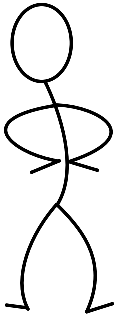
Siano $X, Y : \Omega \to \mathbb{N}$ v.a. indipendenti (per semplicità a valori in $\mathbb{N}$)

$$\begin{aligned}
E(X \cdot Y) &= \sum_{k \in \mathbb{N}} k \cdot P(X \cdot Y = k) \\
&= \sum_{h,i \in \mathbb{N}} h \cdot i \cdot P(X, Y = h, i) \\
&= \sum_{h,i \in \mathbb{N}} h \cdot i \cdot P(X{=}h) \cdot P(Y{=}i) \\
&= \sum_{h \in \mathbb{N}} h \cdot P(X{=}h) \cdot \sum_{i \in \mathbb{N}} i \cdot P(Y{=}i) \\
&= E(X) \cdot E(Y)
\end{aligned}$$

Perché indipendenti

La varianza



Definizione

Sia $\langle \Omega, \mathcal{E}, P \rangle$ uno spazio di probabilità.

Sia $X : \Omega \to \{x_0, x_1, \ldots, \} \subseteq \mathbb{R}$ una variabile aleatoria discreta.

La **varianza** di X è

$$\mathbf{Var(X)} = \sum_{k \in \mathbb{N}} (x_k - \mu)^2 \cdot P(X{=}x_k)$$

$$= E\left(X^2\right) - \mu^2$$

Si indica anche con $\boldsymbol{\sigma^2_X}$
oppure semplicemente con $\boldsymbol{\sigma^2}$

$\sigma = \sqrt{Var(X)}$ si chiama **deviazione standard**
oppure **scarto quadratico medio**

La covarianza.

Siano X, Y variabili aleatorie.

$$
\begin{aligned}
Var(X+Y) &= E\big((X+Y)^2\big) - E(X+Y)^2 \\
&= E(X^2+Y^2+2XY) - \big[E(X)+E(Y)\big]^2 \\
&= E(X^2)+E(Y^2)+E(2XY)-E(X)^2-E(Y)^2-2E(X)E(Y) \\
&= Var(X)+Var(Y) \; + \; 2\left[\boxed{E(XY)-E(X)E(Y)}\right]
\end{aligned}
$$

Si chiama **covarianza**

Si indica con **Cov(XY)**

E vale $\boxed{\mathbf{0 \text{ se } X, Y \text{ indipendenti}}}$

La varianza di $B(n, p)$

Sia X è una v.a. con distribuzione $B(1, p)$.

Allora

Nel nostro caso $X^2 = X$.

$$Var(X) \; = \; E(X^2) - E(X)^2 \; = \; p - p^2 \; = \; p\,(1-p).$$

Sia X è una v.a. con distribuzione $B(n, p)$.

Possiamo immaginare che $X = X_1 + \cdots + X_n$ dove X_i sono $B(1, p)$.

Allora

$$Var(X) = Var(X_1) + \cdots + Var(X_n) = n\,p\,(1-p)$$

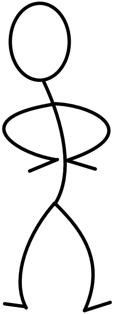
La varianza di una v.a. di Poisson

Sia X è una v.a. con distribuzione di Poisson con parametro μ.

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2\, e^{-\mu} \frac{\mu^k}{k!} &&= \sum_{k=1}^{\infty} k^2\, e^{-\mu} \frac{\mu^k}{k!} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k\, e^{-\mu} \frac{\mu^k}{(k-1)!} &&= \mu\, e^{-\mu} \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\mu^{k-1}}{(k-1)!} \\
&= \mu\, e^{-\mu} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \frac{\mu^k}{k!} &&= \mu\, E(X+1) \\
&= \mu\,(E(X)+1) &&= \mu\,(\mu+1)
\end{aligned}
$$

Quindi $Var(X) \;=\; E(X^2) - \mu^2 = \mu$

Distribuzioni continue



Definizione

Sia $X : \Omega \to \mathbb{R}$ una variabile aleatoria.

Diremo che X ha **distribuzione continua** se $P(X{=}r) = 0$ per ogni r.

> Per esempio, scegliendo un numero reale con probabilità uniforme tra 2 e 4, la probabilità di indovinare π oppure e, con tutte le loro cifre decimali, è 0. (Anche se non si tratta dell'evento vuoto.)

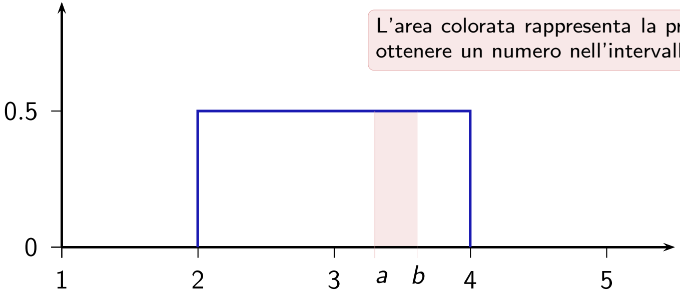
Le distribuzioni continue si rappresentano con una **densità di probabilità**

Distribuzione uniforme

Le distribuzioni continue si rappresentano con una **densità di probabilità**

Per esempio la distribuzione uniforme nell'intervallo $[2, 4]$ si rappresenta con la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 2 \\ 0.5 & \text{se } 2 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{se } 4 < x \end{cases}$$



L'area colorata rappresenta la probabilità di ottenere un numero nell'intervallo $[a, b]$.

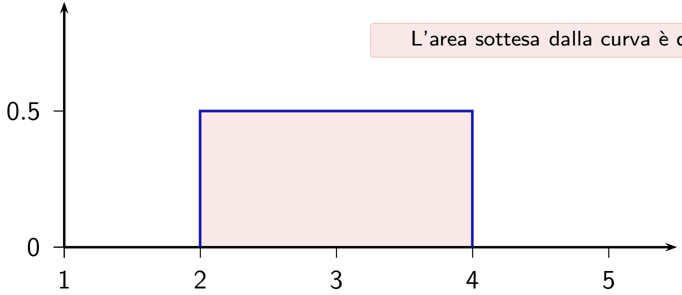
Distribuzione uniforme

Le distribuzioni continue si rappresentano con una **densità di probabilità**

Per esempio la distribuzione uniforme nell'intervallo $[2, 4]$ si rappresenta con la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 2 \\ 0.5 & \text{se } 2 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{se } 4 < x \end{cases} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

L'area sottesa dalla curva è quindi 1.

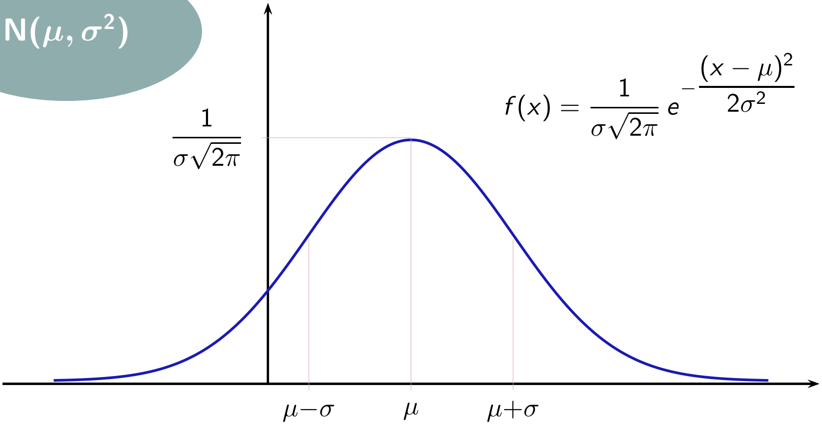


Distribuzione normale

La distribuzione più frequentemente usata è la **distribuzione normale** detta anche **di Gauss**

N(μ, σ^2)

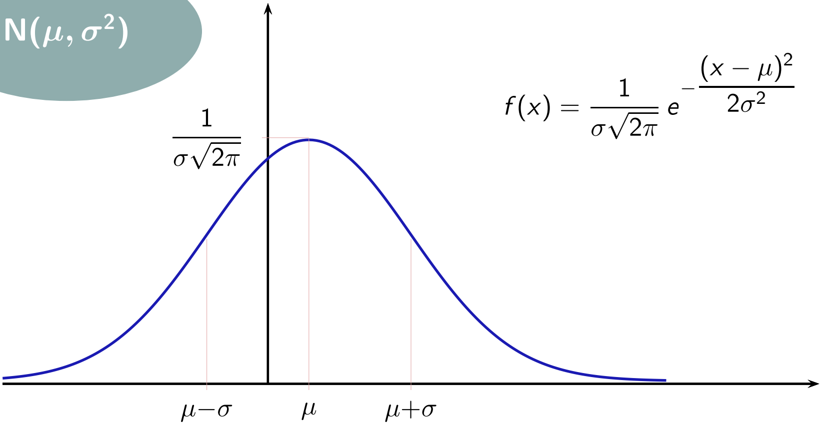
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



La distribuzione più frequentemente usata è la **distribuzione normale** detta anche **di Gauss**

N(μ, σ^2)

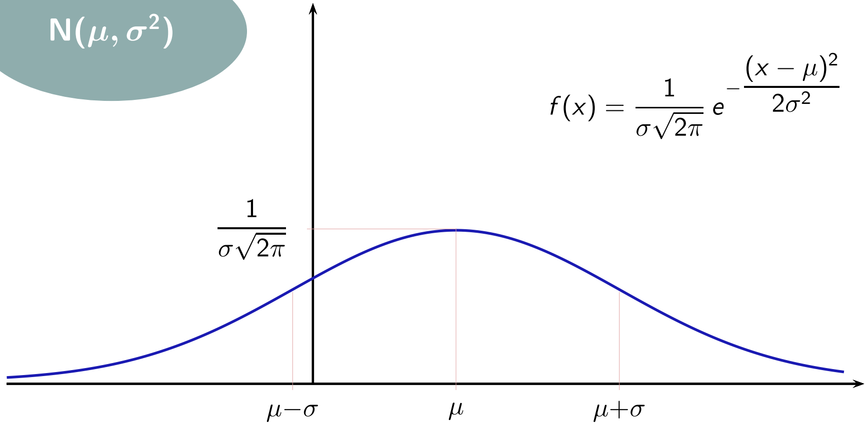
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



La distribuzione più frequentemente usata è la **distribuzione normale** detta anche **di Gauss**

N(μ, σ^2)

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

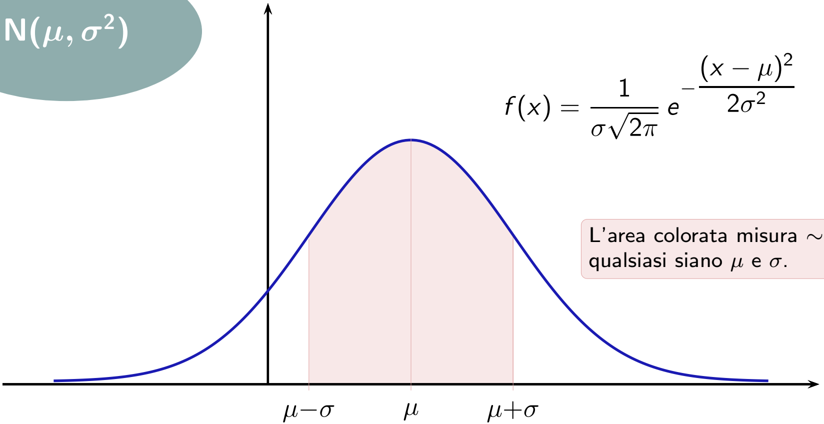


Distribuzione normale

La distribuzione più frequentemente usata è la **distribuzione normale** detta anche **di Gauss**

$N(\mu, \sigma^2)$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

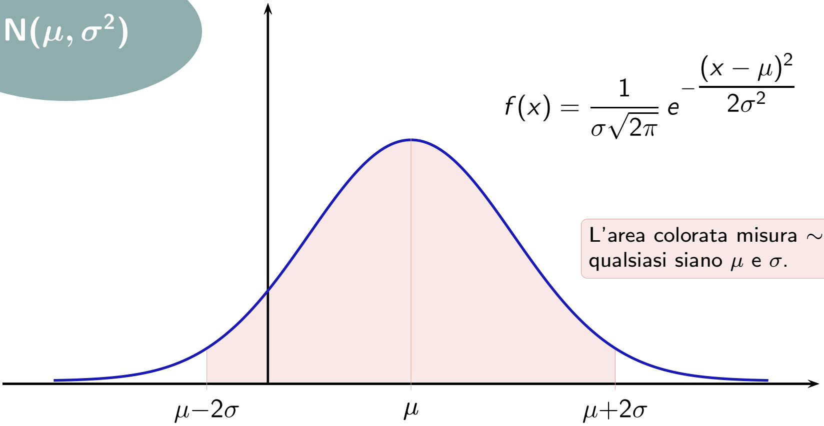


L'area colorata misura ~ 0.68 qualsiasi siano μ e σ.

La distribuzione più frequentemente usata è la **distribuzione normale** detta anche **di Gauss**

N(μ, σ^2)

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

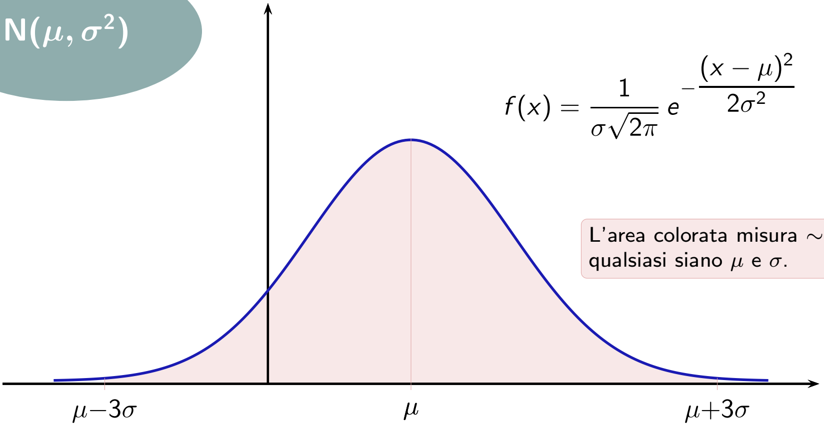


L'area colorata misura ~ 0.95 qualsiasi siano μ e σ.

La distribuzione più frequentemente usata è la **distribuzione normale** detta anche **di Gauss**

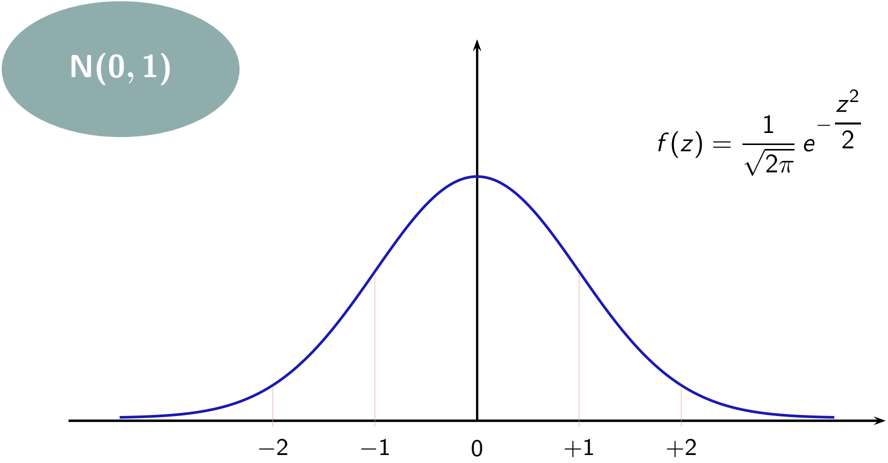
N(μ, σ^2)

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



L'area colorata misura ~ 0.997 qualsiasi siano μ e σ.

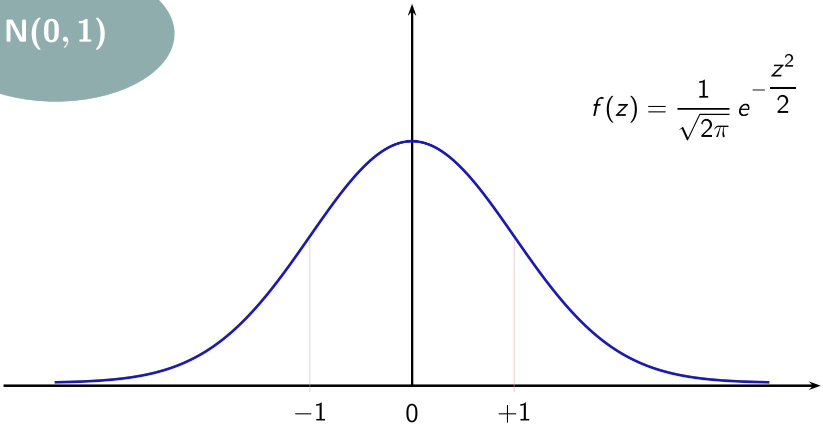
Se $\mu = 0$ e $\sigma = 1$ diremo che la normale è **standard**.



N.B. Se X è una v.a. $N(\mu, \sigma)$ allora $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$ è normale standard.

$N(0,1)$

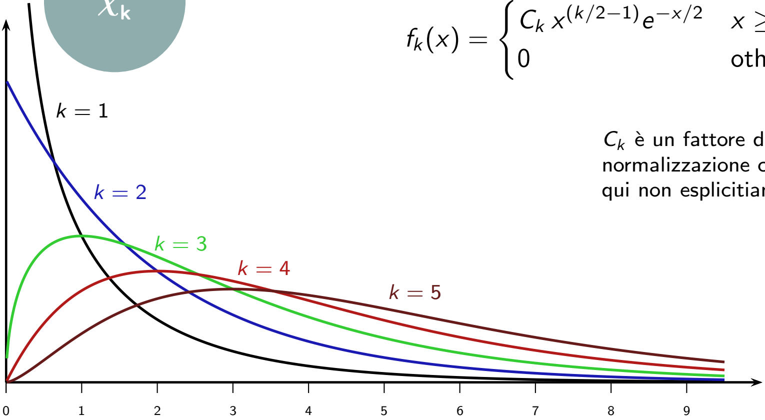
$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{z^2}{2}}$$



Se $Z_1, \dots, Z_k$ sono v.a.i. $N(0,1)$ allora $Q = \sum_{i=1}^{k} Z_i^2$ ha distribuzione

χ^2_k

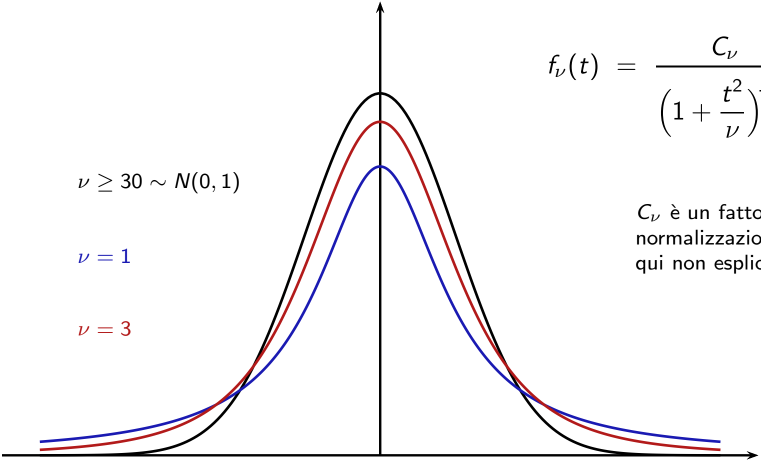
$$f_k(x) = \begin{cases} C_k\, x^{(k/2-1)} e^{-x/2} & x \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



C_k è un fattore di normalizzazione che qui non esplicitiamo.

Le distribuzioni t di Student.

Anche qui una famiglia di distribuzioni (ν è un qualsiasi intero positivo)



$$f_\nu(t) \;=\; \frac{C_\nu}{\left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{\frac{\nu+1}{2}}}$$

C_ν è un fattore di normalizzazione che qui non esplicitiamo.