Proprietà (b)

Le seguenti proprietà della misura di probabilità seguono dagli assiomi e valgono per ogni evento:

- $P(\neg A) = 1 - P(A)$
- se $A \subseteq B$ allora $P(A) \leq P(B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A \cap B) = 1 - P(\neg A \cup \neg B)$
- $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

  Se $A_i \cap A_j = \varnothing$ per ogni $i \neq j$

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = P(A_1) + \cdots + P(A_n)$$

Ovvero, se gli eventi A_i sono mutualmente esclusivi.

Simbolo di sommatoria (ripasso)

Dati una sequenza di numeri $x_1, x_2, \ldots, x_n$ scriveremo.

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \quad = \quad x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

Proprietà importanti del simbolo di sommatoria:

$$\sum_{i=1}^{n} c \cdot x_i \quad = \quad c \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \text{dove } c \text{ è una costante arbitraria.}$$

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i + c) \quad = \quad \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) + n \cdot c$$

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) \quad = \quad \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i \right).$$

$$\sum_{i=1}^{2n} x_i \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=n+1}^{2n} x_i \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} x_{2i-1} + \sum_{i=1}^{n} x_{2i}.$$

Spazi di probabilità infiniti

Nel caso in cui $\mathcal{E}$ è infinito dobbiamo aggiungere i seguenti assiomi:

- $A_0, A_1, \dots \in \mathcal{E} \quad \Rightarrow \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{E}$
- $A_0, A_1, \dots \in \mathcal{E}$ mutualmente esclusivi $\quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = P\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big)$

L'importanza di questi assiomi emerge solo negli più sofisticati che qui non avremo occasione di considerare.

Esempio

Su un dado con 8 facce sono incise le lettere A B e C.

- su 1 faccia è incisa la lettera A
- su 2 facce è incisa la lettera B
- su 5 facce è incisa la lettera C

Per modellare il lancio di questo dato usiamo $\langle \Omega, \mathcal{E}, P \rangle$ dove

- $\Omega = \{a, b, c\}$
- $\mathcal{E} = \Big\{ \{a\},\ \{b\},\ \{c\},\ \{a, b\},\ \{b, c\},\ \{a, c\},\ \varnothing,\ \Omega \Big\}$
- $P : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ è la funzione:
  1. $P(\varnothing) = 0$ e $P(\Omega) = 1$
  2. $P(\{a\}) = \dfrac{1}{8}$, $\qquad P(\{b\}) = \dfrac{2}{8}$, $\qquad P(\{c\}) = \dfrac{5}{8}$
  3. $P(\{a, b\}) = \dfrac{3}{8}$, $\qquad P(\{b, c\}) = \dfrac{7}{8}$, $\qquad P(\{a, c\}) = \dfrac{6}{8}$.

Esempio

Un modello alternativo:

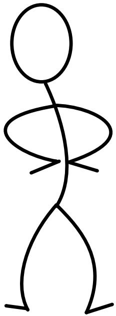
Immaginiamo che il dado sia numerato da 1 a 8.

Definiamo $A = \{1\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ e

- $\Omega = \{1, \dots, 8\}$;
- $\mathcal{E} = \{A,\ B,\ C,\ A \cup B,\ B \cup C,\ A \cup C,\ \varnothing,\ \Omega\}$
- $P : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ è la funzione definita da

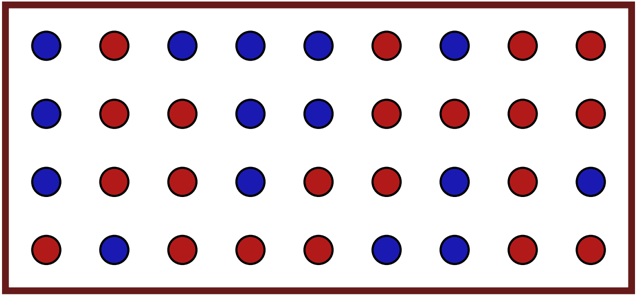
$$P(E) = \frac{|E|}{8} \text{ per ogni } E \in \mathcal{E}.$$

Prodotto di spazi di probabilità



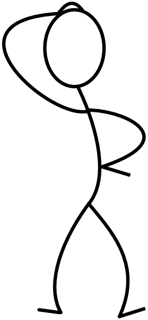
Esempio (a)

Estraiamo una biglia, la reintroduciamo nell'urna, e ne estraiamo un'altra.



Qual'è la probabilità che la prima sia rossa e la seconda blu?

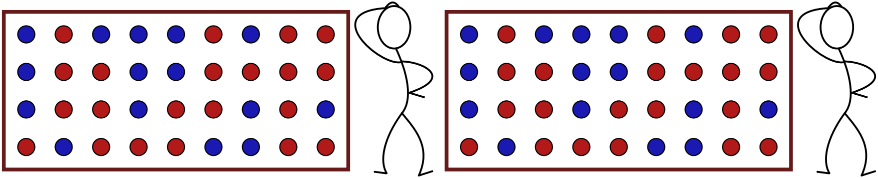
N.B. Reintrodurre la biglia nell'urna semplifica il modello.
Se l'urna contiene molte biglie, i risultati differiscono di poco.



Esempio (b)

Stessa domanda, diversa formulazione.

Immaginiamo due urne con identico contenuto.



Estraiamo una biglia dalla prima urna e una dalla seconda.

Qual'è la probabilità di estrarre rossa dalla prima e blu dalla seconda?

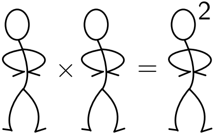
Ci sono 36^2 coppie di biglie. Ci sono $21 \cdot 15$ coppie $\langle$*rossa*, *blu*$\rangle$.

$$P(\{\textit{coppie } \langle \textit{rossa}, \textit{blu} \rangle\}) \;=\; \frac{21 \cdot 15}{36^2} \;=\; \frac{21}{36} \cdot \frac{15}{36} \;=\; P(R)\; P(B)$$

Prodotto cartesiano (notazione)

Dati A e B insiemi arbitrari.

Il **prodotto cartesiano** di A e B è l'insieme:



$$A \times B \;=\; \Big\{ \langle a, b \rangle \;:\; a \in A \text{ e } b \in B \Big\}$$

L'insieme delle sequenze di lunghezza 2 il cui primo elemento sta in A e il secondo in B.

Chiameremo **potenza cartesiana** di A un insieme della forma

$$A^n \;=\; \underbrace{A \times \ldots \times A}_{n \text{ volte}} \;=\; \Big\{ \langle a_1, \ldots, a_n \rangle \;:\; a_1, \ldots, a_n \in A \Big\}$$

L'insieme delle sequenze di lunghezza n di elementi di A.