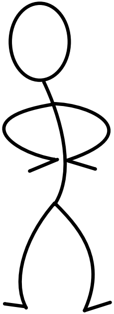
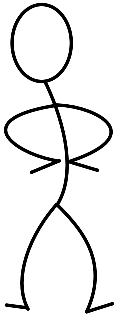
Docente

- Domenico Zambella
- `domenico.zambella@unito.it` (Scrivere da server di posta di ateneo.)
- Telefono 340 544 1936
- Ricevimento a Palazzo Campana su appuntamento.
- `http://elearning.moodle2.unito.it/dstf/`

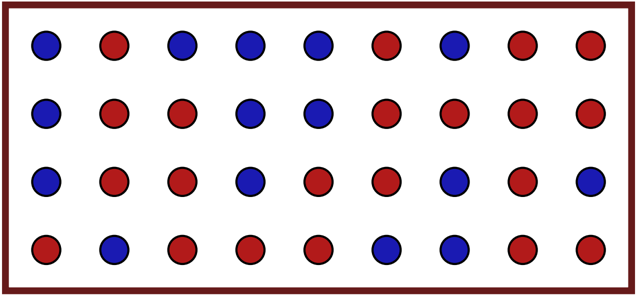


Spazi di probabilità



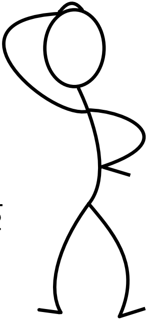
Esempio

Un'urna contiene biglie di colore rosso e blu.



Qual'è la probabilità di estrarre una biglia blu?

Ci sono 36 biglie 21 rosse e 15 blu quindi la risposta è $\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$



Definizione (a)

Uno **spazio di probabilità** è una terna $\langle \boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\mathcal{E}}, \mathbf{P} \rangle$

Spesso si indica solo Ω sottointendendo $\mathcal{E}$ e P

In inglese **sample space**

- Ω è un insieme detto **spazio campionario** o anche **popolazione**

  Es.: Ω è l'insieme di tutte le biglie dell'urna (che indicheremo con $\mathbf{U}$)

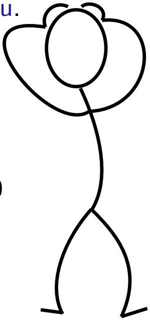
- $\mathcal{E}$ è un insieme di sottoinsiemi di Ω detto algebra degli **eventi**.

  Es.: $\{R, B, \mathbf{U}, \varnothing\}$, con R e B gli insiemi delle biglie rosse e blu.

  N.B. Ω e $\varnothing$ sono sempre in $\mathcal{E}$ per comodità/convenzione.

- $P : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ è una funzione detta **misura di probabilità**.

  Es.: $P(R) = \frac{21}{36}, \quad P(B) = \frac{15}{36}, \quad P(\mathbf{U}) = 1, \quad P(\varnothing) = 0$



Definizione (b)

Si richiede che $\langle \Omega, \mathcal{E}, P \rangle$ soddisfi a queste proprietà:

- $\Omega \neq \varnothing$.
- $\mathcal{E}$ deve soddisfare ad alcune condizioni di chiusura:
  - $\Omega, \varnothing \in \mathcal{E}$
  - $A, B \in \mathcal{E} \quad \Rightarrow \quad A \cup B \in \mathcal{E}$
  - $A \in \mathcal{E} \quad \Rightarrow \quad \neg A \in \mathcal{E}$

$\neg A = \Omega \setminus A =$ **complemento** di A

- $P : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ deve soddisfare le seguenti condizioni:
  - $P(\Omega) = 1$
  - $P(A) \geq 0$ per ogni $A \in \mathcal{E}$
  - $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ per $A, B \in \mathcal{E}$ **disgiunti**

$A \cap B = \varnothing$
$=$ **mutualmente esclusivi**

Questi assiomi sono sufficienti quando $\mathcal{E}$ è finito.
Più avanti considereremo il caso generale e
dovremo aggiungere una richiesta a $\mathcal{E}$ e P.

Proprietà (a)

Se seguenti proprietà dell'insieme degli eventi seguono dagli assiomi:

L'algebra degli eventi è chiusa per combinazioni booleane:

- $A, B \in \mathcal{E} \quad \Rightarrow \quad A \cap B \in \mathcal{E}$

  $A \cap B = \neg(\neg A \cup \neg B)$

- $A, B \in \mathcal{E} \quad \Rightarrow \quad A \setminus B \in \mathcal{E}$

  $A \setminus B = A \cap \neg B$

- $A, B \in \mathcal{E} \quad \Rightarrow \quad A \triangle B \in \mathcal{E}$

  $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

Inoltre:

- $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{E} \quad \Rightarrow \quad \bigcup_{i=1}^{n} A_i \;\in\; \mathcal{E}$

  $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup \cdots \cup A_n$

- $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{E} \quad \Rightarrow \quad \bigcap_{i=1}^{n} A_i \;\in\; \mathcal{E}$