Definizione

Dati due spazi di probabilità $\langle \Omega_i, \mathcal{E}_i, P_i \rangle$ dove $i = 1, 2$.

Lo **spazio prodotto** è $\langle \Omega, \mathcal{E}, P \rangle$ così definito:

- $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$

  Es. Se $\Omega_1 = \Omega_2 = \mathbf{U}$, l'urna con biglie rosse e blu allora $\Omega = \mathbf{U}^2$

- $\mathcal{E} =$ contiene $A_1 \times A_2$ per $A_i \in \mathcal{E}_i$ e gli eventi che sono unione di questi.

  Es. $\{\varnothing,\ \mathbf{U}^2,\ R^2,\ B^2,\ R \times B,\ B \times R,\ \mathbf{U} \times R,\ R \times \mathbf{U},\ \mathbf{U} \times B,\ B \times \mathbf{U} \ldots.$

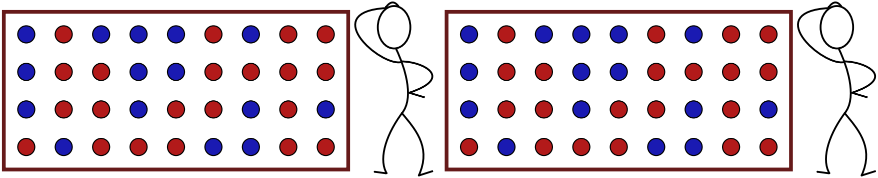
- $P : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ è una funzione:

$$P(A_1 \times A_2) = P_1(A_1) \cdot P_2(A_2)$$

  Es. $P(R \times B) =$ probabilità di estrarre $\langle$rossa,blu$\rangle = P(R) \cdot P(B)$

  $P(R^2) =$ probabilità di estrarre $\langle$rossa,rossa$\rangle = P(R)^2$

Esempio (c)

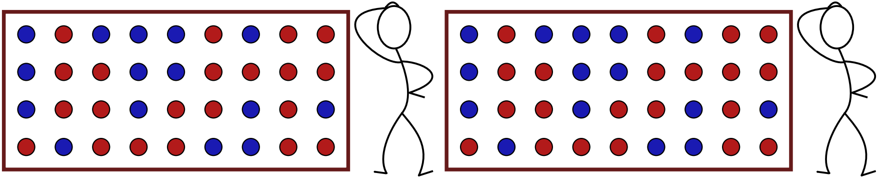


Qual'è la probabilità che la seconda biglia estratta sia blu?

L'evento in questione è $\mathbf{U} \times B$

Quindi $P(\mathbf{U} \times B) \;=\; P(\mathbf{U}) \cdot P(B) \;=\; P(B)$.

Esempio (d)



Qual'è la probabilità che almeno una delle due biglie estratte sia blu?

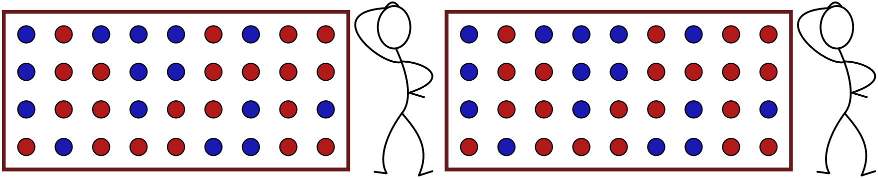
Dobbiamo calcolare la probabilità dell'evento $B \times B \ \cup \ B \times R \ \cup \ R \times B$

$$P\big(B \times B \ \cup \ B \times R \ \cup \ R \times B\big) =$$

$$P\big(B \times B\big) + P\big(B \times R\big) + P\big(R \times B\big) =$$

$$P\big(B\big) \cdot P\big(B\big) + P\big(B\big) \cdot P\big(R\big) + P\big(R\big) \cdot P\big(B\big) =$$

$$\frac{15}{36} \cdot \frac{15}{36} + \frac{15}{36} \cdot \frac{21}{36} + \frac{21}{36} \cdot \frac{15}{36} = \frac{95}{144}$$



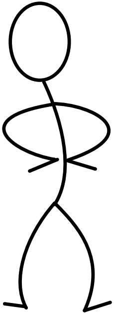
Qual'è la probabilità che almeno una delle due biglie estratte sia blu?

Dobbiamo calcolare la probabilità dell'evento $B \times B \ \cup \ B \times R \ \cup \ R \times B$

N.B. Si semplificano i conti osservando che $\mathbf{U}^2 \setminus R^2$

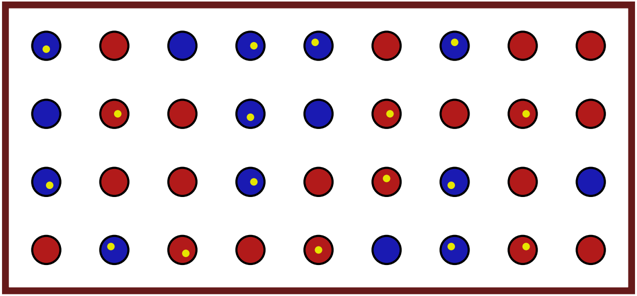
$$P\left(\mathbf{U}^2 \setminus R^2\right) = 1 - P\left(R^2\right) = 1 - P\left(R\right)^2 = 1 - \left(\frac{7}{12}\right)^2$$

Probabilità condizionata



Esempio (a)

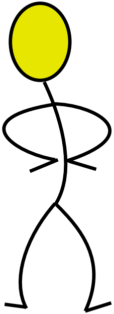
Alcune delle biglie hanno un puntino giallo:



G = insieme delle biglie con puntino giallo $|G| = 17$

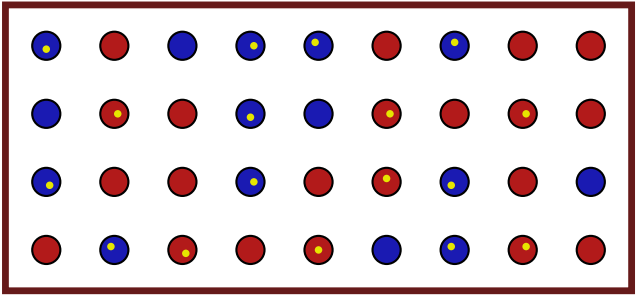
R = insieme delle biglie rosse $|R| = 21$

B = insieme delle biglie blue $|B| = 15$



Esempio (b)

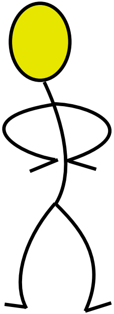
Alcune delle biglie hanno un puntino giallo:



L'insieme $\mathcal{E}$ contiene, oltre ai soliti $\varnothing$ e Ω, i seguenti eventi:

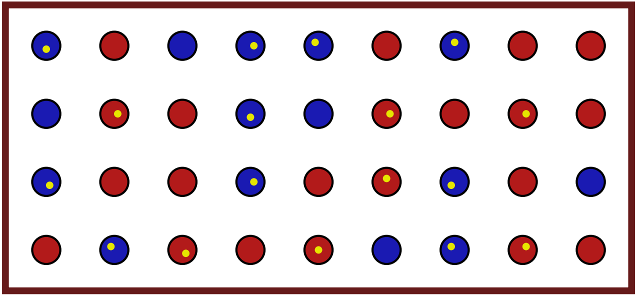
$$R \cap G \qquad B \cap G \qquad R \cap \neg G \qquad B \cap \neg G$$

E tutte le possibili unioni di questi insiemi (in tutto 2^4 eventi).



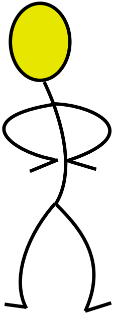
Esempio (c)

Alcune delle biglie hanno un puntino giallo:



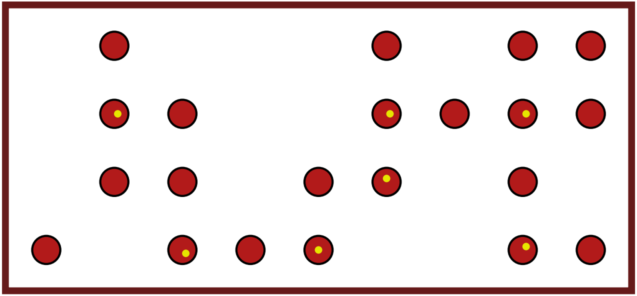
$$P(R \cap G) = \frac{7}{36} \qquad P(B \cap G) = \frac{10}{36}$$

$$P(R \cap \neg G) = \frac{14}{36} \qquad P(B \cap \neg G) = \frac{5}{36}$$



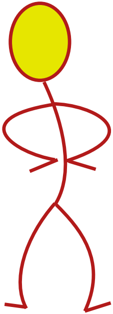
Esempio (d)

Se la biglia estratta è rossa, con che probabilità questa ha un puntino?



È come se l'informazione riducesse lo spazio campionario a R.

La probabilità di avere un puntino giallo è: $\dfrac{|R \cap G|}{|R|}$



Notiamo per uso futuro $\dfrac{P(R \cap G)}{P(R)} =$

Definizione

Se A e B sono eventi e $P(B) \neq 0$ definiamo

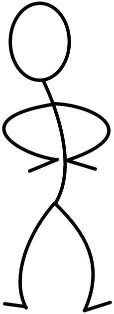
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Si legge: **probabilità di A condizionata a B** o anche **(dato B)**.

Con riferimento all'esempio possiamo calcolare:

$$P(G|R) = \frac{|R \cap G|}{|R|} = \frac{7}{21} = \frac{1}{3} \qquad P(G|B) = \frac{|B \cap G|}{|B|} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

$$P(R|G) = \frac{|R \cap G|}{|G|} = \frac{7}{17} \qquad P(B|G) = \frac{|B \cap G|}{|G|} = \frac{10}{17}$$



Osserviamo che il colore dà informazioni sul puntino e viceversa:

$$P(G) = \frac{17}{36} \qquad P(R) = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}, \qquad P(B) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

Lo spazio campionario contiene persone appartenenti ai seguenti gruppi di età:

$$A_1 = [60, 65) \qquad A_2 = [65, 70) \qquad A_3 = [70, 75) \qquad A_4 = [75, \infty).$$

Sappiamo che

$$P(A_1) = 0.45 \qquad P(A_2) = 0.28 \qquad P(A_3) = 0.20 \qquad P(A_4) = 0.07.$$

Dalla letteratura è noto che la probabilità di sviluppare la cataratta nei prossimi 5 anni per questi gruppi di età è rispettivamente 0.024, 0.046, 0.088, 0.153. Qual'è la probabilità per i membri della nostra popolazione?

Sia C l'evento "sviluppare la cataratta nei prossimi 5 anni".

Vogliamo calcolare $P(C)$ da:

$$P(C|A_1) = 0.024 \quad P(C|A_2) = 0.046 \quad P(C|A_3) = 0.088 \quad P(C|A_4) = 0.153.$$

Gli eventi A_i sono disgiunti e la loro unione è Ω quindi

$$C = \bigcup_{i=1}^{4} (C \cap A_i)$$

$$P(C) = P\Big(\bigcup_{i=1}^{4} C \cap A_i\Big) = \sum_{i=1}^{4} P(C \cap A_i) = \sum_{i=1}^{4} P(A_i) \cdot P(C|A_i) = 0.052$$

Generalizzando il procedimento usato nell'esempio precedente otteniamo:

Se $A_1, \ldots, A_n$ sono eventi

mutuamente esclusivi ed **esaustivi**

= A due a due disgiunti e la loro unione è Ω.

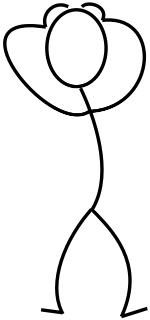
= Formano una **partizione** di Ω.

e tali che $P(A_i) \neq 0$ per tutti gli i.

Sia C è un qualsiasi altro evento.

Allora

$$P(C) \;=\; \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P\big(C|A_i\big).$$



Una popolazione contiene persone appartenenti ai seguenti gruppi:

gruppo A gruppo $B = \neg A$ malati M sani $S = \neg M$

Sappiamo che:

$P(A) = 0.4$ $P(B) = 0.6$ $P(M|A) = 0.25$ $P(M|B) = 0.07$

Qual'è la probabilità che una persona malata appartenga al gruppo A?

In altre parole, dobbiamo calcolare $P(A|M)$.

$$P(A|M) = \frac{P(A \cap M)}{P(M)} = \frac{P(A \cap M) \cdot P(A)}{P(M) \cdot P(A)} = \frac{P(M|A) \cdot P(A)}{P(M)} =$$

$$= \frac{P(M|A) \cdot P(A)}{P(M|A)P(A) + P(M|B)P(B)} = 0.7$$

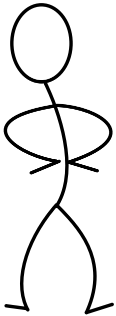
Generalizzando il procedimento usato nell'esempio precedente otteniamo:

Per ogni coppia di eventi A e B di probabilità $\neq 0$ vale

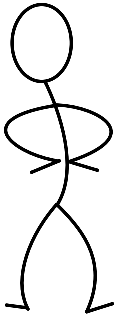
$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

Formulazione alternativa

$$= \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|\neg A)P(\neg A)}$$

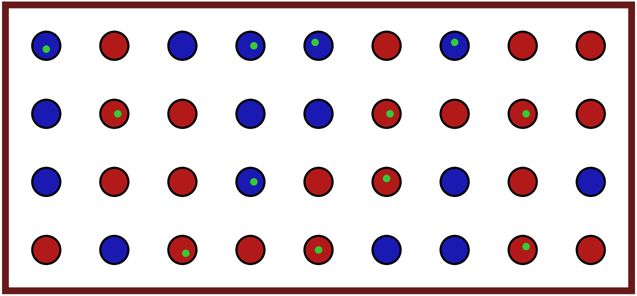


Indipendenza stocastica



Esempio (a)

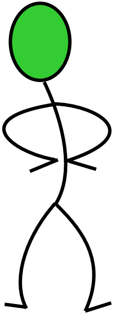
Alcune delle biglie hanno un puntino verde:



Che informazione dà il colore sul puntino?

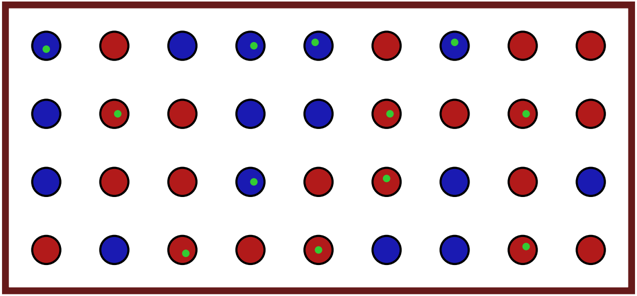
$$P(V|R) = \frac{7}{21} = \frac{1}{3} \qquad P(V|B) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \qquad P(V) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

Quindi il colore non dà informazioni sul puntino.



Esempio (b)

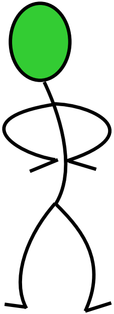
Alcune delle biglie hanno un puntino verde:



E viceversa: il puntino verde non dà informazioni sul colore.

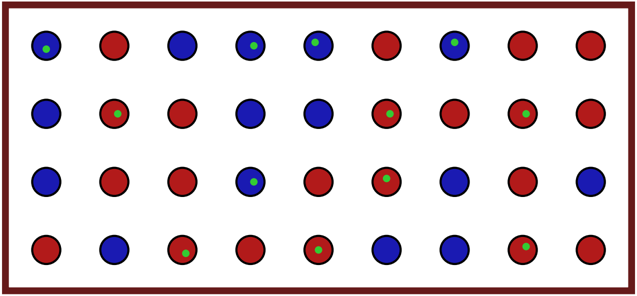
$$P(R|V) = \frac{7}{12} \qquad P(B|V) = \frac{5}{12}$$

$$P(R) = \frac{21}{36} \qquad P(B) = \frac{15}{36}$$



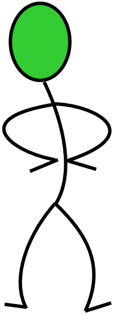
Esempio (b)

Alcune delle biglie hanno un puntino verde:



Diremo che R e V sono **eventi indipendenti**

Idem per B e V



Definizione

Due eventi A e B si dicono **indipendenti** se

$$P(A \cap B) \quad = \quad P(A)\ P(B)$$

Equivalentemente (ma dobbiamo richiedere $P(B) \neq 0$) se

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$$

E, simmetricamente, (richiedendo $P(A) \neq 0$) se

$$P(B|A) = P(B)$$