Compito A

1) Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \begin{cases} -3x & x < -2 \\ -x^2 - 2x + 3 & x \in [-2, 1] \\ (x-1)^2 & x > 1 \end{cases}$$

In quali punti è continua/derivabile?

2) Data la funzione $f(x) = e^{\cos x} \cdot \dfrac{1}{x^2 - 1}$, trovare:

- il max. dominio di definizione
- $f'(x)$
- $f'(0)$

3) La temperatura di ebollizione dell'acqua dipende dall'altitudine h, con formula

$$T(h) = 100,8 - 0,04 \cdot \sqrt{h + 431} \qquad \text{(circa)}$$

Spiegare perché questo implica che l'acqua bolle alla temperatura $T = 98°$ per qualche h compreso tra 4000 e 4500 m (s.l.m.)

4) Trovare la primitiva generale della funzione

$$f(x) = \frac{e^{1/x}}{x^2}$$

5) Trovare la soluzione generale dell'eq. differenziale

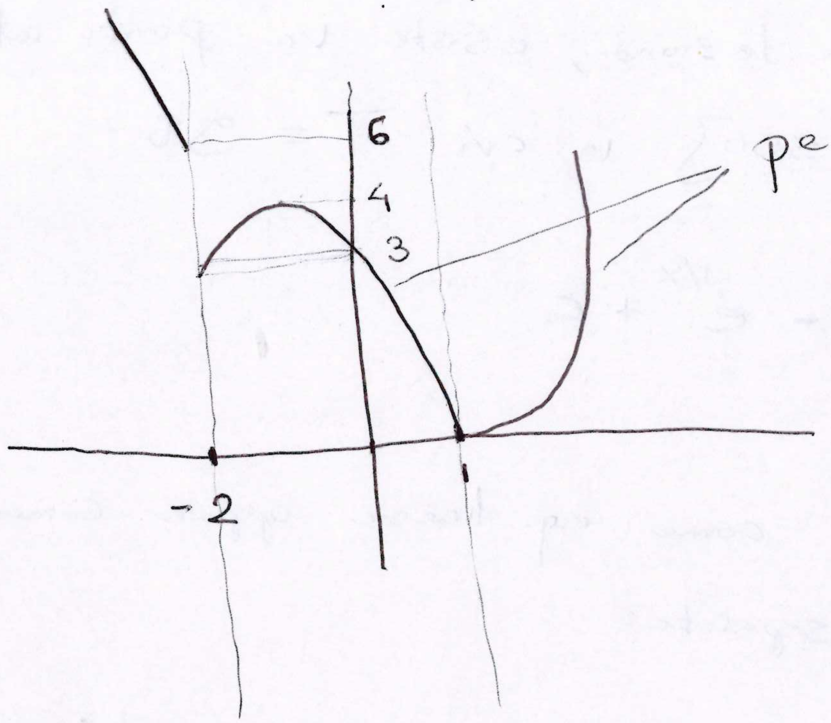
$$\dot{y}(x) = y(x) + 1$$

6) Tracciare le curve di livello della funzione

$$f(x,y) = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2$$

Soluzioni compito A:

1)



La funzione è chiaramente discontinua in $x=-2$ (e quindi neppure derivabile), e non derivabile in $x=1$

Altrove tutto bene.

2) Max dominio $=\{x\in\mathbb{R} : x^2-1\neq 0\} = \{x\in\mathbb{R} : x\neq \pm 1\}$

$$f'(x) = e^{\cos x}(-\sin x)\cdot\frac{1}{x^2-1} - e^{\cos x}\frac{2x}{(x^2-1)^2}$$

$$= -\frac{e^{\cos x}\left((x^2-1)\sin x + 2x\right)}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(0) = -\frac{e^{\cos 0}(-1\cdot\sin 0 + 2\cdot 0)}{1^2} = 0$$

3) La funzione è continua.

$T(4000) = \text{——} < 98$

$T(4500) = \text{———} > 98$

Per teorema visto a lezione, esiste un punto nell'intervallo $[4000, 4500]$ in cui $T = 98$

4) $\int \frac{e^{1/x}}{x^2}\, dx = -e^{1/x} + c$

5) Posso risolverla come eq. lineare oppure come eq. a variabili separate:

- lineare : $y'(x) - y(x) = 1 \qquad a(x) = -1, \; b(x) = 1$

$A(x) = -x \qquad (e^{-x} y)' = e^{-x} \qquad e^{-x} y = -e^{-x} + c$

$\Rightarrow y = -1 + c e^{x}$

- variabili sep: $\frac{y'}{1+y} = 1 \qquad \ln|1+y| = x + c$

$1 + y = \pm e^{x} \cdot e^{c} = A e^{x} \Rightarrow y = A e^{x} - 1$