Compito B

1) Tracciare il grafico della funzione $f(x) = |x^3|$.
In quali punti è continua/ differenziabile ?

2) Data la funzione $f(x) = tg(x^2+1)$, trovare:

- il max. dominio di definizione
- $f'(x)$
- $f'(0)$

3) Trovare i punti di max/min locale della funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & -2 \leq x < -1 \\ 5+2x-x^2 & -1 \leq x \leq 3 \\ x-1 & 3 < x \leq 6 \end{cases}$$

4) Calcolare $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^3 x \, dx$

5) Dimostrare che la funzione $y(x) = c_1 x^2 + c_2 x^2 \ln x$
risolve l'equazione differenziale

$$x^2 y''(x) - 3x y'(x) + 4 y(x) = 0$$

per ogni coppia di costanti c_1, c_2 e trovare i valori di c_1, c_2 per cui valgono le condizioni

$$y(1) = 0, \quad y'(1) = 1$$

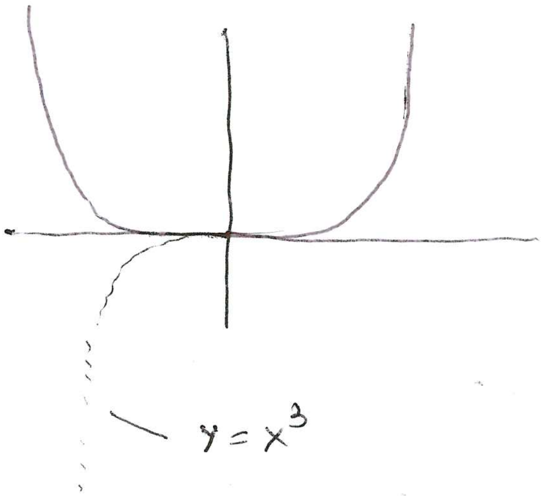
6) Trovare i punti del piano in cui ~~[illegible]~~ il grafico della funzione

$$f(x,y) = x^2 y - x y^2$$

ha piano tangente orizzontale

Soluzioni compito B:

1)



- Ovviamente continua in ogni punto (oppure: cont. in quanto composizione delle funz. cont. $g(y) = |y|$, $f(x) = x^3$)

- Derivabile per $x > 0$ perchè coincide con x^3 (polinomio)

  Derivabile per $x < 0$ perchè coincide con $-x^3$

  Derivabile per $x = 0$? Calcoliamo derivata dx/sin:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^3 - 0}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x^3 - 0}{x} = 0$$

Coincidono $\Rightarrow$ derivabile anche per $x = 0$: $f'(0) = 0$

2) Dom. max. di def: $\quad x^2 + 1 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

$x \neq \pm\sqrt{\frac{\pi}{2} - 1 + k\pi} \quad$ ($k \in \mathbb{N}$ perchè dev'essere $\frac{\pi}{2} - 1 + k\pi \geq 0$)

$$f'(x) = \frac{2x}{\cos^2(x^2+1)} \qquad f'(0) = 0$$

3) La funzione è derivabile negli intervalli

$(-2,-1)$, $(-1,3)$, $(3,6)$

In questi intervalli devo trovare i punti in cui si annulla la derivata prima:

$x \in (-2,-1)$ $\quad f'(x) = 2x \neq 0$

$x \in (-1,3)$ $\quad f'(x) = -2x + 2 = 0 \iff x = 1$

$x \in (3,6)$ $\quad f'(x) = 1 \neq 0$

$\Longrightarrow$ 1 punto: $x = 1$, valore $f(1) = 6$

Chiaramente è un punto di max locale perché per $x \in (-1,3)$ il grafico è una parabola rovesciata (oppure: calcolare $f''(1) < 0$)

I punti restanti devono essere controllati a mano:

- $x = -2$, $f(-2) = 5$: guardando il grafico (= parabola) si vede che è max locale
- $x = -1$, $f(-1) = 2$: la derivata sin è negativa, la derivata dx è ~~positivo~~ positiva $\Longrightarrow$ è min locale
- $x = 3$, $f(3) = 2$: la derivata sin. è negativa, la derivata dx è positiva $\Longrightarrow$ è min. locale
- $x = 6$: guardando il grafico (= retta) si vede che è max locale, con $f(6) = 5$

Confrontando questi valori troviamo: max globale è in $x = 1$, min globale è nei punti $x = -2$, $x = -1$.

4) $$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x \cos x \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} (1-\sin^2 x) \cos x \, dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \, dx - \int_{-\pi}^{\pi} (\sin^2 x) \cos x \, dx$$

$$= \sin x \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{\sin^3 x}{3} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

5) $$y'(x) = 2c_1 x + 2c_2 x \ln x + c_2 x$$

$$y''(x) = 2c_1 + 2c_2 \ln x + 2c_2 + c_2$$

$$= 2c_1 + 3c_2 + 2c_2 \ln x$$

$$\Rightarrow x^2 y''(x) - 3x y'(x) + 4y(x) =$$

$$= x^2 [2c_1 + 3c_2 + 2c_2 \ln x] - 3x [2c_1 x + 2c_2 x \ln x + c_2 x]$$

$$+ 4 [c_1 x^2 + c_2 x^2 \ln x]$$

$$= x^2 (2c_1 + 3c_2 - 6c_1 - 3c_2 + 4c_1)$$

$$+ x^2 \ln x (2c_2 - 6c_2 + 4c_2) = 0$$

$$y(1) = 0 \Rightarrow c_1 \cdot 1^2 + c_2 1^2 \ln 1 = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$y'(1) = 1 \Rightarrow \cancel{2c_1 \cdot 1} + \cancel{2c_2 \cdot 1 \cdot \ln 1} + c_2 \cdot 1 = 1 \Rightarrow c_2 = 1$$

6) Piano tg. orizzontale $\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \; \frac{\partial f}{\partial y} = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy - y^2 = y(2x - y) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ opp. } y = 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 2xy = x(x - 2y) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ opp. } x = 2y$$

$\mapsto$ Unica soluzione $(0,0)$