = 40t + L(0) = 40t + 360$$

- ii) variazione di $T \leftrightarrow$ sostanze tossiche in ingresso / uscita

$$\textcircled{\otimes} T'(t) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{kg/litro} \\ \text{in entrata}}}{3 \cdot 80} - \frac{T(t)}{P(t)} \cdot 40 = 240 - \frac{T(t)}{40t + 360} \cdot 40$$

$$= 60 - \frac{T(t)}{t + 9}$$

$\nwarrow$ kg/litro
 in uscita

Impareremo a risolvere questa equazione più avanti. (38)

Esercizi

1) Controllare se/quanti delle seguenti funzioni soddisfano le corrispondenti eq. diff.

- $2y' - y = 0$ $y_1(x) = e^{x/2}$ $y_2(x) = x^2 + 2e^{x/2}$
- $y' + xy = x$ $y_1(x) = e^{-x^2/2}$ $y_2(x) = 1 + Ce^{-x^2/2}$
- $y' + y = y^2$ $y_1(x) = \frac{1}{e^x + 1}$ $y_2(x) = \frac{1}{Ce^x + 1}$
- $y'' + 4y = 0$ $y_1(x) = 2 \sin 2x$ $y_2(x) = 2 \cos x$
- $y'' - 2y' - 3y = 7e^{3x}$ $y_1(x) = e^{-x} + 2e^{3x}$ $y_2(x) = \frac{7}{4}xe^{3x}$

2) Controllare che le seguenti funzioni soddisfano, le corrispondenti eq. diff. e trovare il valore delle costanti per soddisfare le cond. iniziali.

- $y' = 5y$ ~~$y(0) = 2$~~ $y(0) = 2$: $y = Ce^{5x}$
- $xy' + y = x^2$, $y(3) = 2$: $y = \frac{x^2}{3} + \frac{C}{x}$
- $y' + y = y^2$, $y(1) = -1$: $y = \frac{1}{Ce^x + 1}$
- $y' = \frac{y-x}{x}$, $y(2) = 4$: $y = x \ln \frac{C}{x}$
- $2x^2 y'' - xy' + y = 0$, $y(4) = 1$, $y'(4) = -2$: $y = C_1 x + C_2 \sqrt{x}$
- $y''' - 3y'' + 2y' = x + e^x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -\frac{1}{4}$, $y''(0) = -\frac{3}{2}$:
 $y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{2x} + \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x - x e^x$

Tecniche risolutive:

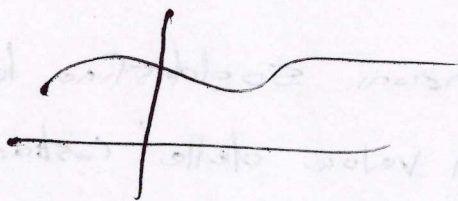
A) Studio qualitativo (nessuna sol. approx.)

1) $y'(x) = \sin^2 x$ (in generale: $y'(x) = f(x)$)
↑
dipende solo da x

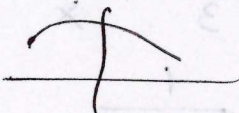
Potremmo risolverla subito tramite una integrazione!

$$y(x) = \int \sin^2 x \, dx$$

ma prima di farlo vediamo cosa possiamo capire sulla funzione soluzione $y(x)$



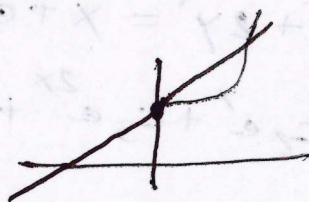
• $\sin^2 x \geq 0 \quad \forall x \Rightarrow y(x) \text{ crescente}$
 $x \text{ punto critico} \Leftrightarrow x = k\pi$

quindi  no!

• $\sin^2 x \leq 1 \quad \forall x \Rightarrow y'(x) \leq 1 \xRightarrow{\text{se } x \geq 0} \int_0^x y'(t) \, dt \leq \int_0^x 1 \, dt$
 $\Rightarrow y(x) - y(0) \leq x$

Se conosciamo cond. iniziale ~~o altra~~ $y(0) = y_0$, allora
otteniamo $y(x) \leq x + y_0$

$$\forall x \geq 0$$



no!

Se invece $x \leq 0$ allora:

39

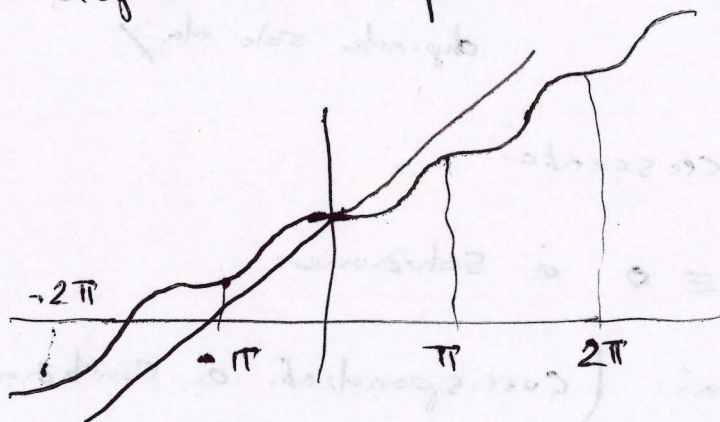
$$\int_x^0 y'(x) dx \leq \int_x^0 1 dx$$

$$-\int_0^x y'(x) dx \leq -\int_0^x 1 dx$$

$$\int_0^x y'(x) dx \geq \int_0^x 1 dx$$

$$\text{ossia } y(x) \geq x + y_0 \quad \forall x \leq 0$$

Ci aspettiamo dunque una soluzione del tipo:



Proviamo ora a risolvere l'eq. esattamente:

$$\int \sin^2 x dx = \int \underset{\substack{\uparrow \\ f'}}{\sin x} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ g}}{\sin x} dx$$

$$= -\cos x \cdot \sin x + \int \cos^2 x dx$$

$$= -\cos x \cdot \sin x + \int (1 - \sin^2 x) dx$$

$$= -\cos x \cdot \sin x + x - \int \sin^2 x dx + C$$

$$\Rightarrow \int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2} (x - \cos x \cdot \sin x) + C$$

La soluzione cercata è dunque

$$y(x) = \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \cos x \cdot \sin x + y_0$$

che graficamente = piccole oscillazioni attorno alla retta $\frac{1}{2} x + y_0$

come previsto.

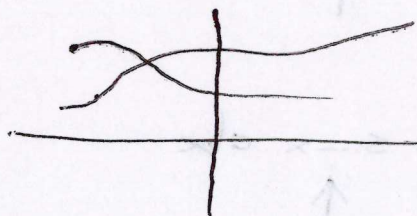
$$2) \, y'(x) = y^2 \quad \left(\text{in gen: } y' = f(y) \right)$$

↑
dipende solo da y

• $y^2 \geq 0 \Rightarrow y(x)$ crescente

• notiamo che $y(x) \equiv 0$ è soluzione.

Nota: se 2 soluzioni (corrispondenti a condizioni iniziali diverse) si intersecano



allora per unicità (teorema generale) devono

coincidere. Quindi la soluzione $y(x) \equiv 0$ è una

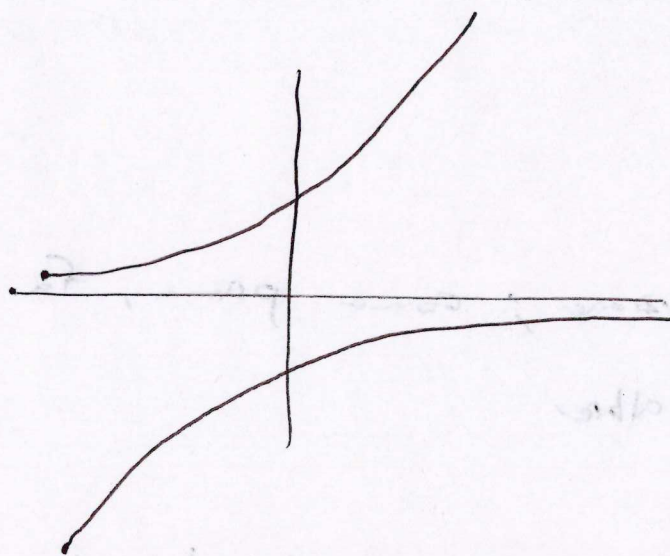
"barriera": nessun'altra soluzione la può intersecare.

$$\bullet y'' = 2y \cdot y' = 2y^3$$

40

$\Rightarrow y$ concava se positiva
convessa se negativa.

Ci aspettiamo dunque soluzioni del tipo:



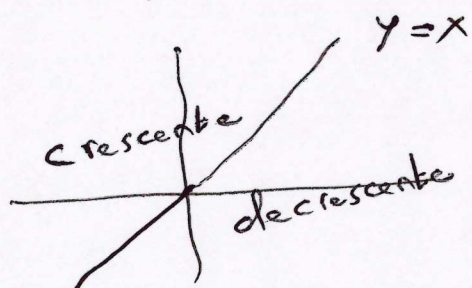
Esercizio: scrivere in modo analogo l'equazione logistica

$$y'(x) = y(10 - y)$$

3) $y' = y - x$ (in gen: $y' = f(x, y)$)

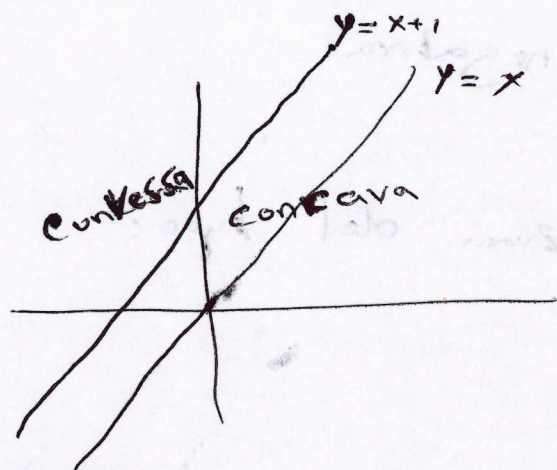
↑
dipende sia da x sia da y ,
è il caso più generale

• se $y > x$, è crescente; se $y < x$, è decrescente



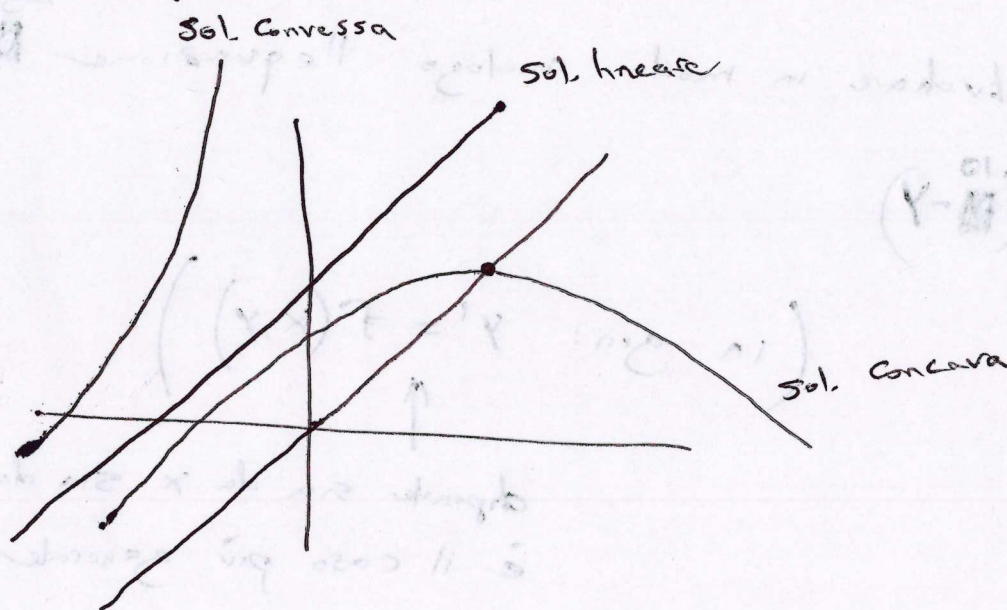
$$\bullet y'' = y' - 1 = y - x - 1$$

$\Rightarrow$ se $y > x+1$ è concava, se $y < x+1$ è convessa



$\bullet y \equiv x+1$ è soluzione; come prima, fa da barriera per le altre

Ci aspettiamo dunque soluzioni del tipo:



B) Soluzioni precise

41

Affronteremo solo alcune categorie di equazioni, particolarmente semplici

- I ordine del tipo
$$\begin{cases} y'(x) = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Come già detto, basta integrare una volta e "aggiustare la costante" per soddisfare la condizione iniziale:

$$y(x) = \int f(x) dx \quad (\text{soluzione generale})$$

$$\hookrightarrow y(x) = \int_{x_0}^x f(x) dx + y_0 \quad (\text{soddisfa cond. iniziale})$$

- I ordine di tipo "lineare"
$$\begin{cases} y'(x) + a(x)y(x) = b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Sia $A(x)$ una qualunque primitiva di $a(x)$: $A'(x) = a(x)$

Allora:

$$\underbrace{e^{A(x)} y' + e^{A(x)} a(x) y(x)}_{\left(e^{A(x)} y(x) \right)'} = e^{A(x)} b(x)$$

Possiamo ora integrare come sopra:

$$e^{A(x)} y(x) = \int_{x_0}^x e^{A(x)} b(x) dx + e^{A(x_0)} y_0$$

$$\Rightarrow y(x) = e^{-A(x)} \cdot \int_{x_0}^x e^{A(x)} b(x) dx + y_0$$

Esercizio: Usare questa tecnica per risolvere il problema di dinamica delle pop. secondo Malthus, e il problema dei liquami tossici.

• I ordine del tipo: "variabili separabili"

$$\begin{cases} y'(x) = f(x) \cdot g(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$$\frac{y'(x)}{g(y)} = f(x) \Rightarrow \int \frac{y'(x)}{g(y)} dx = \int f(x) dx$$

Cambio di variabili:

~~$$\ln|g(y(x))| = \int f(x) dx + C = \int \frac{1}{g(y)} dy$$~~

Se riusciamo a risolvere questo integrale, otteniamo

$$G(y) = \int f(x) dx + C$$

Se riusciamo a "invertire" $\frac{G}{G'}$, otteniamo $y = G^{-1}(f(x) + C)$

A questo punto tentiamo di "invertire" G in modo da ottenere espressioni espresse per $y(x)$.

Esempio: Risolviamo l'equazione logistica

(42)

$$\begin{cases} \dot{y} = K y (M-y) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad \text{ossia } f(x) = K, g(y) = M y (M-y)$$

$$\int \frac{\dot{y}}{y(M-y)} dx = \int K dx = Kx + C$$

$$\frac{\dot{y}}{M} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{M-y} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{M} (\ln |y| - \ln |M-y|) = Kx + C$$

$$\Rightarrow \ln \left| \frac{y}{M-y} \right| = MKx + MC$$

$$\Rightarrow \frac{y}{M-y} = A e^{MKx} \quad \left(A = \pm e^{MC} \right)$$

$$\Rightarrow -1 + \frac{M}{M-y} = A e^{MKx}$$

$$\Rightarrow \frac{M}{M-y} = A e^{MKx} + 1$$

$$\Rightarrow M-y = \frac{M}{1+Ae^{MKx}}$$

$$\Rightarrow y = M - \frac{M}{1+Ae^{MKx}} = \frac{MAe^{MKx}}{1+Ae^{MKx}} = \frac{M}{\frac{1}{A}e^{-MKx} + 1} = \frac{MA}{A + e^{-MKx}}$$

dove $A \in \mathbb{R}$; ~~che~~ ^{lo} possiamo determinare imponendo $y(0) = y_0$

Esempio , $yy' = -x$

$$f(x) = -x, \quad g(y) = \frac{1}{y}$$

$$\int yy' dx = -\int x$$

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 2C$$

ossia il grafico delle soluzioni $y(x)$
(al variare delle condizioni iniziali)
è contenuto in una circonferenza.

↓
"curva integrale"

Possiamo esprimere: $y(x) = \pm \sqrt{2C - x^2}$

• II ordine del tipo: lineare, omogeneo, coeff. costanti

$$y'' + ay' + by = 0 \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

Si consideri il polinomio $r^2 + ar + b$ e le sue radici:

i) Se si scompone come $(r-r_1)(r-r_2)$ ossia se ha 2 radici reali distinte, allora la soluzione generale è della forma $Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$

ii) Se si scompone come $(r-r_1)^2$ ossia ha 1 radice reale, allora la soluzione generale è della forma $Ae^{r_1 x} + Bxe^{r_1 x}$

iii) Se ha solo radici complesse, ossia il discriminante $a^2 - 4b < 0$, allora la soluzione generale è della forma

$$A e^{-\frac{a}{2}x} \cos\left(\sqrt{b - \left(\frac{a}{2}\right)^2} \cdot x\right) + B e^{-\frac{a}{2}x} \sin\left(\sqrt{b - \left(\frac{a}{2}\right)^2} \cdot x\right)$$

Esercizio: Trovare la soluzione generale
delle seguenti eq. differenziali:

43

$$y' - 2y = 1$$

$$xy' - 2y = -x$$

$$y'' = \cos x - \sin x$$

$$y' = y \sin(2x+3)$$

$$y' = (x^2+1)(y^2+y)$$

$$y'' + 2y' - 15y = 0$$

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

$$y'' + y' + 3y = 0$$

$$y'' + k^2 y = 0$$

(23)

Exercise: Transform the following differential equation into a system of first order equations.

$$y'' - 2y' = 1$$

$$x' - 2y' = x$$

$$y'' - x \cos x = y$$

$$(x+1)y' = y$$

$$(y+y')(1+y) = y$$

$$0 = y(1-y) + y'$$

$$0 = y'' + y' + y$$

$$0 = y'' + y' + y$$

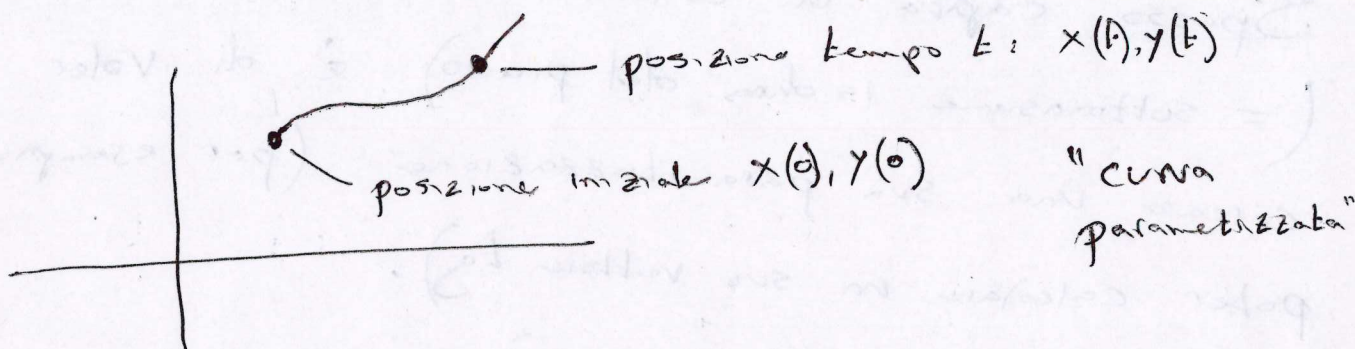
$$y'' + y' + y = 0$$

Analisi in più variabili

44

A) funzioni $(a,b) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ossia codominio ha più variabili

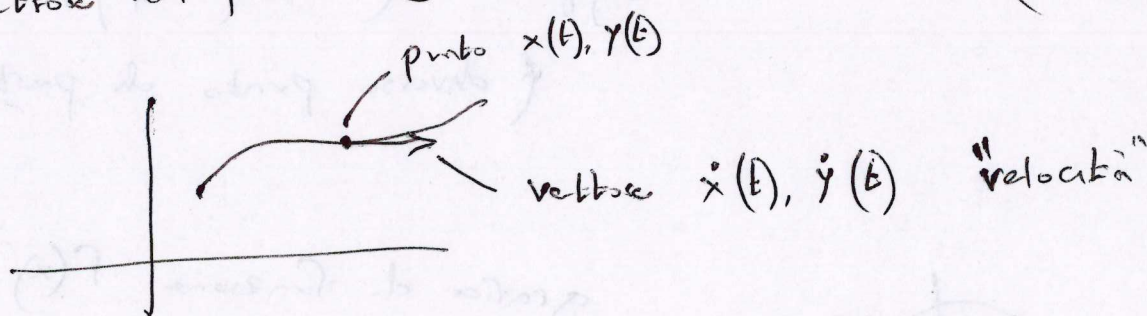
Esempio: $t \longmapsto (x(t), y(t))$ coordinate di un moto nel piano



Si noti che l'immagine di una curva parametrizzata è una curva in senso str. sottospazio 1-dim. $\subseteq \mathbb{R}^2$.

Def. Una curva parametrizzata $(x(t), y(t))$ è cont./der. $\Leftrightarrow$ le due funzioni $x(t), y(t)$ lo sono entrambi

In tal caso, per ogni t , il vettore $(\dot{x}(t), \dot{y}(t)) \in \mathbb{R}^2$ è un vettore nel piano tg. alla curva nel punto $(x(t), y(t))$:



Esercizio: Calcolare i vettori di velocità delle curve

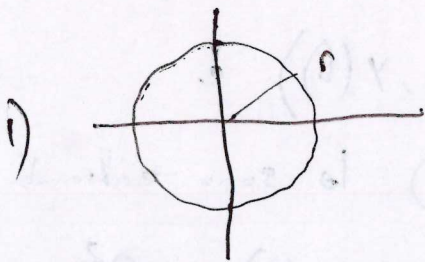
• $(x(t), y(t)) = (\sin t^2, 1+t^3)$

• $(x(t), y(t)) = \left(\frac{1}{t+1}, (\sin t)^2\right)$

Spesso capita di cominciare con una "curva std"
(= sottinsieme 1-dim del piano) e di voler
cercare una sua parametrizzazione (per esempio, per
poter calcolare un suo vettore t_0).

Tale parametrizzazione non è unica

Esempio:



→ $(x(t), y(t)) = (r \cos t, r \sin t)$

ma anche $(r \cos(2t), r \sin(2t))$

"doppia velocità"

oppure $(r \cos(t - \frac{\pi}{4}), r \sin(t - \frac{\pi}{4}))$

(diverso punto di partenza)

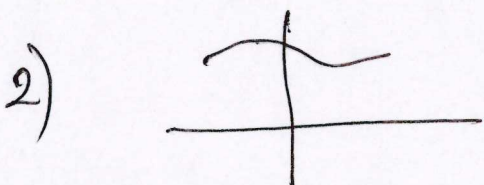
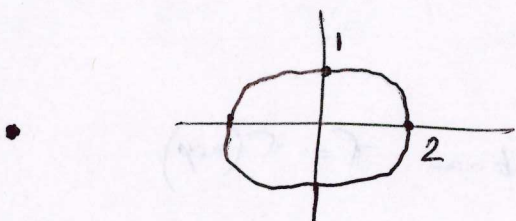
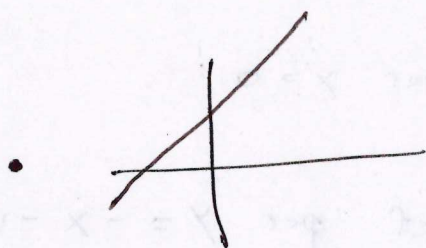
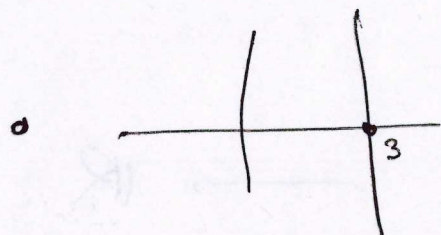
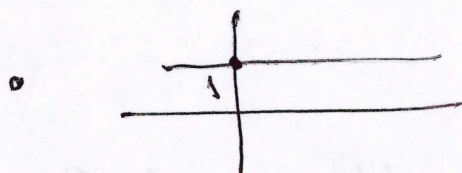


grafico di funzione $f(x)$

→ $(x(t), y(t)) = (t, f(t))$

Esercizio : parametrizzare le seguenti curve:

45



B) funzioni $f = f(x, y) : \text{dominio} \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

Esempi:

• $f(x, y) = x + y$

• $f(x, y) = x^2 + y^2$

• $f(x, y) = x^2 - y^2$

• $PV = nRT \Rightarrow P = P(V, T) = nR \frac{T}{V}$

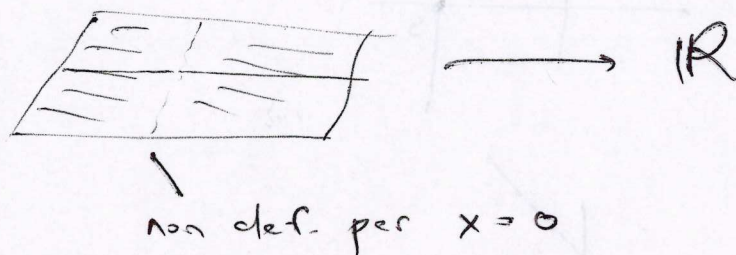
Sissicamente, ogni variabile corrisponde ad un parametro (che può appunto variare)

Possiamo anche cambiare nome alle variabili, ottenendo

$$P = P(x, y) = c \cdot \frac{y}{x}$$

Come al solito, può essere che il dominio di f non sia tutto $\mathbb{R}^2$,

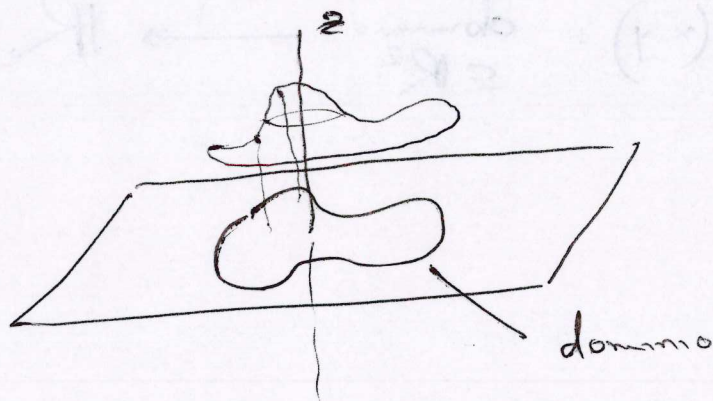
• $f(x, y) = \frac{y}{x}$:



• $f(x, y) = \frac{\sin(x+y^2)}{x+y+1}$

non def. per $y = -x - 1$

Come al solito, è utile rappresentare $f = f(x, y)$ graficamente:



la figura è allora una superficie nello spazio

Usando ~~le~~ idee simili al caso di una variabile, possiamo definire la nozione di f continua

ma il grafico è una "superficie senza strappi"

Problema: come disegnare il grafico?

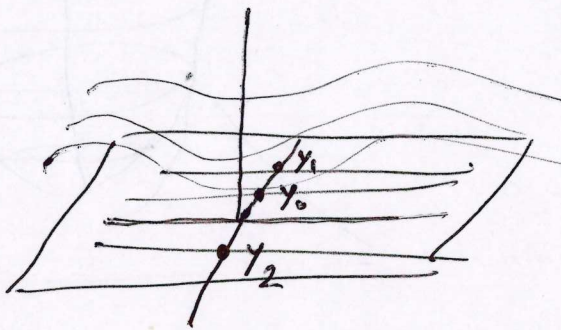
46

2 metodi utili:

1) fisso y e faccio variare solo x :

$x \mapsto f(x, y_0) \mapsto$ grafico di funzione ad 1
variabile sopra la retta
 $y = y_0$

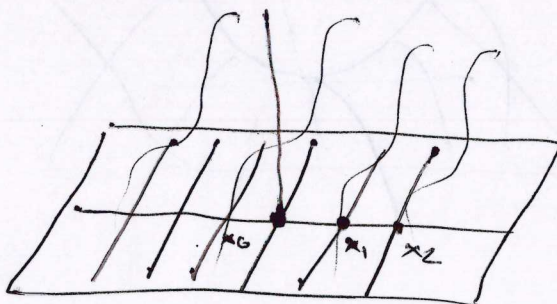
fisso nuovo valore di y e reitero —



ossia disegno
la superficie
"una fetta alla volta"

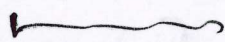
Alternativamente: fisso x e faccio variare solo y :

$y \mapsto f(x_0, y)$

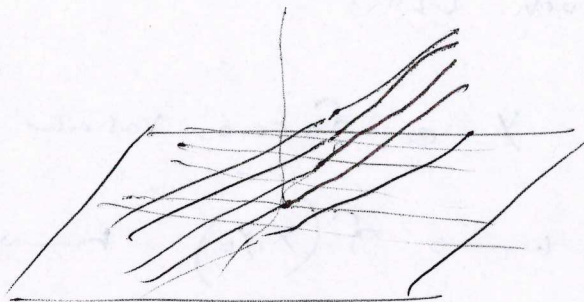


Esempio:

- $f(x,y) = x+y$

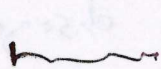


tante
rette

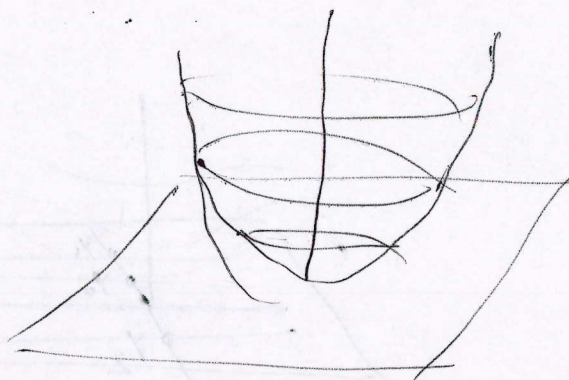


piano

- $f(x,y) = x^2 + y^2$



tante
parabole

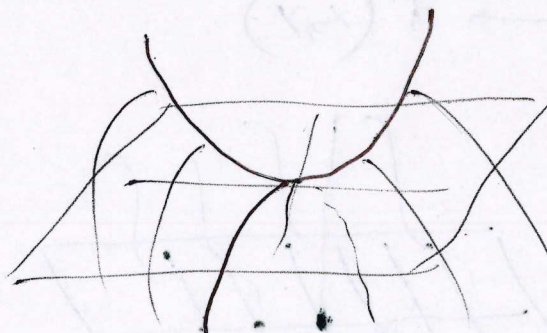


"paraboloid"

- $f(x,y) = x^2 - y^2$



parabole
verso
alto/basso



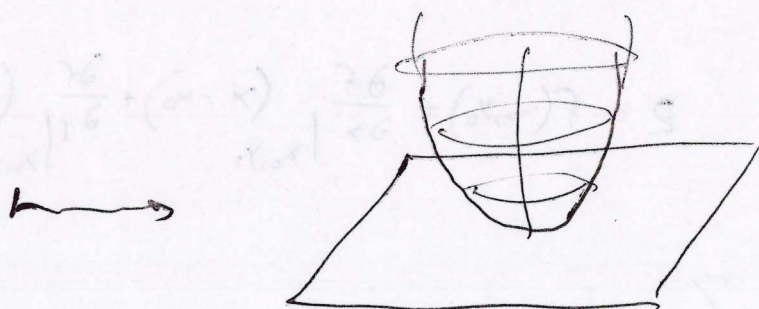
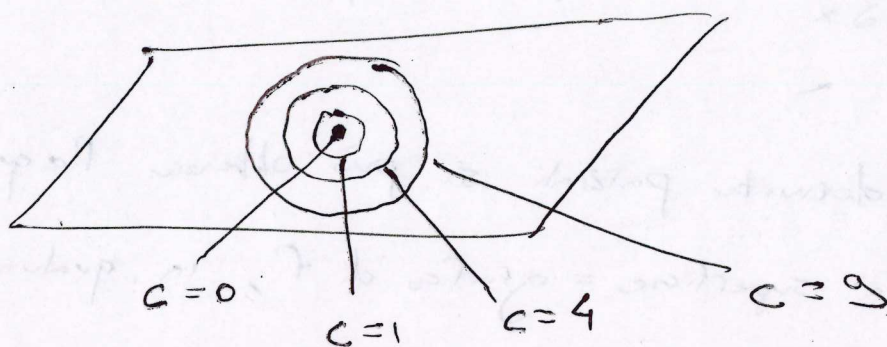
"iperboloid a sella"

2) Curve di livello (= metodo delle cartine geografiche)

47

↳ fisso valore di f e disegno la curva di punti dove f raggiunge quel valore.

Esempio: $f(x,y) = x^2 + y^2$



Una funzione $f = f(x,y)$ ha tipicamente 2 derivate naturali:

$\frac{\partial f}{\partial x}$ = derivata rispetto alla variabile x (tenendo y fissa)

$\frac{\partial f}{\partial y}$ = derivata rispetto alla variabile y (tenendo x fissa)

"derivate parziali"

Esempio

• $f(x,y) = x^2 + y$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 1$$

• $f(x,y) = \sin(x^2 y)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos(x^2 y) \cdot 2xy$$

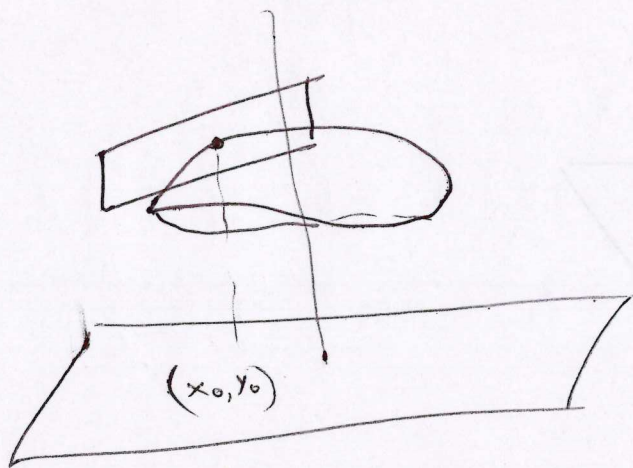
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \cos(x^2 y) \cdot x^2$$

• $e^{x/y}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x/y} \cdot \frac{1}{y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{x/y} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right)$$

Usando le derivate parziali si può ottenere l'equazione del piano tg. alla superficie = grafico di f , in qualunque punto (x_0, y_0)



$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_0, y_0} (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{x_0, y_0} (y - y_0)$$

In particolare, il piano tg. è orizzontale ($z \equiv f(x_0, y_0)$)

$\Rightarrow$ le derivate parziali sono $= 0$

Geometricamente, è chiaro che nei punti di max/min (locali o globali) il piano tg. (se esiste, cioè se esistono $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$)

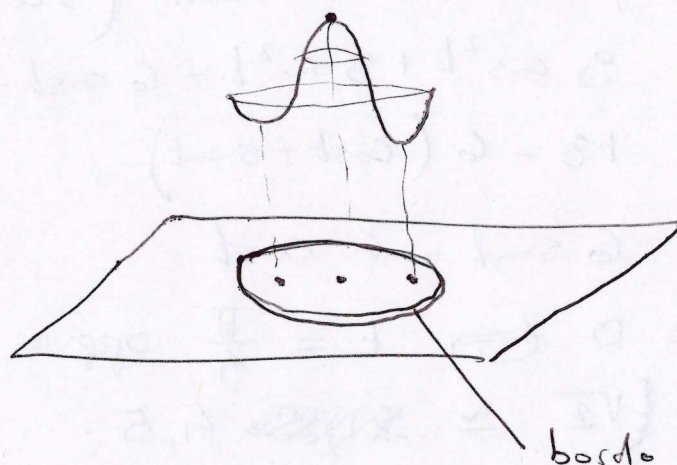
dev'essere orizzontale. Vale dunque un risultato analogo alla

Tes. Data $f = f(x, y)$, dominio $\subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$,

i punti di max/min locali e globali sono da cercarsi tra i seguenti:

- punti "interni" in cui $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$
- punti del bordo
- punti in cui non esistono $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$

Esempio:



Si noti che tipicamente i punti del bordo sono infiniti.

Per studiarli meglio, conviene dunque parametrizzare il bordo (che è una curva std nel piano) tramite $(x(t), y(t))$ e considerare la funzione composta

$$t \longmapsto f(x(t), y(t)) = g(t)$$

ad una variabile: i punti di max/min del bordo sono solo quelli in cui questa funzione ha derivata nulla: $\dot{g}(t) = 0$ (oppure in cui le sue derivate non esistono).

Esempi:

1) Trovare max/min globali della funzione

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 4$$

$$\text{sul dominio } D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 9\}$$

Soluzione:

• punti interni:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 2$$

Ambo zero $\Rightarrow x=1, y=1$: un punto, ~~non~~

$$f(1,1) = 2$$

• punti del bordo: parametrizziamo con $(3 \cos t, 3 \sin t)$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow g(t) &= 9 \cos^2 t + 9 \sin^2 t - 6 \cos t - 6 \sin t + 4 \\ &= 13 - 6(\cos t + \sin t) \end{aligned}$$

$$g'(t) = 6 \sin t - 6 \cos t$$

$$= 0 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4} \text{ oppure } t = \frac{5}{4}\pi$$

$$g\left(\frac{\pi}{4}\right) = 13 - 6\sqrt{2} \approx \text{~~21,5~~ } 4,5$$

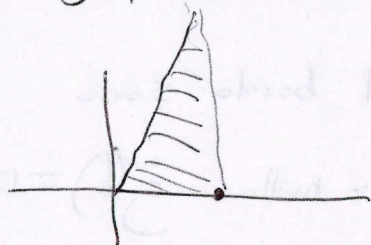
$$g\left(\frac{5}{4}\pi\right) = 13 + 6\sqrt{2} \approx 21,5$$

Confrontiamo 3 valori: punto min globale = $(1,1)$

$$\text{punto max globale} = \left(3 \cos \frac{5}{4}\pi, 3 \sin \frac{5}{4}\pi\right)$$

2) Trovare max/min globale per $f(x,y) = 4xy - x^2 - y^2 - 6x$

$$\text{sul dominio } D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3x\}$$



Soluzioni: come prima, ma ora conviene parametrizzare bordo usando 3 curve = lati e studiando vertici a parte (punti extra).