Esempio

Calcoliamo la probabilità che almeno n individui siano coinvolti in un incidente d'auto su una popolazione di 10000 individui nell'arco di un anno sapendo che la probabilità che un individuo sia coinvolto in un incidente sia 0.024%.

Avremo

$$\mu = np = 10000(0.00024) = 2.4.$$

Allora

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \frac{e^{-2.4}(2.4)^k}{k!} \\ P(X \geq n) &= \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{-2.4}(2.4)^k}{k!} \\ P(X \geq n) &= 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{-2.4}(2.4)^k}{k!} \end{aligned}$$

Per esempio $n = 2$ otteniamo $P(X \geq n) = 0.6916 = 69\%$

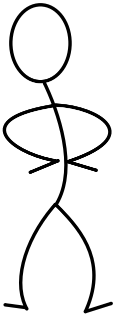
Siano X, Y v.a.i. di Poisson con parametro μ e λ. Allora

$$
\begin{aligned}
P(X+Y=k) &= \sum_{i=0}^{k} P(X=i)\cdot P(Y=k-i) \\
&= \sum_{i=0}^{k} e^{-\mu}\frac{\mu^i}{i!}e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k-i}}{(k-i)!} \\
&= e^{-(\mu+\lambda)}\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\mu^i\lambda^{k-i} \\
&= e^{-(\mu+\lambda)}\frac{(\mu+\lambda)^k}{k!}
\end{aligned}
$$

Binomio di Newton

Quindi $X+Y$ è anche una v.a. di Poisson.

Il valore atteso



Definizione

Sia $\langle \Omega, \mathcal{E}, P \rangle$ uno spazio di probabilità.

Sia $X : \Omega \to \{x_0, x_1 \ldots\} \subseteq \mathbb{R}$ una variabile aleatoria discreta.

Il **valore atteso**
(o **media della popolazione**) di X è

In inglese **expected value**
oppure **population mean**

$$\mathbf{E(X)} = \sum_{k \in \mathbb{N}} x_k \cdot P(X = x_k)$$

È come scrivere $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}$

Si indica anche con $\boldsymbol{\mu_X}$
oppure semplicemente con $\boldsymbol{\mu}$

Il valore atteso di $B(n, p)$

Se X è una v.a. con distribuzione $B(1, p)$ allora

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k \in \mathbb{N}} x_k \cdot P(X{=}x_k) \\ &= \sum_{k=0}^{1} x_k \cdot P(X{=}x_k) \\ &= 0 \cdot P(X{=}0) + 1 \cdot P(X{=}1) \;=\; 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p \;=\; p \end{aligned}$$

Se X è una v.a. con distribuzione $B(n, p)$ allora

$$E(X) \;=\; \sum_{k \in \mathbb{N}} x_k \cdot P(X{=}x_k) \;=\; \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \;=\; np$$

Laborioso da dimostrare (più avanti useremo un metodo più veloce).

Il valore atteso della somma di v.a.

Siano $X, Y : \Omega \to \mathbb{N}$ v.a. discrete a valori in $\mathbb{N}$ (per semplicità).

$$
\begin{aligned}
E(X+Y) &= \sum_{k \in \mathbb{N}} k \cdot P(X{+}Y{=}k) \\
&= \sum_{h,i \in \mathbb{N}} (h+i) \cdot P(X, Y = h, i) \\
&= \sum_{h,i \in \mathbb{N}} h \cdot P(X, Y = h, i) + \sum_{h,i \in \mathbb{N}} i \cdot P(X, Y = h, i) \\
&= \sum_{h \in \mathbb{N}} h \cdot P(X{=}h) + \sum_{i \in \mathbb{N}} i \cdot P(Y{=}i) \\
&= E(X) + E(Y)
\end{aligned}
$$

Si noti che: $\displaystyle\sum_{i \in \mathbb{N}} P(X, Y = h, i) \;=\; P(X{=}h)$

Il valore atteso della somma di v.a.

In generale:

date $X_i : \Omega \to \mathbb{R}$ variabili aleatorie per $i = 1, \ldots, n$

e posto $X \; = \; c_1 X_1 + \cdots + c_n X_n$, dove $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ sono costanti.

Ovvero X è **combinazione lineare** di $X_1, \ldots, X_n$

Allora

$$E(X) \; = \; c_1 E(X_1) + \cdots + c_n E(X_n)$$

Il valore atteso di $B(n, p)$

Sia X è una v.a. con distribuzione $B(n, p)$.

Possiamo immaginare che $X = X_1 + \cdots + X_n$ dove X_i sono $B(1, p)$.

Allora

$$\begin{aligned} E(X) &= E(X_1) + \ \dots \ + E(X_n) \\ &= \quad p \quad + \dots + \quad p \quad = \quad np \end{aligned}$$

Il valore atteso di una v.a. di Poisson

Sia X è una v.a. con distribuzione di Poisson con parametro μ.

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=0}^{\infty} k\ e^{-\mu} \frac{\mu^k}{k!} &&= e^{-\mu} \sum_{k=0}^{\infty} k\ \frac{\mu^k}{k!} \\
&= e^{-\mu} \sum_{k=1}^{\infty} k\ \frac{\mu^k}{k!} &&= e^{-\mu} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu^k}{(k-1)!} \\
&= \mu\ e^{-\mu} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu^{k-1}}{(k-1)!} &&= \mu\ e^{-\mu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu^k}{k!} \\
& &&= \mu
\end{aligned}
$$