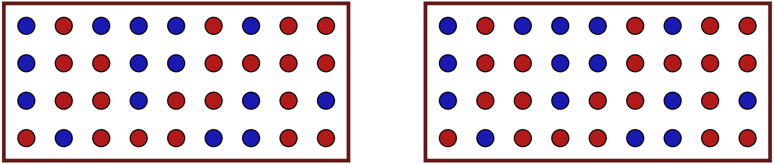
Esempio (d)

I risultati dell'estrazione da due urne sono eventi indipendenti.



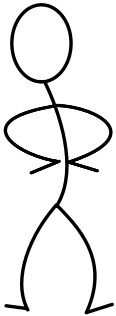
I seguenti eventi sono tra loro indipendenti:

estrarre una biglia rossa dalla prima urna $\quad R\times\mathbf{U}$

estrarre una biglia blu dalla seconda urna $\quad \mathbf{U}\times B$

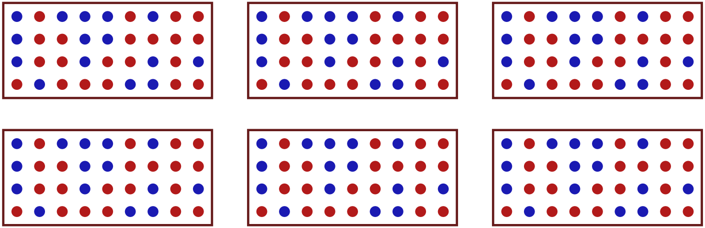
$$P\Big(R\times\mathbf{U} \cap \mathbf{U}\times B\Big) = P(R\times B) = P(R)\cdot P(B) = P(R\times\mathbf{U})\cdot P(\mathbf{U}\times B)$$

La distribuzione binomiale



Esempio (a)

Abbiamo 6 urne con identico contenuto e da ognuna estraiamo una biglia.



Qual'è la probabilità di ottenere esattamente 4 biglie rosse e 2 biglie blu?

Ovviamente, per risparmiare urne e biglie potremmo estrarre 6 volte dalla stessa urna, riponendo ogni volta la biglia estratta.

Lo spazio campionario è $\mathbf{U}^6 = \{\text{sequenze di biglie di lunghezza } 6\}$.

Esempio (b)

L'evento 4 biglie rosse e 2 biglie blu è unione dei seguenti insiemi:

$$\underbrace{\begin{array}{c} B\times B\times R\times R\times R\times R \\ B\times R\times B\times R\times R\times R \\ B\times R\times R\times B\times R\times R \\ B\times R\times R\times R\times B\times R \\ B\times R\times R\times R\times R\times B \end{array}}_{5} \quad \underbrace{\begin{array}{c} R\times B\times B\times R\times R\times R \\ R\times B\times R\times B\times R\times R \\ R\times B\times R\times R\times B\times R \\ R\times B\times R\times R\times R\times B \\ \end{array}}_{4} \quad \underbrace{\begin{array}{c} R\times R\times B\times B\times R\times R \\ R\times R\times B\times R\times B\times R \\ R\times R\times B\times R\times R\times B \\ \\ \end{array}}_{3} \quad \underbrace{\begin{array}{c} R\times R\times R\times B\times B\times R \\ R\times R\times R\times B\times R\times B \\ \\ \\ \end{array}}_{2} \quad \underbrace{\begin{array}{c} R\times R\times R\times R\times B\times B \\ \\ \\ \\ \end{array}}_{1}$$

Per definizione di spazio prodotto:

$$P\big(R\times R\times R\times R\times B\times B\big) \;=\; P(R)^4 P(B)^2$$

Ma per tutti questi 15 eventi il risultato è sempre lo stesso $P(R)^4 P(B)^2$.

N.B. Sono eventi tra loro <u>disgiunti</u>.

$$P\big(\{4 \; rosse \; e \; 2 \; blu\}\big) \;=\; 15 \; P(R)^4 P(B)^2 \;=\; 15 \left(\frac{21}{36}\right)^2 \left(\frac{15}{36}\right)^4.$$

Distribuzione binomiale (3)

Abbiamo n copie identiche della solita urna **U**.

Qual'è la probabilità di estrarre k biglie rosse e $n-k$ biglie blu?

Dall'esempio precedente è chiaro che la risposta ha la forma:

$$C_{n,k}\ P(R)^k\ P(B)^{n-k}$$

Rimane da determinare il coefficiente $C_{n,k}$.

$$C_{n,k} = \left|\left\{ \text{ eventi } R\times B\times\ldots\times R\times B\times R \text{ con } k \text{ volte } R \text{ e } n-k \text{ volte B}\right\}\right|$$

coefficienti binomiali

Permutazioni (digressione 1)

In quanti modi posso ordinare n oggetti distinti?

Le possibili scelte del primo elemento sono: n

Le possibili scelte del secondo elemento sono: $n - 1$

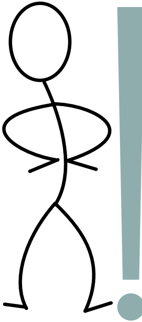
$\vdots$

Le possibili scelte del $(n-1)$-esimo elemento sono: 2

Per l'ultimo elemento non abbiamo scelta: 1

Il numero totale delle scelte è:

$$n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \quad = \quad n!$$



Scelte semplici (digressione 2)

In quanti modi posso ordinare n biglie di cui k rosse e $n - k$ blu?

Numeriamo le biglie rosse e blu e contiamo gli ordini.

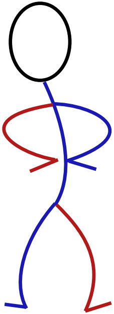
Siamo nel caso precedente (le biglie sono tra loro distinte): $n!$

Cosa abbiamo contato doppio?

Gli ordinamenti delle biglie k rosse e delle $n - k$ blu.

Dobbiamo dividere per $k!$ e $(n - k)!$:

Risultato: $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$



Coefficenti binomiali (notazione)

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Si legge: **n su k**.

In inglese: **n choose k**.

I numeri $\binom{n}{k}$ si chiamano **coefficienti binomiali**.