Valore atteso e varianza di una v.a. continua

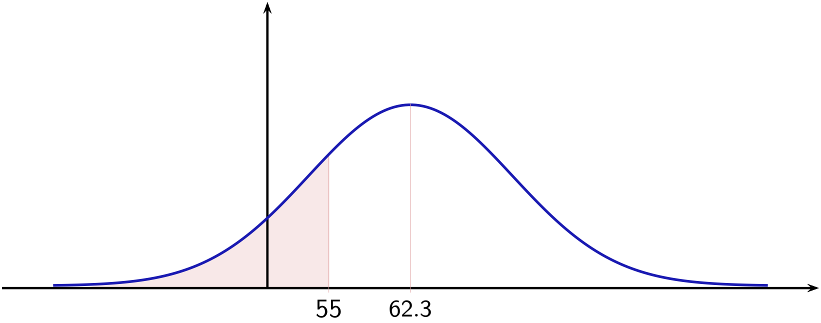
Sia X è una v.a. continua con densità di probabilità $f(x)$.

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx &&= \mu \\
Var(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2\, f(x)\, dx &&= E(X^2) - E(X)^2
\end{aligned}
$$

Esempio

La distribuzione di peso di una data popolazione è approssimativamente normale con media $\mu = 62.3$kg e deviazione standard $\sigma = 13.2$kg.

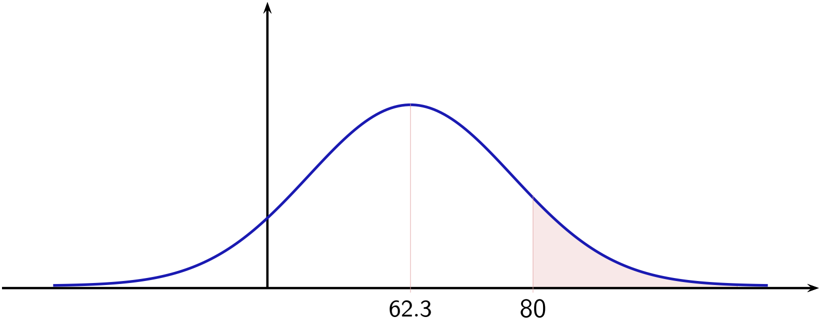
- Qual'è la probabilità che un soggetto selezionato casualmente pesi meno di 55kg?



Esempio

La distribuzione di peso di una data popolazione è approssimativamente normale con media $\mu = 62.3$kg e deviazione standard $\sigma = 13.2$kg.

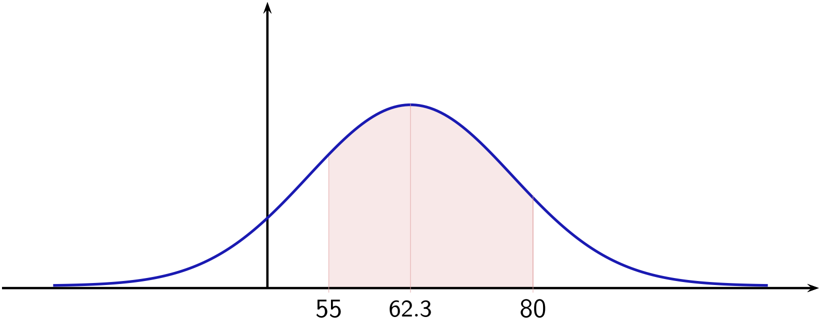
- Qual'è la probabilità che pesi più di 80kg?



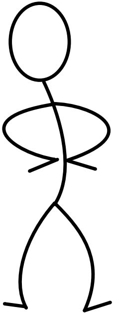
Esempio

La distribuzione di peso di una data popolazione è approssimativamente normale con media $\mu = 62.3$kg e deviazione standard $\sigma = 13.2$kg.

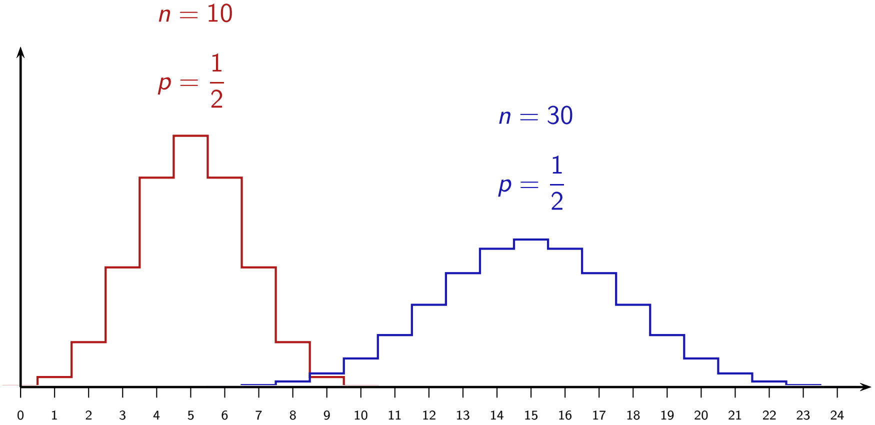
- Qual'è la probabilità che tra 5 soggetti maschi selezionati casualmente dalla popolazione, almeno uno abbia un peso non compreso nell'intervallo 55-80kg?



Approssimazioni continue

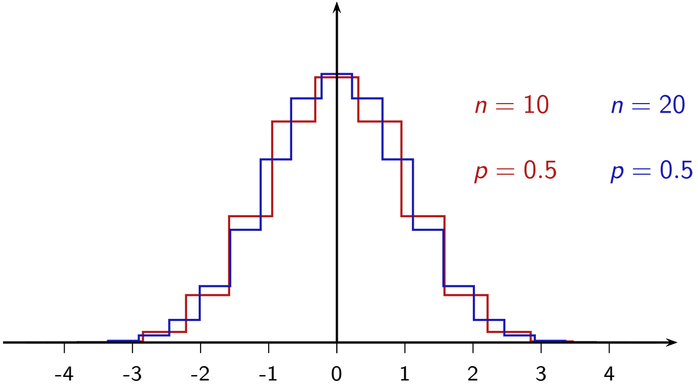


Vogliamo confrontare v.a. di tipo $B(n,p)$ per n diversi.



Approssimazione normale della binomiale.

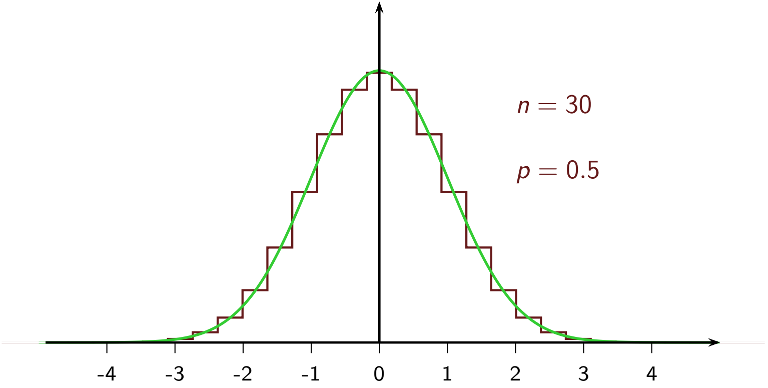
Conviene usare la forma standardizzata $Z = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$



Approssimazione normale della binomiale.

Conviene usare la forma standardizzata $Z = \dfrac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$

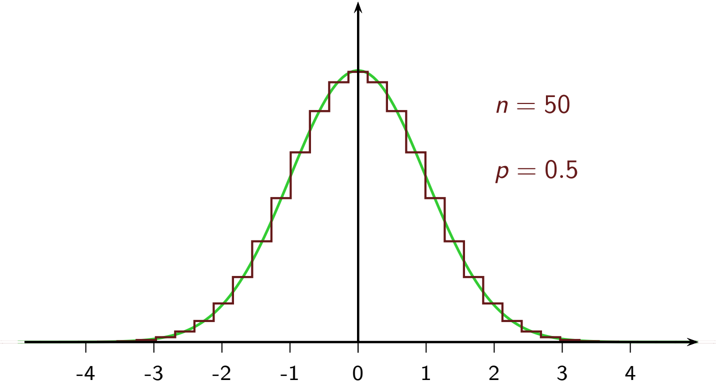
Per n abbastanza grande è ben approssimata da una distribuzione $N(0,1)$.



Approssimazione normale della binomiale.

Conviene usare la forma standardizzata $Z = \dfrac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$

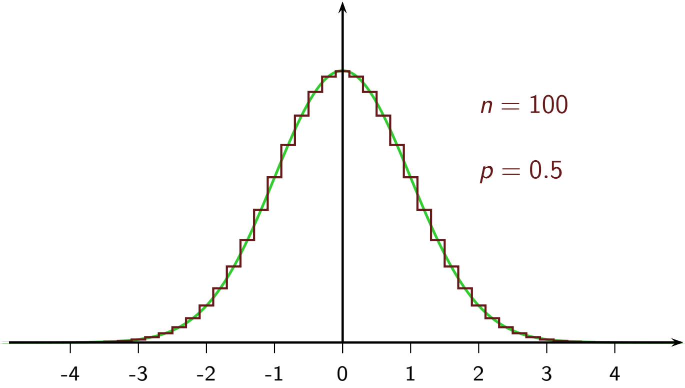
Per n abbastanza grande è ben approssimata da una distribuzione $N(0,1)$.



Approssimazione normale della binomiale.

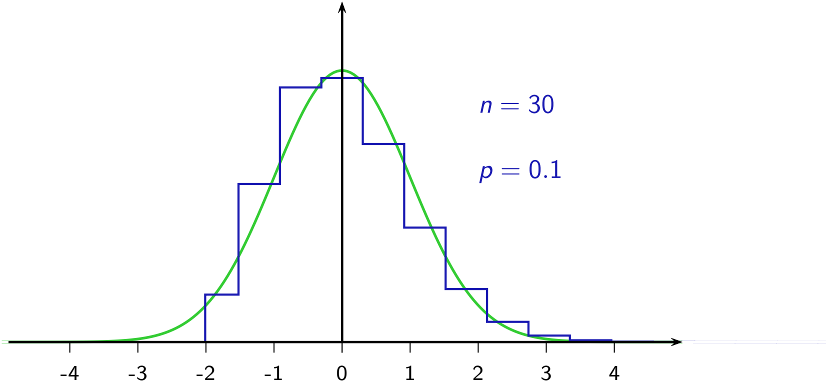
Conviene usare la forma standardizzata $Z = \dfrac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$

Per n abbastanza grande è ben approssimata da una distribuzione $N(0,1)$.



Approssimazione normale della binomiale.

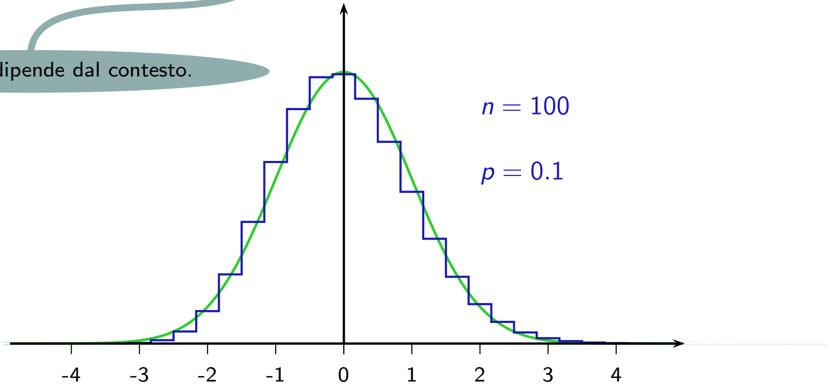
Ma se p è distante da 0.5, l'approssimazione è meno buona.



Ma se p è distante da 0.5, l'approssimazione è meno buona.

Per un'approssimazione accettabile si richiede $np \geq 5$ e $n(1-p) \geq 5$

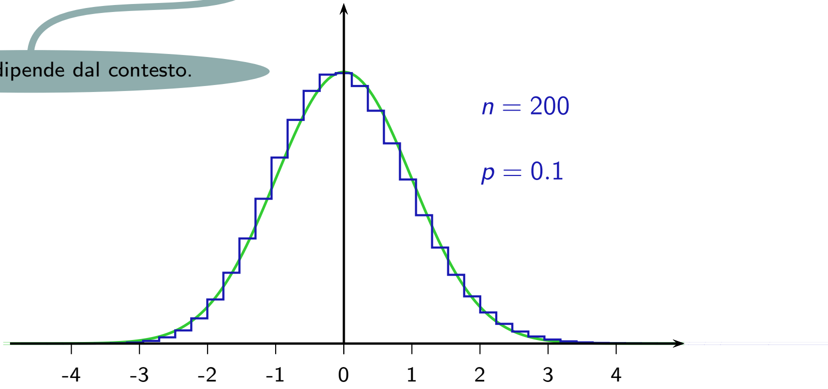
Ovviamente, dipende dal contesto.



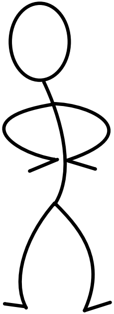
Ma se p è distante da 0.5, l'approssimazione è meno buona.

Per un'approssimazione accettabile si richiede $np \geq 5$ e $n(1-p) \geq 5$

Ovviamente, dipende dal contesto.



Statistiche



Campioni e stimatori

Un **campione** è una tupla $X_1, \ldots, X_n$ di v.a.i.e.

Variabili aleatorie indipendenti equidistribuite.

Indipendent, identically distributed random variables i.i.d.r.v.

La lunghezza n della tupla è detta **rango** del campione.

Un campione rappresenta i dati (scelti casualmente in una popolazione).

Una **statistica** è una v.a. della forma $F(X_1, \ldots, X_n)$, dove $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Uno **stimatore** è una statistica usata per stimare un parametro.

Ovvero: media, varianza, e simili.

Campioni e stimatori

Esempio: la **media del campione** $X_1, \ldots, X_n$ è la statistica

$$F(X_1, \ldots, X_n) \;=\; \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

che verrà usata come **stimatore del valore di attesa**.

Esempio: se μ è il valore di attesa di $X_1, \ldots, X_n$ allora

$$F(X_1, \ldots, X_n) \;=\; \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \mu\right)^2$$

è uno **stimatore della varianza**

Anche se non molto utile, perché generalmente μ non si conosce!

Un campione e stimatori

Sia $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una statistica e $X_1, \ldots, X_n$ una tupla di v.a.i.i.d.

In inglese: **unbiased**

Diremo che è uno stimatore **non distorto** del valore di attesa.

$$E(F(X_1, \ldots, X_n)) = \mu$$

Il valore di attesa di $X_1, \ldots, X_n$ (È lo stesso per tutte.)

Diremo che è uno stimatore **non distorto** della varianze se

$$E(F(X_1, \ldots, X_n)) = \sigma^2$$

La varianza di $X_1, \ldots, X_n$.

Campioni e stimatori

La media del campione $X_1, \ldots, X_n$ è uno stimatore non distorto:

$$E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \;=\; \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) \;=\; \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu \;=\; \mu$$

Se μ è il valore di attesa di $X_1, \ldots, X_n$ allora

$$E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2\right) \;=\; \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\big((X_i - \mu)^2\big) \;=\; \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \sigma^2 \;=\; \sigma^2$$

è uno stimatore non distorto della varianza.