Binomio di Newton (digressione)

Perché si chiamano **coefficienti binomiali**?

Espandiamo il prodotto:

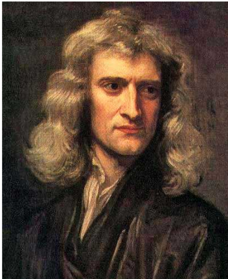
$$(a+b)^n \quad = \quad \underbrace{(a+b)\cdot\dots\cdot(a+b)}_{n \text{ volte}}$$

Scegliamo a o b da ciascun fattore in tutti i modi possibili.

Quindi ogni termine ha la forma $a^k b^{n-k}$ per qualche $0 \leq k \leq n$.

Il temine $a^k b^{n-k}$ comparirà nella somma $\binom{n}{k}$ volte.

Quindi: $$(a+b)^n \quad = \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$



Distribuzione binomiale (8)

Abbiamo n copie identiche della solita urna **U**.

Qual è la probabilità di estrarre k biglie rosse e $n-k$ biglie blu?

Dall'esempio precedente è chiaro che la risposta ha la forma:

$$\binom{n}{k} \; P(R)^k \; P(B)^{n-k} \qquad = \binom{n}{k} \; P(R)^k \left(1 - P(R)\right)^{n-k}$$

I coefficiente richiesto è $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

$$\binom{n}{k} = \left| \left\{ \text{ eventi } R \times B \times \ldots \times R \times B \times R \text{ con } k \text{ volte } R \text{ e } n-k \text{ volte } \mathrm{B} \right\} \right|$$

coefficienti binomiali

Esempio.

Una scatola di dadi contiene qualche dado truccato che produce 6 con la probabilità di $1/4$. Indichiamo con T l'insieme dei dadi truccati.

Eseguiamo un test: lanciamo un dado 20 volte e se 6 esce ≥ 4 volte diciamo che l'esito è positivo (sospetto truccato).

- Qual è la **sensibilità** del test? $P(+|T)$

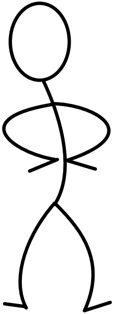
$$\sum_{k=4}^{20} \binom{20}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{20-k} = .77$$

- Qual è la **specificità** del test $P(-|\neg T)$.

$$\sum_{k=0}^{3} \binom{20}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{20-k} = .57$$

Un test con 500 lanci valutato positivo se 6 esce ≥ 100 volte ha una sensibilità del 99.6% e specificità del 97.2%.

Variabili aleatorie (v.a.)



Definizione/Esempi

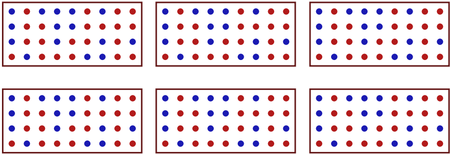
Una **variabile aleatoria (v.a.)**

In inglese **random variable (r.v.)**

è una funzione $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

Per il momento vedremo solo v.a. **discrete** che sono funzioni $X : \Omega \to \mathbb{N}$

Esempi:



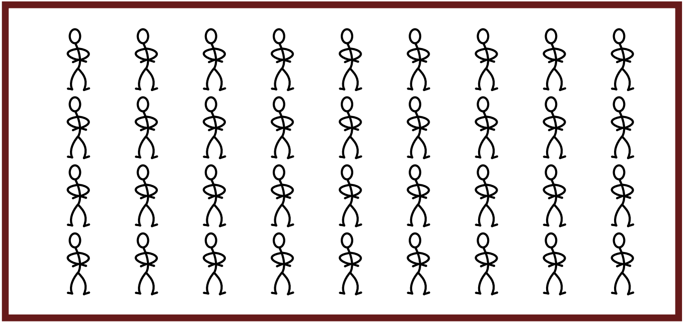
$$\Omega = \mathbf{U}^6 = \{\langle b_1 \ldots, b_6\rangle \ : \ b_i \in \mathbf{U}\}$$

Le seguenti sono variabili aleatorie:

- $X \ : \ \langle b_1 \ldots, b_6\rangle \mapsto$ numero di biglie rosse in $\{b_1 \ldots, b_6\}$.
- $X \ : \ \langle b_1 \ldots, b_6\rangle \mapsto$ minimo i tale che b_i è blu, altrimenti 0.
- $X \ : \ \langle b_1 \ldots, b_6\rangle \mapsto$ massimo numero di biglie rosse consecutive.

Esempi

Lo spazio campionario Ω è una popolazione di persone.



Le seguenti sono variabili aleatorie:

- X :  $\mapsto$ altezza in millimetri.
- X :  $\mapsto$ peso in grammi.

Variabili aleatorie (3)

Più precisamente: una **variabile aleatoria** è una funzione $X : \Omega \to \mathbb{R}$

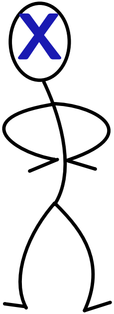
tale che $\{\omega \in \Omega \ : \ X(\omega) \leq r\} \ \in \ \mathcal{E}$ per ogni $r \in \mathbb{R}$.

Esempio (in **U**): X vale 0 per le biglie rosse e 1 per le biglie blue.

NonEsempio (in **U**): X vale 0 per le biglie della prima riga, 1 per le altre.

Scriveremo $\mathbf{P(X \leq r)}$ per $P(\{\omega \in \Omega \ : \ X(\omega) \leq r\})$.

Scriveremo $\mathbf{P(X = r)}$ per $P(\{\omega \in \Omega \ : \ X(\omega) = r\})$.



Se X è una v.a. discreta, la funzione $r \mapsto P(X = r)$

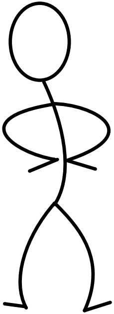
si chiama la **distribuzione** di X

Operazioni su v.a.

Se $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ sono due variabili aleatorie, anche le seguenti lo sono:

- $X + Y \ : \ \omega \ \mapsto \ X(\omega) + Y(\omega)$;
- $X \cdot Y \ : \ \omega \ \mapsto \ X(\omega) \cdot Y(\omega)$;
- $e^X \ : \ \omega \ \mapsto \ e^{X(\omega)}$;
- ecc. ecc. . . .

Esempio: Se Ω è un gruppo di persone, X il peso e Y l'altezza. Allora anche il BMI (body mass index) è una variabile aleatoria.



Per $i = 1, 2$ siano $X_i : \Omega \to \mathbb{R}$ due variabili aleatorie discrete.

Diremo che sono indipendenti se per ogni $r_i \in \mathbb{R}$

$$P(X_1{=}r_1 \text{ e } X_2{=}r_2) \;=\; P(X_1{=}r_1) \cdot P(X_2{=}r_2)$$

Esempio:

X_1 è il risultato del lancio di un dado

X_2 è il risultato del lancio di un secondo dado.