Test di ipotesi (a due code, σ nota)

Il tempo di sopravvivenza di pazienti affetti da un tipo di tumore è di $\mu_0 = 38.3$ mesi. In un test su $n = 100$ pazienti con un nuovo farmaco abbiamo osservato un tempo di sopravvivenza di $\bar{x} = 46.9$ mesi. Assumiamo nota la deviazione standard $\sigma = 43.3$ mesi

- vogliamo sapere se esiste un intervallo I di confidenza al 95% tale che $\mu_0 \in I$?

Ovvero esiste ε tale che $P\big(|\bar{X} - \mu_0| \leq \varepsilon\big) = 0.95$ e $\mu_0 \in [\bar{x} - \varepsilon,\ \bar{x} + \varepsilon]$.

$$\frac{\varepsilon}{\sigma/\sqrt{n}} = 1.96 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = 8.5 \quad \Rightarrow \quad \mu_0 = 38.3 \notin [38.4,\ 55.4]$$

Tale I non esiste. Possiamo concludere che i dati NON sono compatibili con $\mu = \mu_0$ e che la nuova terapia ha un effetto.

Test di ipotesi (a due code, σ nota)

Il tempo di sopravvivenza di pazienti affetti da un tipo di tumore è di $\mu_0 = 38.3$ mesi. In un test su $n = 100$ pazienti con un nuovo farmaco abbiamo osservato un tempo di sopravvivenza di $\bar{x} = 46.9$ mesi. Assumiamo nota la deviazione standard $\sigma = 43.3$ mesi.

- vogliamo sapere se esiste un intervallo I di confidenza al 99% tale che $\mu_0 \in I$?

Ovvero esiste ε tale che $P\big(|\bar{X} - \mu_0| \leq \varepsilon\big) = 0.99$ e $\mu_0 \in [\bar{x} - \varepsilon,\ \bar{x} + \varepsilon]$.

$$\frac{\varepsilon}{\sigma/\sqrt{n}} = 2.58 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = 11.2 \quad \Rightarrow \quad \mu_0 = 38.3 \in [27.1,\ 58.1]$$

Tale I esiste. Possiamo concludere che i dati sono compatibili con $\mu = \mu_0$ e che la nuova terapia potrebbe non avere alcun effetto.

Terminologia: ipotesi nulla, significatività α

Il tempo di sopravvivenza di pazienti affetti da un tipo di tumore è di $\mu_0 = 38.3$ mesi. In un test su $n = 100$ pazienti con un nuovo farmaco abbiamo osservato un tempo di sopravvivenza di $\bar{x} = 46.9$ mesi. Assumiamo nota la deviazione standard $\sigma = 43.3$ mesi.

H_0 La nuova cura ha la stessa efficacia della vecchia (ovvero $\mu = \mu_0$, dove μ è la media per il nuovo farmaco).

Nel primo caso (intervallo di confidenza al 95%) abbiamo stabilito che c'è abbastanza evidenza per **rifiutare** H_0 che chiameremo **ipotesi nulla**:

Nel secondo caso (intervallo di confidenza al 99%) abbiamo stabilito che **NON** c'è abbastanza evidenza per **rifiutare** H_0

Chiamereno livello α (o livello di **significatività del test**) la probabilità di rifiutare l'ipotesi nulla quando questa è vera (detto **errore di tipo I** o **falso positivo**). Quindi $\alpha = 1 -$ livello di confidenza.

Terminologia: il p-valore.

Il tempo di sopravvivenza di pazienti affetti da un tipo di tumore è di $\mu_0 = 38.3$ mesi. In un test su $n = 100$ pazienti con un nuovo farmaco abbiamo osservato un tempo di sopravvivenza di $\bar{x} = 46.9$ mesi. Assumiamo nota la deviazione standard $\sigma = 43.3$ mesi.

H_0 La nuova cura ha la stessa efficacia della vecchia (ovvero $\mu = \mu_0$, dove μ è la media per il nuovo farmaco).

Calcoliamo il minimo livello α per cui possiamo rifiutare l'ipotesi nulla. Chiameremo questo il **p-valore**.

Calcoliamo prima il minimo ε tale che $\mu_0 \in [\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon]$.

Troviamo $\varepsilon = |\bar{x} - \mu_0| = 8.6$.

$$p := P\Big(\frac{|\bar{X} - \mu|}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{\varepsilon}{\sigma/\sqrt{n}}\Big) \;=\; P\Big(|Z| > \frac{8.6}{4.33}\Big) \;=\; 0.046$$

Se $p < \alpha$ rifiutiamo H_0, se $\alpha < p$ non rifiutiamo H_0.

Quindi il limite tra rifiutare e non è per $\alpha = 1 - 0.954 = 0.046$.

Test di ipotesi a una coda.

Il tempo di sopravvivenza di pazienti affetti da un tipo di tumore è di $\mu_0 = 38.3$ mesi. In un test su $n = 100$ pazienti con un nuovo farmaco abbiamo osservato un tempo di sopravvivenza di $\bar{x} = 46.9$ mesi. Assumiamo nota la deviazione standard $\sigma = 43.3$ mesi.

H_0 La nuova cura NON è più efficace della vecchia (ovvero $\mu \leq \mu_0$)

Ovvero, vogliamo sapere se esiste un intervallo di confidenza con livello di confidenza $1 - \alpha$ tale che una qualche $\mu \leq \mu_0$ appartiene ad I?

N.B. $\exists \mu \leq \mu_0 \;\; \mu \in [\bar{x} - \varepsilon, +\infty) \quad \Leftrightarrow \quad \exists \mu \leq \mu_0 \;\; \mu \in [\bar{x} - \varepsilon, +\infty)$

$$\Leftrightarrow \quad \bar{x} - \varepsilon \leq \mu_0$$

Esempio:

$$\alpha = 0.01 \Rightarrow P\big(\bar{X} - \varepsilon \leq \mu\big) = 0.99 \Rightarrow \frac{\varepsilon}{\sigma/\sqrt{n}} = 2.33 \Rightarrow \varepsilon = 10.1.$$

Poiché $\mu_0 = 38.3 \in [36.8,\ +\infty)$ NON rifiutiamo H_0.

Test di ipotesi a una coda.

Il tempo di sopravvivenza di pazienti affetti da un tipo di tumore è di $\mu_0 = 38.3$ mesi. In un test su $n = 100$ pazienti con un nuovo farmaco abbiamo osservato un tempo di sopravvivenza di $\bar{x} = 46.9$ mesi. Assumiamo nota la deviazione standard $\sigma = 43.3$ mesi.

H_0 La nuova cura NON è più efficace della vecchia (ovvero $\mu \leq \mu_0$)

Più in generale calcoliamo il p-valore per H_0.

H_0 non viene rifiutata se $\bar{x} - \varepsilon \leq \mu_0$.

Il minimo ε per cui ciò accade è $\bar{x} - \mu_0 = 8.6$

$$p = P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{\varepsilon}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = P\left(Z > \frac{8.6}{4.33}\right) = 0.02$$

Il p-valore è 0.02.

Se scegliamo il livello di significatività $\alpha = 0.05$ l'ipotesi nulla viene rifiutata.

Terminologia per i test di ipotesi.

- **Ipotesi nulla**. Chiamata $\mathbf{H_0}$ è l'ipotesi che si vuole decidere se rifiutare. Esempi: $\mu = \mu_0$ o $\mu \leq \mu_0$.
- **Ipotesi alternativa**. Chiamata H_A è la negazione dell'ipotesi nulla.
- **Livello di significatività α**. È 1−livello di confidenza dell intervallo di confidenza con cui si lavora.
- **p-valore**. Massimo α per cui i dati rifiutano l'ipotesi nulla.
  Minimo α per cui i dati non rifiutano l'ipotesi nulla.
- **Test a due code**. Quando H_0 è del tipo $\mu = \mu_0$ e gli intervalli sono bilaterali.
- **Test a una coda**. Quando H_0 è del tipo $\mu \leq \mu_0$ e gli intervallio unilaterali.

Test di ipotesi a due code con σ ignota

Il tempo di sopravvivenza di pazienti affetti da un tipo di tumore è di $\mu_0 = 38$ mesi. In un test su $n = 16$ pazienti con un nuovo farmaco abbiamo osservato un tempo di sopravvivenza di $\bar{x} = 46$ mesi con deviazione standard $s = 20$ mesi. Assumendo che le fariabili aleatorie abbiano tutte una distribuzione normale, si calcoli il p-valore per

H_0 la nuova terapia ha la stessa efficacia della vecchia ($\mu = \mu_0$).

Il minimo ε tale che $\mu_0 \in [\bar{x} - \varepsilon,\ \bar{x} + \varepsilon]$ è $\varepsilon = |\bar{x} - \mu_0| = 8$.

$$p \;=\; P\Big(\frac{|\bar{X} - \mu_0|}{S/\sqrt{n}} > \frac{\varepsilon}{s/\sqrt{n}}\Big) \;=\; P\Big(|T_{15}| > \frac{8}{5}\Big) \;=\; 0.13$$

Test di ipotesi a una coda con σ ignota

Il tempo di sopravvivenza di pazienti affetti da un tipo di tumore è di $\mu_0 = 38$ mesi. In un test su $n = 16$ pazienti con un nuovo farmaco abbiamo osservato un tempo di sopravvivenza di $\bar{x} = 46$ mesi con deviazione standard $s = 20$ mesi. Assumendo che le fariabili aleatorie abbiano tutte una distribuzione normale, si calcoli il p-valore per

H_0 la nuova terapia non ha più efficacia della vecchia ($\mu \leq \mu_0$).

Il minimo ε tale che $\bar{x} - \varepsilon$ è $\varepsilon = \bar{x} - \mu_0 = 8$.

$$p = P\Big(\frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} > \frac{\varepsilon}{s/\sqrt{n}}\Big) = P\Big(T_{15} > \frac{8}{5}\Big) = 0.065$$