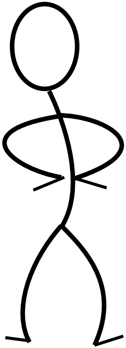
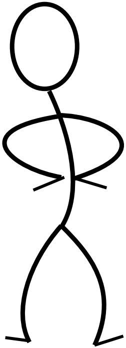
Scelte indipendenti

Problema 1.



Scelte indipendenti

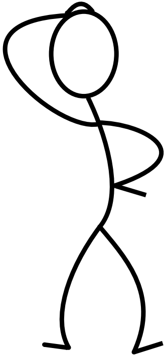
Problema 1.
Quante parole di lunghezza k possiamo scrivere con un alfabeto di n caratteri?



Scelte indipendenti

Problema 1.
Quante parole di lunghezza k possiamo scrivere con un alfabeto di n caratteri?

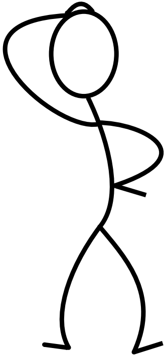
Riformulazione.
Notazione: $[n] = \{1, \ldots, n\}$.
Quante sono le sequenze $\langle c_1, \ldots, c_k \rangle$, dove $c_i \in [n]$.



Scelte indipendenti

Problema 1.
Quante parole di lunghezza k possiamo scrivere con un alfabeto di n caratteri?

Riformulazione.
Notazione: $[n] = \{1, \ldots, n\}$.
Quante sono le sequenze $\langle c_1, \ldots, c_k \rangle$, dove $c_i \in [n]$.
Stiamo scegliendo k volte tra n caratteri.
Ogni scelta è indipendente dalle precedenti.

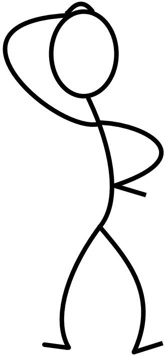


Scelte indipendenti

Problema 1.
Quante parole di lunghezza k possiamo scrivere con un alfabeto di n caratteri?

Riformulazione.
Notazione: $[n] = \{1, \ldots, n\}$.
Quante sono le sequenze $\langle c_1, \ldots, c_k \rangle$, dove $c_i \in [n]$.
Stiamo scegliendo k volte tra n caratteri.
Ogni scelta è indipendente dalle precedenti.

$$\underbrace{n \cdot n \cdot \cdots \cdot n}_{k \text{ volte}}$$

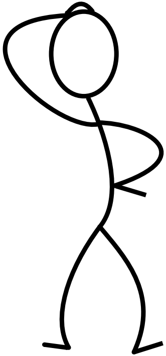


Scelte indipendenti

Problema 1.
Quante parole di lunghezza k possiamo scrivere con un alfabeto di n caratteri?

Riformulazione.
Notazione: $[n] = \{1, \ldots, n\}$.
Quante sono le sequenze $\langle c_1, \ldots, c_k \rangle$, dove $c_i \in [n]$.
Stiamo scegliendo k volte tra n caratteri.
Ogni scelta è indipendente dalle precedenti.

$$\underbrace{n \cdot n \cdot \cdots \cdot n}_{k \text{ volte}} \quad =$$

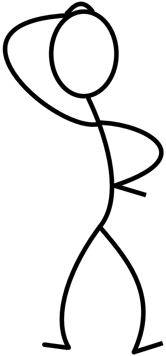


Scelte indipendenti

Problema 1.
Quante parole di lunghezza k possiamo scrivere con un alfabeto di n caratteri?

Riformulazione.
Notazione: $[n] = \{1, \ldots, n\}$.
Quante sono le sequenze $\langle c_1, \ldots, c_k \rangle$, dove $c_i \in [n]$.
Stiamo scegliendo k volte tra n caratteri.
Ogni scelta è indipendente dalle precedenti.

$$\underbrace{n \cdot n \cdot \cdots \cdot n}_{k \text{ volte}} \quad = \quad n^k$$

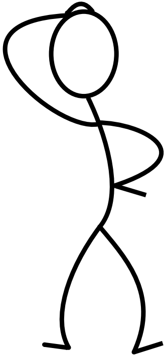


Scelte indipendenti

Problema 1.
Quante parole di lunghezza k possiamo scrivere con un alfabeto di n caratteri?

Riformulazione.
Notazione: $[n] = \{1, \ldots, n\}$.
Quante sono le sequenze $\langle c_1, \ldots, c_k \rangle$, dove $c_i \in [n]$.
Stiamo scegliendo k volte tra n caratteri.
Ogni scelta è indipendente dalle precedenti.

$$\underbrace{n \cdot n \cdot \cdots \cdot n}_{k \text{ volte}} \quad = \quad n^k$$

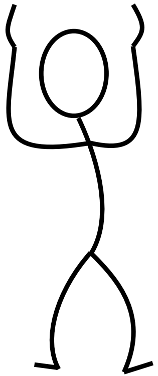


Scelte indipendenti

Problema 1.
Quante parole di lunghezza k possiamo scrivere con un alfabeto di n caratteri?

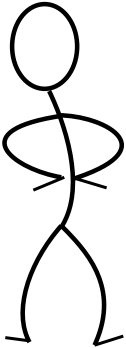
Riformulazione.
Notazione: $[n] = \{1, \ldots, n\}$.
Quante sono le sequenze $\langle c_1, \ldots, c_k \rangle$, dove $c_i \in [n]$.
Stiamo scegliendo k volte tra n caratteri.
Ogni scelta è indipendente dalle precedenti.

$$\underbrace{n \cdot n \cdot \cdots \cdot n}_{k \text{ volte}} \quad = \quad n^k$$



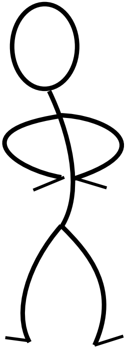
Scelte indipendenti

Problema 1'.



Scelte indipendenti

Problema 1'.
Quanti sono i sottoinsiemi di un insieme di k elementi?



Scelte indipendenti

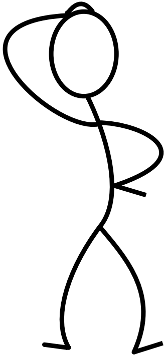
Problema 1'.
Quanti sono i sottoinsiemi di un insieme di k elementi?

Mostriamo che è lo stesso che contare le parole di lunghezza k di un alfabeto con 2 caratteri. E che quindi la risposta è 2^k.

Esempio $k = 7$. Consideriamo l'insieme $\{1, 2, \ldots, 7\}$.

Al sottoinsieme $\{3, 5, 6\}$ associamo la sequenza:

0 0 1 0 1 1 0



Scelte indipendenti

Problema 1'.
Quanti sono i sottoinsiemi di un insieme di k elementi?

Mostriamo che è lo stesso che contare le parole di lunghezza k di un alfabeto con 2 caratteri. E che quindi la risposta è 2^k.

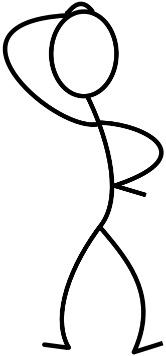
Esempio $k = 7$. Consideriamo l'insieme $\{1, 2, \ldots, 7\}$.

Al sottoinsieme $\{3, 5, 6\}$ associamo la sequenza:

0	0	1	0	1	1	0
1	2	3	4	5	6	7

All'insieme $\{1, 2, 3, 5, 7\}$ associamo la sequenza:

1 1 1 0 1 0 1



Scelte indipendenti

Problema 1'.
Quanti sono i sottoinsiemi di un insieme di k elementi?

Mostriamo che è lo stesso che contare le parole di lunghezza k di un alfabeto con 2 caratteri. E che quindi la risposta è 2^k.

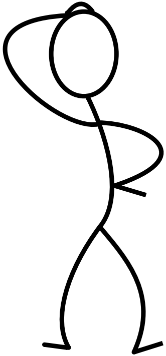
Esempio $k = 7$. Consideriamo l'insieme $\{1, 2, \dots, 7\}$.

Al sottoinsieme $\{3, 5, 6\}$ associamo la sequenza:

0	0	1	0	1	1	0
1	2	3	4	5	6	7

All'insieme $\{1, 2, 3, 5, 7\}$ associamo la sequenza:

1	1	1	0	1	0	1
1	2	3	4	5	6	7



Scelte indipendenti

Problema 1'.
Quanti sono i sottoinsiemi di un insieme di k elementi?

Mostriamo che è lo stesso che contare le parole di lunghezza k di un alfabeto con 2 caratteri. E che quindi la risposta è 2^k.

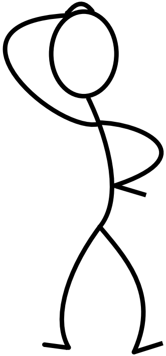
Esempio $k = 7$. Consideriamo l'insieme $\{1, 2, \ldots, 7\}$.

Al sottoinsieme $\{3, 5, 6\}$ associamo la sequenza:

0	0	1	0	1	1	0
1	2	3	4	5	6	7

All'insieme $\{1, 2, 3, 5, 7\}$ associamo la sequenza:

1	1	1	0	1	0	1
1	2	3	4	5	6	7



Scelte indipendenti

Problema 1'.
Quanti sono i sottoinsiemi di un insieme di k elementi?

Mostriamo che è lo stesso che contare le parole di lunghezza k di un alfabeto con 2 caratteri. E che quindi la risposta è 2^k.

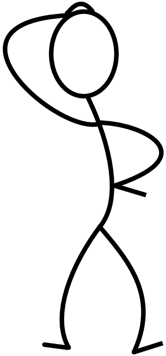
Esempio $k = 7$. Consideriamo l'insieme $\{1, 2, \ldots, 7\}$.

Al sottoinsieme $\{3, 5, 6\}$ associamo la sequenza:

0	0	1	0	1	1	0
1	2	3	4	5	6	7

All'insieme $\{1, 2, 3, 5, 7\}$ associamo la sequenza:

1	1	1	0	1	0	1
1	2	3	4	5	6	7

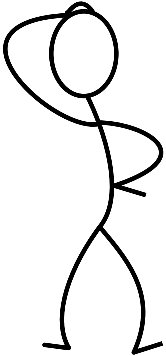


Scelte indipendenti

Problema 1'.
Quanti sono i sottoinsiemi di un insieme di k elementi?

Mostriamo che è lo stesso che contare le parole di lunghezza k di un alfabeto con 2 caratteri. E che quindi la risposta è 2^k.

Esempio $k = 7$. Consideriamo l'insieme $\{1, 2, \ldots, 7\}$.



Al sottoinsieme $\{3, 5, 6\}$ associamo la sequenza:

0	0	1	0	1	1	0
1	2	3	4	5	6	7

All'insieme $\{1, 2, 3, 5, 7\}$ associamo la sequenza:

1	1	1	0	1	0	1
1	2	3	4	5	6	7

Scelte indipendenti

Problema 1'.
Quanti sono i sottoinsiemi di un insieme di k elementi?

Mostriamo che è lo stesso che contare le parole di lunghezza k di un alfabeto con 2 caratteri. E che quindi la risposta è 2^k.

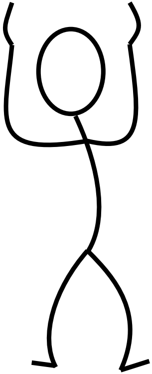
Esempio $k = 7$. Consideriamo l'insieme $\{1, 2, \ldots, 7\}$.

Al sottoinsieme $\{3, 5, 6\}$ associamo la sequenza:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array}$$

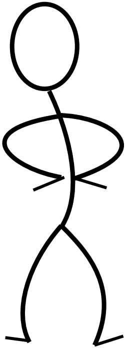
All'insieme $\{1, 2, 3, 5, 7\}$ associamo la sequenza:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array}$$



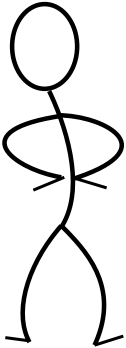
Enumerazioni senza ripetizioni

Problema 2.



Enumerazioni senza ripetizioni

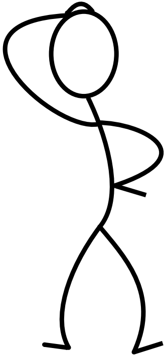
Problema 2.
In quanti modi posso ordinare k oggetti distinti scelti tra n? $(k \leq n)$



Enumerazioni senza ripetizioni

Problema 2.
In quanti modi posso ordinare k oggetti distinti scelti tra n? $(k \leq n)$

Riformulazioni.
Quante sono le sequenze $\langle c_1, \ldots, c_k \rangle$, con $c_i \in [n]$ tutti diversi tra loro?

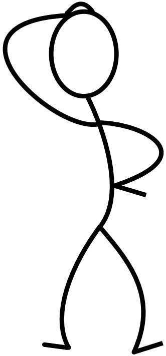


Enumerazioni senza ripetizioni

Problema 2.
In quanti modi posso ordinare k oggetti distinti scelti tra n? $(k \leq n)$

Riformulazioni.
Quante sono le sequenze $\langle c_1, \ldots, c_k \rangle$, con $c_i \in [n]$ tutti diversi tra loro?

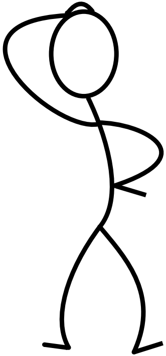
Stiamo scegliendo k volte tra n oggetti distinti.



Enumerazioni senza ripetizioni

Problema 2.
In quanti modi posso ordinare k oggetti distinti scelti tra n? $(k \leq n)$

Riformulazioni.
Quante sono le sequenze $\langle c_1, \ldots, c_k \rangle$, con $c_i \in [n]$ tutti diversi tra loro?



Stiamo scegliendo k volte tra n oggetti distinti.
Le scelte non sono indipendenti
(ogni oggetto è scelto solo 1 volta).

$$\underbrace{n \cdot (n-1) \cdot \ldots}_{k \text{ volte}}$$

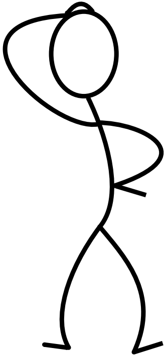
Enumerazioni senza ripetizioni

Problema 2.
In quanti modi posso ordinare k oggetti distinti scelti tra n? $(k \leq n)$

Riformulazioni.
Quante sono le sequenze $\langle c_1, \ldots, c_k \rangle$, con $c_i \in [n]$ tutti diversi tra loro?

Stiamo scegliendo k volte tra n oggetti distinti.
Le scelte non sono indipendenti
(ogni oggetto è scelto solo 1 volta).

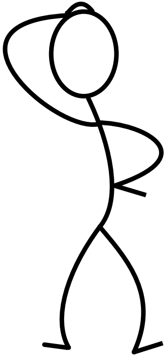
$$\underbrace{n \cdot (n-1) \cdot \ldots}_{k \text{ volte}} \quad =$$



Enumerazioni senza ripetizioni

Problema 2.
In quanti modi posso ordinare k oggetti distinti scelti tra n? $(k \leq n)$

Riformulazioni.
Quante sono le sequenze $\langle c_1, \ldots, c_k \rangle$, con $c_i \in [n]$ tutti diversi tra loro?



Stiamo scegliendo k volte tra n oggetti distinti.
Le scelte non sono indipendenti
(ogni oggetto è scelto solo 1 volta).

$$\underbrace{n \cdot (n-1) \cdot \ldots}_{k \text{ volte}} = n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot (n-k+1)$$

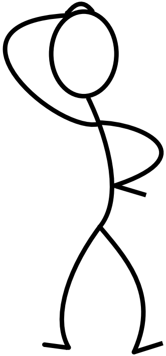
Enumerazioni senza ripetizioni

Problema 2.
In quanti modi posso ordinare k oggetti distinti scelti tra n? $(k \leq n)$

Riformulazioni.
Quante sono le sequenze $\langle c_1, \ldots, c_k \rangle$, con $c_i \in [n]$ tutti diversi tra loro?

Stiamo scegliendo k volte tra n oggetti distinti.
Le scelte non sono indipendenti
(ogni oggetto è scelto solo 1 volta).

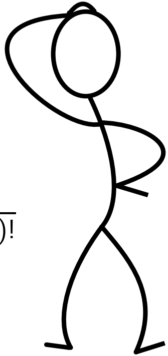
$$\underbrace{n \cdot (n-1) \cdot \ldots}_{k \text{ volte}} \quad = \quad n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot (n-k+1) \quad =$$



Enumerazioni senza ripetizioni

Problema 2.
In quanti modi posso ordinare k oggetti distinti scelti tra n? $(k \leq n)$

Riformulazioni.
Quante sono le sequenze $\langle c_1, \ldots, c_k \rangle$, con $c_i \in [n]$ tutti diversi tra loro?



Stiamo scegliendo k volte tra n oggetti distinti.
Le scelte non sono indipendenti
(ogni oggetto è scelto solo 1 volta).

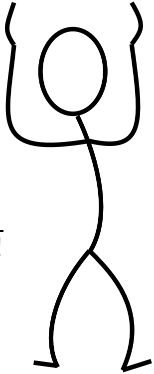
$$\underbrace{n \cdot (n-1) \cdot \ldots}_{k \text{ volte}} \quad = \quad n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot (n-k+1) \quad = \quad \frac{n!}{(n-k)!}$$

N.B. Se $k = n$, la risposta è $n!$

Enumerazioni senza ripetizioni

Problema 2.
In quanti modi posso ordinare k oggetti distinti scelti tra n? $(k \leq n)$

Riformulazioni.
Quante sono le sequenze $\langle c_1, \ldots, c_k \rangle$, con $c_i \in [n]$ tutti diversi tra loro?



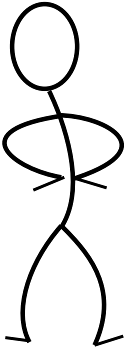
Stiamo scegliendo k volte tra n oggetti distinti.
Le scelte non sono indipendenti
(ogni oggetto è scelto solo 1 volta).

$$\underbrace{n \cdot (n-1) \cdot \ldots}_{k \text{ volte}} \quad = \quad n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot (n-k+1) \quad = \quad \frac{n!}{(n-k)!}$$

N.B. Se $k = n$, la risposta è $n!$

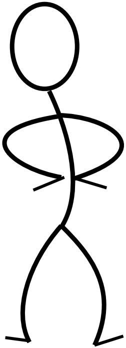
Scelte semplici I

Problema 3.



Scelte semplici I

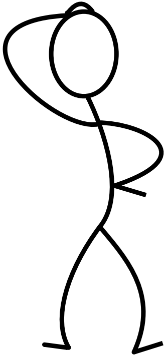
Problema 3.
In quanti modi si possono ordinare n biglie di cui k blu, $n-k$ rosse?
(A parte il colore, le biglie sono identiche.)
Indichiamo questo numero con $\#\mathrm{ord}(n-k, k)$



Scelte semplici I

Problema 3.
In quanti modi si possono ordinare n biglie di cui k blu, $n-k$ rosse?
(A parte il colore, le biglie sono identiche.)
Indichiamo questo numero con $\#\mathrm{ord}(n-k, k)$

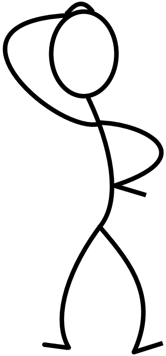
Osservazione.
Fissato un qualsiasi ordine delle biglie colorate.
Numeriamo arbitrariamente le biglie blu.
Numeriamo arbitrariamente le biglie rosse.



Scelte semplici I

Problema 3.
In quanti modi si possono ordinare n biglie di cui k blu, $n-k$ rosse?
(A parte il colore, le biglie sono identiche.)
Indichiamo questo numero con $\#\mathrm{ord}(n-k, k)$

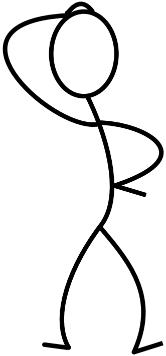
Osservazione.
Fissato un qualsiasi ordine delle biglie colorate.
Numeriamo arbitrariamente le biglie blu.
Numeriamo arbitrariamente le biglie rosse.
Otteniamo n elementi distinti.



Scelte semplici I

Problema 3.
In quanti modi si possono ordinare n biglie di cui k blu, $n - k$ rosse?
(A parte il colore, le biglie sono identiche.)
Indichiamo questo numero con $\#\mathrm{ord}(n-k, k)$

Osservazione.
Fissato un qualsiasi ordine delle biglie colorate.
Numeriamo arbitrariamente le biglie blu.
Numeriamo arbitrariamente le biglie rosse.
Otteniamo n elementi distinti.
Esistono $k!$ modi di numerare le k biglie blu.
Esistono $(n-k)!$ modi di etichettare le $n-k$ biglie rosse.

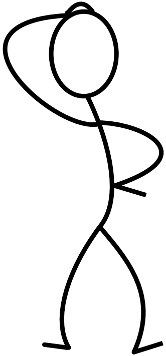


Scelte semplici I

Problema 3.
In quanti modi si possono ordinare n biglie di cui k blu, $n-k$ rosse?
(A parte il colore, le biglie sono identiche.)
Indichiamo questo numero con $\#\mathrm{ord}(n-k, k)$

Osservazione.
Fissato un qualsiasi ordine delle biglie colorate.
Numeriamo arbitrariamente le biglie blu.
Numeriamo arbitrariamente le biglie rosse.
Otteniamo n elementi distinti.
Esistono $k!$ modi di numerare le k biglie blu.
Esistono $(n-k)!$ modi di etichettare le $n-k$ biglie rosse.

$\#\mathrm{ord}(n-k, k) \cdot k! \cdot (n-k)! =$

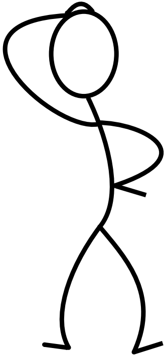


Scelte semplici I

Problema 3.
In quanti modi si possono ordinare n biglie di cui k blu, $n-k$ rosse?
(A parte il colore, le biglie sono identiche.)
Indichiamo questo numero con $\#\mathrm{ord}(n-k, k)$

Osservazione.
Fissato un qualsiasi ordine delle biglie colorate.
Numeriamo arbitrariamente le biglie blu.
Numeriamo arbitrariamente le biglie rosse.
Otteniamo n elementi distinti.
Esistono $k!$ modi di numerare le k biglie blu.
Esistono $(n-k)!$ modi di etichettare le $n-k$ biglie rosse.

$$\#\mathrm{ord}(n-k, k) \cdot k! \cdot (n-k)! = n!$$



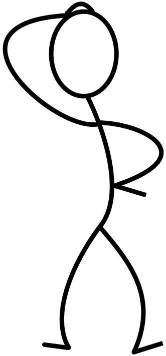
Scelte semplici I

Problema 3.
In quanti modi si possono ordinare n biglie di cui k blu, $n-k$ rosse?
(A parte il colore, le biglie sono identiche.)
Indichiamo questo numero con $\#\mathrm{ord}(n-k, k)$

Osservazione.
Fissato un qualsiasi ordine delle biglie colorate.
Numeriamo arbitrariamente le biglie blu.
Numeriamo arbitrariamente le biglie rosse.
Otteniamo n elementi distinti.
Esistono $k!$ modi di numerare le k biglie blu.
Esistono $(n-k)!$ modi di etichettare le $n-k$ biglie rosse.

$$\#\mathrm{ord}(n-k, k) \cdot k! \cdot (n-k)! = n!$$

$$\#\mathrm{ord}(n-k, k) =$$



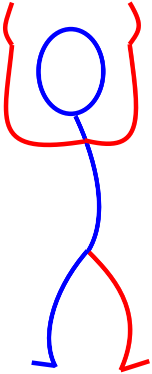
Scelte semplici I

Problema 3.
In quanti modi si possono ordinare n biglie di cui k blu, $n-k$ rosse?
(A parte il colore, le biglie sono identiche.)
Indichiamo questo numero con $\#\text{ord}(n-k, k)$

Osservazione.
Fissato un qualsiasi ordine delle biglie colorate.
Numeriamo arbitrariamente le biglie blu.
Numeriamo arbitrariamente le biglie rosse.
Otteniamo n elementi distinti.
Esistono $k!$ modi di numerare le k biglie blu.
Esistono $(n-k)!$ modi di etichettare le $n-k$ biglie rosse.

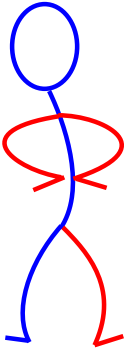
$$\#\text{ord}(n-k, k) \cdot k! \cdot (n-k)! = n!$$

$$\#\text{ord}(n-k, k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$



Coefficenti binomiali

Notazione (importante).



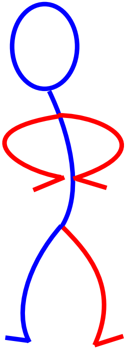
Coefficenti binomiali

Notazione (importante).

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Si legge: **n su k**.

In inglese: **n choose k**.



Coefficenti binomiali

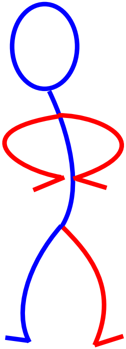
Notazione (importante).

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

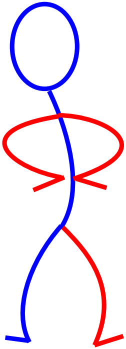
Si legge: **n su k**.

In inglese: **n choose k**.

I numeri $\binom{n}{k}$ si chiamano **cefficienti binomiali**.

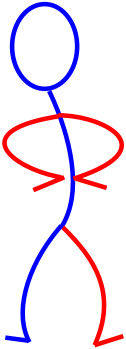


Problema 4. (= Problema 3)



Scelte semplici II

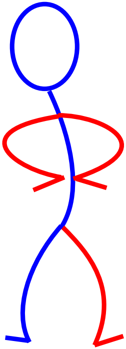
Problema 4. (= Problema 3)
Quanti sottoinsiemi di cardinalità k ha un insieme di n elementi?



Scelte semplici II

Problema 4. (= Problema 3)
Quanti sottoinsiemi di cardinalità k ha un insieme di n elementi?

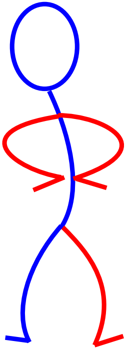
Riformulazione.



Scelte semplici II

Problema 4. (= Problema 3)
Quanti sottoinsiemi di cardinalità k ha un insieme di n elementi?

Riformulazione.
Identifichiamo un ordinamenti di biglie colorate e sottoinsiemi.

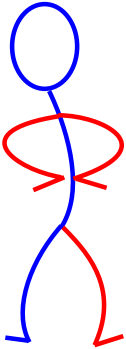


Scelte semplici II

Problema 4. (= Problema 3)
Quanti sottoinsiemi di cardinalità k ha un insieme di n elementi?

Riformulazione.
Identifichiamo un ordinamenti di biglie colorate e sottoinsiemi.

Esempio: $n = 7$, $n - k = 4$ e $k = 3$



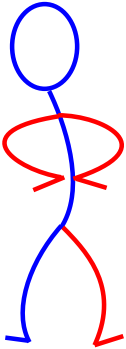
Scelte semplici II

Problema 4. (= Problema 3)
Quanti sottoinsiemi di cardinalità k ha un insieme di n elementi?

Riformulazione.
Identifichiamo un ordinamenti di biglie colorate e sottoinsiemi.

Esempio: $n = 7$, $n - k = 4$ e $k = 3$

Consideriamo l'ordinamento:



Scelte semplici II

Problema 4. (= Problema 3)
Quanti sottoinsiemi di cardinalità k ha un insieme di n elementi?

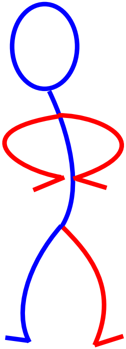
Riformulazione.
Identifichiamo un ordinamenti di biglie colorate e sottoinsiemi.

Esempio: $n = 7$, $n - k = 4$ e $k = 3$

Consideriamo l'ordinamento:

•	•	•	•	•	•	•
1	2	3	4	5	6	7

Numeriamo le posizioni (non le biglie):



Scelte semplici II

Problema 4. (= Problema 3)
Quanti sottoinsiemi di cardinalità k ha un insieme di n elementi?

Riformulazione.
Identifichiamo un ordinamenti di biglie colorate e sottoinsiemi.

Esempio: $n = 7$, $n - k = 4$ e $k = 3$

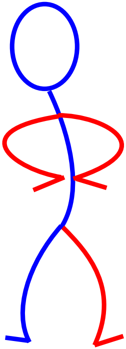
Consideriamo l'ordinamento:

• • • • • • •

1 2 3 4 5 6 7

Numeriamo le posizioni (non le biglie):

Associamo l'insieme $\{3, 5, 6\}$.



Scelte semplici II

Problema 4. (= Problema 3)
Quanti sottoinsiemi di cardinalità k ha un insieme di n elementi?

Riformulazione.
Identifichiamo un ordinamenti di biglie colorate e sottoinsiemi.

Esempio: $n = 7$, $n - k = 4$ e $k = 3$

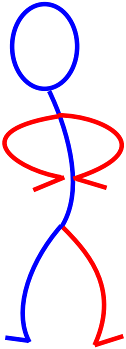
Consideriamo l'ordinamento:

•	•	•	•	•	•	•
1	2	3	4	5	6	7

Numeriamo le posizioni (non le biglie):

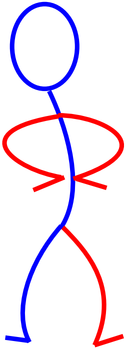
Associamo l'insieme $\{3, 5, 6\}$.

Quindi la risposta è di nuovo $\binom{n}{k}$



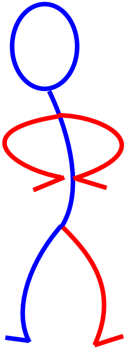
Binomio di Newton

$$(a+b)^n \quad =$$



Binomio di Newton

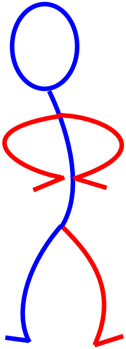
$$(a+b)^n \quad = \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$



Binomio di Newton

$$(a+b)^n \quad = \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

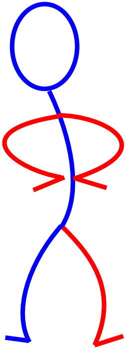
$$(a+b)^n \quad =$$



Binomio di Newton

$$(a+b)^n \quad = \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$(a+b)^n \quad = \quad \underbrace{(a+b)\cdot\cdots\cdot(a+b)}_{n \text{ volte}}$$



Binomio di Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)\cdot\cdots\cdot(a+b)}_{n \text{ volte}}$$

Per espandere il prodotto scegliamo a o b da ciascun fattore.
Per esempio con $n = 7$ consideriamo la seguente scelta:
b dai fattori in blu, a dai fattori in rosso

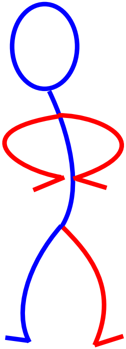
$$(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)$$

Da questa scelta otteniamo il monomio $a^4 b^3$.

Ogni altro modo di colorare 3 in blu e 4 in rosso produce $a^4 b^3$.

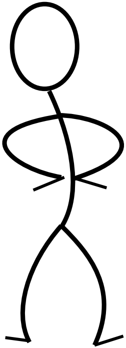
Quindi $a^4 b^3$ compare $\binom{7}{3}$ volte.

In generale $a^{n-k} b^k$ compare nella somma $\binom{n}{k}$ volte.



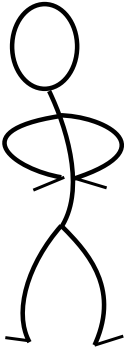
Identità notevoli

- $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \quad =$$



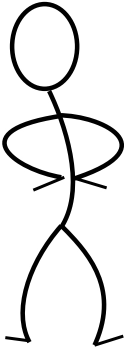
Identità notevoli

- $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$



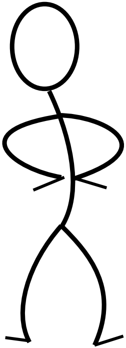
Identità notevoli

- $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$
- $$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} =$$



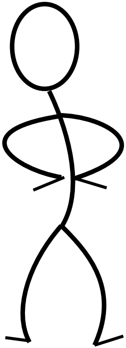
Identità notevoli

- $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$
- $$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$



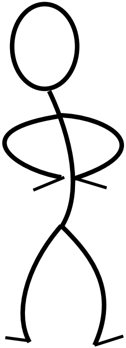
Identità notevoli

- $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$
- $$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$
- $$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$



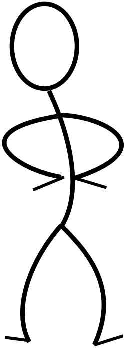
Identità notevoli

- $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$
- $$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$
- $$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$
- $$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} =$$



Identità notevoli

- $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$
- $$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$
- $$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$
- $$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$



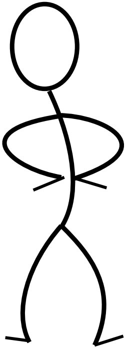
Identità notevoli

- $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$
- $$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$
- $$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$
- $$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Esercizio (difficile). Calcolare:

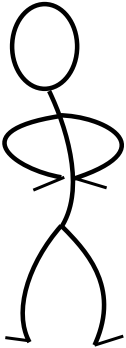
- $$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k}$$

Soluzione: 4^n



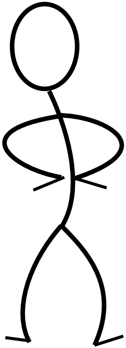
Biglie identiche in scatole numerate

Problema 6.



Biglie identiche in scatole numerate

Problema 6.
In quanti modi possiamo distribuire n biglie identiche in k scatole numerate?

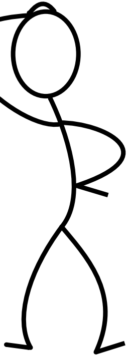


Biglie identiche in scatole numerate

Problema 6.
In quanti modi possiamo distribuire n biglie identiche in k scatole numerate?

Riformulazioni.
Quante sono le soluzioni intere non negative positive dell'equazione

$$x_1, \ldots, x_k \;=\; n \,?$$



Biglie identiche in scatole numerate

Problema 6.
In quanti modi possiamo distribuire n biglie identiche in k scatole numerate?

Riformulazioni.
Quante sono le soluzioni intere non negative positive dell'equazione

$$x_1, \ldots, x_k \;=\; n\ ?$$

Lanciamo n volte un dado con k facce numerate e costruiamo un istogramma con le frequenze. Quanti sono i possibili istogrammi?

Biglie identiche in scatole numerate

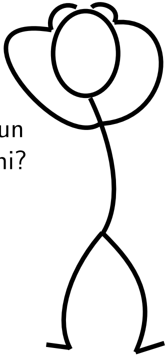
Problema 6.
In quanti modi possiamo distribuire n biglie identiche in k scatole numerate?

Riformulazioni.
Quante sono le soluzioni intere non negative positive dell'equazione

$$x_1, \ldots, x_k \;=\; n \;?$$

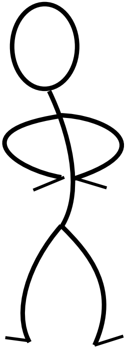
Lanciamo n volte un dado con k facce numerate e costruiamo un istogramma con le frequenze. Quanti sono i possibili istogrammi?

Soluzione: $$\binom{n+k-1}{n}$$



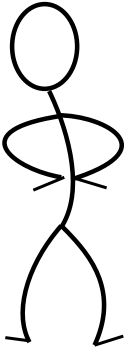
Biglie numerate in scatole identiche

Problema 7 (Da non confondere con il problema 6).



Biglie numerate in scatole identiche

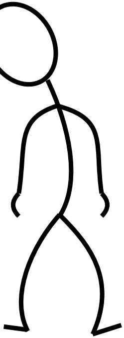
Problema 7 (Da non confondere con il problema 6).
In quanti modi possiamo distribuire n biglie numerate in k scatole identiche?



Biglie numerate in scatole identiche

Problema 7 (Da non confondere con il problema 6).
In quanti modi possiamo distribuire n biglie numerate in k scatole identiche?

Difficile.

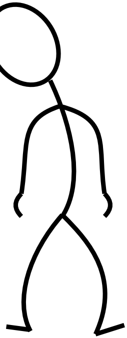


Biglie numerate in scatole identiche

Problema 7 (Da non confondere con il problema 6).
In quanti modi possiamo distribuire n biglie numerate in k scatole identiche?

Difficile.

Problema 8 (Variante del probelma 7).

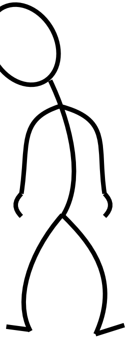


Biglie numerate in scatole identiche

Problema 7 (Da non confondere con il problema 6).
In quanti modi possiamo distribuire n biglie numerate in k scatole identiche?

Difficile.

Problema 8 (Variante del probelma 7).
Come sopra ma *senza lasciarne nessuna scatola vuota*?



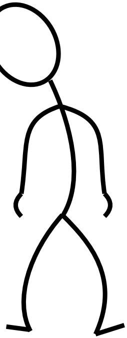
Biglie numerate in scatole identiche

Problema 7 (Da non confondere con il problema 6).
In quanti modi possiamo distribuire n biglie numerate in k scatole identiche?

Difficile.

Problema 8 (Variante del probelma 7).
Come sopra ma *senza lasciarne nessuna scatola vuota*?

Ovvero, quante sono le partizioni di n elementi in k classi?



Biglie numerate in scatole identiche

Problema 7 (Da non confondere con il problema 6).
In quanti modi possiamo distribuire n biglie numerate in k scatole identiche?

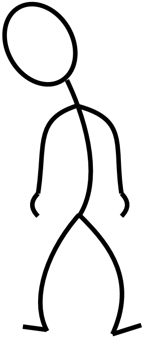
Difficile.

Problema 8 (Variante del probelma 7).
Come sopra ma *senza lasciarne nessuna scatola vuota*?

Ovvero, quante sono le partizioni di n elementi in k classi?

Difficile.

$$\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}j^n$$



Biglie numerate in scatole identiche

Problema 7 (Da non confondere con il problema 6).
In quanti modi possiamo distribuire n biglie numerate in k scatole identiche?

Difficile.

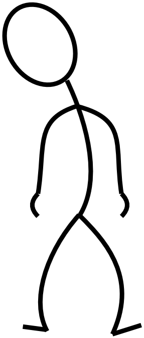
Problema 8 (Variante del probelma 7).
Come sopra ma *senza lasciarne nessuna scatola vuota*?

Ovvero, quante sono le partizioni di n elementi in k classi?

Difficile.

$$\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}j^n = \left\{\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right\}$$

Numeri di Stirling
del secondi tipo



Problema 7 (Da non confondere con il problema 6).
In quanti modi possiamo distribuire n biglie numerate in k scatole identiche?

Difficile.

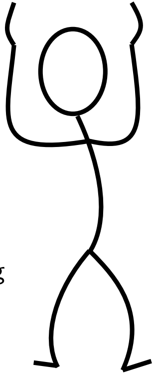
Problema 8 (Variante del probelma 7).
Come sopra ma *senza lasciarne nessuna scatola vuota*?

Ovvero, quante sono le partizioni di n elementi in k classi?

Difficile. $$\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}j^n = \left\{ {n \atop k} \right\}$$

Numeri di Stirling del secondi tipo

Non in programma



Biglie numerate in scatole identiche

Problema 7 (Da non confondere con il problema 6).
In quanti modi possiamo distribuire n biglie numerate in k scatole identiche?

Difficile. (Ma facile usando i numeri di Stirling del secondo tipo.)

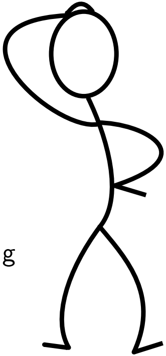
Problema 8 (Variante del probelma 7).
Come sopra ma *senza lasciarne nessuna scatola vuota*?

Ovvero, quante sono le partizioni di n elementi in k classi?

Difficile. $$\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}j^n = \left\{ {n \atop k} \right\}$$

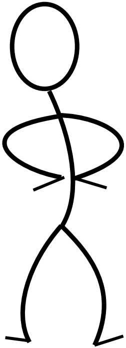
Numeri di Stirling
del secondi tipo

Non in programma



Biglie identiche in scatole numerate (soluzione)

Problema 6.
In quanti modi possiamo distribuire $n = 9$ biglie identiche in $k = 6$ scatole numerate?

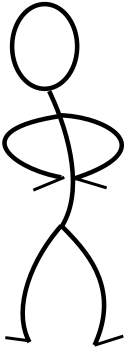


Biglie identiche in scatole numerate (soluzione)

Problema 6.
In quanti modi possiamo distribuire $n = 9$ biglie identiche in $k = 6$ scatole numerate?

Rappresentiamo la distribuzione delle biglie con barre e punti.

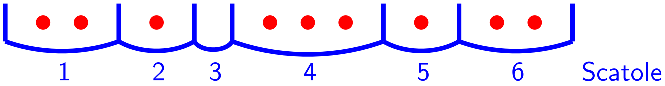
| • • | • | | • • • | • | • • |

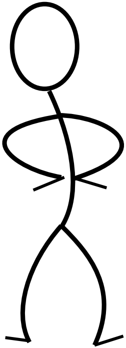


Biglie identiche in scatole numerate (soluzione)

Problema 6.
In quanti modi possiamo distribuire $n = 9$ biglie identiche in $k = 6$ scatole numerate?

Rappresentiamo la distribuzione delle biglie con barre e punti.





Biglie identiche in scatole numerate (soluzione)

Problema 6.
In quanti modi possiamo distribuire $n = 9$ biglie identiche in $k = 6$ scatole numerate?

Rappresentiamo la distribuzione delle biglie con barre e punti.

$$| \bullet \; \bullet \; | \; \bullet \; | \; | \; \bullet \; \bullet \; \bullet \; | \; \bullet \; | \; \bullet \; \bullet \; |$$

Tendendo fisse la prima e l'ultima barra.

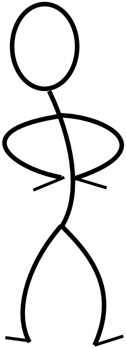
Una configurazione barre / punti

corrisponde a

una distribuzione di biglie nelle scatole.

$k - 1$ barre blu ($=$ scatole - 1)

n punti ($=$ biglie)



Biglie identiche in scatole numerate (soluzione)

Problema 6.
In quanti modi possiamo distribuire $n = 9$ biglie identiche in $k = 6$ scatole numerate?

Rappresentiamo la distribuzione delle biglie con barre e punti.

| • • | • | | • • • | • | • • |

Tendendo fisse la prima e l'ultima barra.

Una configurazione barre / punti

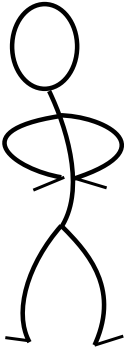
corrisponde a

una distribuzione di biglie nelle scatole.

$k - 1$ barre blu (= scatole - 1)

n punti (= biglie)

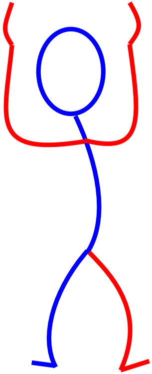
$$\binom{n+k-1}{n}$$



Biglie identiche in scatole numerate (soluzione)

Problema 6.
In quanti modi possiamo distribuire $n = 9$ biglie identiche in $k = 6$ scatole numerate?

Rappresentiamo la distribuzione delle biglie con barre e punti.



$$| \bullet \; \bullet \; | \; \bullet \; | \; | \; \bullet \; \bullet \; \bullet \; | \; \bullet \; | \; \bullet \; \bullet \; |$$

Tendendo fisse la prima e l'ultima barra.

Una configurazione barre / punti

corrisponde a

una distribuzione di biglie nelle scatole.

$k - 1$ barre blu (= scatole - 1)

n punti (= biglie)

$$\binom{n+k-1}{n}$$