MATEMATICA per CTF

ESERCIZI

☐ Data la successione $a_n = \frac{1}{n^2+1}$, $n = 1, 2, 3, \dots$

1) Determinare a_{50}
2) Determinare la differenza $a_3 - a_2$
3) Determinare la differenza $a_{n+1} - a_n$ in dipendenza da n
4) Determinare $\lim_{n\to+\infty} a_n$

☐ Determinare il comportamento delle seguenti serie e calcolarne la somma nel caso di convergenza

1) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n$ 2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n}$ 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}$ (notare che la serie inizia con $n = 1$)

4) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2n}$ 5) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cos^n x$, in questo caso specificare il comportamento in funzione di x

☐ Esercizio a quiz come dato nella prova scritta:

Data la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(x-2)^n}$ crocettare le proposizioni vere e quelle false usando le caselle V F:

(1) V F ☐☐ la serie converge per $x = 0$

(2) V F ☐☐ la serie converge per ogni $x \in (2, 4)$

(3) V F ☐☐ la serie ha somma $\frac{x-2}{x-3}$ per i valori di x per cui è convergente

(4) V F ☐☐ la serie coincide con la serie $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n \log(x-2)}$ (SOL No, coincide solo per $x - 2 > 0$, cioè $x > 2$)

(5) V F ☐☐ la serie oscilla per $x \in [1, 2)$.

□ Nei seguenti 3 esercizi assumiamo il seguente modello di smaltimento di un farmaco nell'organismo umano.
Sia C_n la quantità di farmaco presente nell'organismo al giorno n, allora assumiamo che valga $\boxed{C_{n+1} = \alpha C_n}$ dove $1-\alpha$ è il fattore di smaltimento dello specifico farmaco. (Nota: questo modello vale per la maggior parte dei farmaci).
Si dice "emivita" di un farmaco il tempo necessario al dimezzamento della quantità di farmaco presente nell'organismo.

(1) Un farmaco viene somministrato con una dose da 50 mg. L'organismo umano ne smaltisce il 30% giornalmente. Determinare l'emivita del farmaco.

SOL $\begin{cases} C_0 = 50 \\ C_{n+1} = \alpha C_n \end{cases}$ con $\alpha = 70\% = 7/10$ segue che $C_n = \alpha^n C_0$. "Emivita" = tempo di dimezzamento della quantità del farmaco nel corpo, dunque pongo $C_n = \frac{1}{2} C_0$; ho l'equazione $\frac{1}{2} C_0 = \alpha^n C_0$ da cui $\alpha^n = \frac{1}{2}$, ovvero $n = -\frac{\log 2}{\log \alpha} = -\frac{\log 2}{\log(7/10)}$
Dunque l'emivita del farmaco, in giorni, è il più piccolo intero maggiore del valore $-\frac{\log 2}{\log(7/10)}$ (Notare che si tratta di un numero positivo poiché $\log 7/10 < 0$).
NOTARE che il valore dell'emivita non dipende dalla quantità $C_0 = 50$ mg.

(2) Si supponga di avere una dose di farmaco da 50 mg e di conoscere che l'emivita è di 2 giorni. Determinare il fattore α di eliminazione giornaliera.

SOL Come prima si ha $n = -\frac{\log 2}{\log \alpha}$ con n = emivita. Quindi $n \log \alpha = -\log 2$, ovvero $\log \alpha = \frac{1}{n} \log \frac{1}{2}$, cioè $\log \alpha = \log\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)$ da cui $\alpha = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$.
Per $n=2$ ho allora $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \cong 0{,}707$.

(3) Un paziente assume ogni giorno una compressa da 200 mg di un farmaco con fattore di eliminazione giornaliera del 40%. Determinare la quantità di farmaco che tende ad essere definitivamente presente nell'organismo.

SOL
$$\begin{cases} C_0 = 200 \text{ mg} \\ C_{n+1} = \alpha C_n + C_0 \end{cases} \longleftarrow \quad \alpha = 1 - 40\% = 1 - \frac{40}{100} = \frac{60}{100}$$

Ho allora
$$\begin{cases} C_1 = \alpha C_0 + C_0 = (\alpha+1) C_0 \\ C_2 = \alpha C_1 + C_0 = (\alpha^2+\alpha) C_0 + C_0 = (\alpha^2+\alpha+1) C_0 \\ C_3 = \alpha C_2 + C_0 = (\alpha^3+\alpha^2+\alpha) C_0 + C_0 = (\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1) C_0 \\ \text{-----------------} \\ C_n = \alpha C_{n-1} + C_0 = (\alpha^{n-1}+\alpha^{n-2}+\ldots+\alpha) C_0 + C_0 = (\alpha^n + \alpha^{n-1} + \ldots + 1) C_0 \end{cases}$$

Dunque per $n \to +\infty$ si ha la quantità di farmaco definitivamente presente:
$$\lim_{n \to +\infty} C_n = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k\right) \cdot C_0 = \boxed{\frac{1}{1-\alpha} \cdot C_0}$$

Per $C_0 = 200$, $\alpha = 60\% = 6/10 = 3/5$ ho $\frac{1}{1-\alpha} C_0 = \frac{1}{1-3/5} \cdot 200 = 500$ mg.

(<u>NOTARE</u> che la quantità $\frac{1}{1-\alpha} \cdot C_0$ è grande per α prossimo ad 1, ed è vicina a C_0 per α prossimo a zero, infatti $\alpha = 1$ equivale ad eliminazione nulla, ed $\alpha = 0$ equivale ad eliminazione giornaliera totale.
Notare comunque che per ogni $\alpha < 1$ la quantità di farmaco presente non tende ad infinito per $n \to +\infty$.)

ESERCIZI

□ Per ognuna delle seguenti funzioni determinare: dominio, immagine, se è iniettiva, se è suriettiva, se è crescente/decrescente, se è pari, se è dispari, se è periodica, se è limitata sul dominio:

1) $f(x) = 3x - 1$
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

2) $f(x) = 2x^2 + 3$
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

3) $f(x) = 2x^2 + 3$
$f: [0, +\infty) \to [3, +\infty)$

4) $f(x) = \dfrac{2x}{x-1}$
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

5) $f(x) = \dfrac{2x}{x-1}$
$f: (-\infty, 1) \to \mathbb{R}$

6) $f(x) = \dfrac{x+3}{x}$
$f: [-1, 1] \to \mathbb{R}$

7) $f(x) = e^{2x} - 1$
$f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$

8) $f(x) = e^{2x} - 1$
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

9) $f(x) = e^{2x} - 1$
$f: (-\infty, 0) \to [-1, 0]$

10) $f(x) = 2 - \log x$
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

11) $f(x) = 2 - \log x$
$f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$

12) $f(x) = 2 - \log x$
$f: (0, e^2) \to \mathbb{R}$

13) $f(x) = 3\cos 2x - 1$
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

14) $f(x) = 3\cos 2x - 1$
$f: \mathbb{R} \to [-4, 2]$

15) $f(x) = 3\cos 2x - 1$
$f: [0, \pi/2] \to \mathbb{R}$

Data la funzione $f(x) = x e^{-x^2}$, crocettare le proposizioni vere e quelle false:

(a)
- V F $\mathrm{Dom} f = [0, +\infty)$
- V F $\mathrm{Dom} f = (-\infty, 0]$
- V F $\mathrm{Dom} f = \mathbb{R}$
- V F $\mathrm{Dom} f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

(b)
- V F f è pari
- V F f è dispari
- V F f è periodica
- V F f è limitata
- V F f è iniettiva
- V F $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è suriettiva

(c)
- V F f è derivabile in $\forall x \in \mathrm{Dom} f$
- V F $x = 0$ è punto di massimo relativo
- V F $x = 0$ è punto di minimo relativo
- V F $x = 0$ è punto di flesso

(d)
- V F $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
- V F $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$
- V F $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ non esiste
- V F $\lim_{x \to 1} f(x) = \frac{1}{e}$

(e) la retta tangente alla funzione nel punto $(1, f(1))$ è
- V F $y = -\frac{x}{e}$
- V F $y = 2 - x$
- V F $y = \frac{2-x}{e}$
- V F $y = \frac{1}{e} - \frac{1}{e}x$

(f) l'area sottesa dalla curva $y = f(x)$ con $x \in [0, 2]$ è:
- V F $-\frac{e^{-4}}{2}$
- V F 0 perché la funzione è pari
- V F $\frac{1}{2} - \frac{1}{2e^4}$
- V F L'integrale non è elementarmente calcolabile poiché e^{-x^2} è una gaussiana

□ RICHIAMO SULLE NOTAZIONI: sia $a \in \mathbb{R}$, $R>0$

$I_a^R = \{x \in \mathbb{R} : |x-a|<R\}$ "intorno di a"

$I_{+\infty}^R = \{x \in \mathbb{R} : x>R\}$ "intorno di $+\infty$"

$I_{-\infty}^R = \{x \in \mathbb{R} : x<R\}$ "intorno di $-\infty$"

Crocettare le proposizioni vere e quelle false usando le caselle V F □□ :

(a) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ significa:

(1) V F □□ $\forall \varepsilon>0,\ \exists \delta>0,\ \forall x \in Dom f \mid \ |x-x_0|<\varepsilon \Rightarrow |f(x)-\ell|<\delta$

(2) V F □□ $\forall I_{x_0}^{\varepsilon},\ \exists I_{\ell}^{\delta},\ \forall x \in Dom f \mid \ \left.\begin{matrix} x \in I_{x_0}^{\varepsilon} \\ x \neq x_0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow f(x) \in I_{\ell}^{\delta}$

(3) V F □□ $\forall I_{\ell}^{\delta},\ \exists I_{x_0}^{\varepsilon},\ \forall x \in Dom f \mid \ \left.\begin{matrix} x \in I_{x_0}^{\varepsilon} \\ x \neq x_0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow f(x) \in I_{\ell}^{\delta}$

(4) V F □□ $\forall I_{\ell}^{\varepsilon},\ \exists I_{x_0}^{\delta},\ \forall x \in Dom f \cap \left(I_{x_0}^{\delta} - \{x_0\}\right) \mid \ f(x) \in I_{\ell}^{\varepsilon}$

(5) V F □□ $\forall \varepsilon,\ \exists \delta,\ \forall x \in Dom f \mid \ \left.\begin{matrix} x_0-\delta < x < x_0 \\ \text{oppure } x_0 < x < x_0+\delta \end{matrix}\right\} \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon$

(b) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ significa:

(1) V F □□ $\forall M>0,\ \exists N>0,\ \forall x \in Dom f \mid \ |x|>N \Rightarrow f(x)<-M$

(2) V F □□ $\forall N>0,\ \exists M>0,\ \forall x \in Dom f \mid \ x>N \Rightarrow f(x)<-M$

(3) V F □□ $\forall M \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{R},\ \forall x \in Dom f \mid \ x>N \Rightarrow f(x)<M$

(4) V F □□ $\forall M<0,\ \exists N>0,\ \forall x \in Dom f \mid \ x>N \Rightarrow f(x)<M$

(c) $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$ significa

(1) V F $\square\square$ $\forall I^M_{-\infty}, \exists I^\delta_{x_0}, \forall x \in \mathrm{Dom} f \mid x \in I^\delta_{x_0}, x > x_0 \Rightarrow f(x) \in I^M_{-\infty}$

(2) V F $\square\square$

(3) V F $\square\square$

(d) f continua in x_0 significa

(1) V F $\square\square$ $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathrm{Dom} f \mid x \in I^\delta_{x_0} - \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in I^\varepsilon_{f(x_0)}$

(2) V F $\square\square$ $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathrm{Dom} f \mid x \in I^\delta_{x_0} - \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in I^\varepsilon_{f(x_0)} - \{f(x_0)\}$

(3) V F $\square\square$ $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathrm{Dom} f \mid x \in I^\delta_{x_0} \Rightarrow f(x) \in I^\varepsilon_{\ell}$

(4) V F $\square\square$ $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathrm{Dom} f \mid x \in I^\delta_{x_0} \Rightarrow f(x) \in I^\varepsilon_{f(x_0)}$

(5) V F $\square\square$ $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathrm{Dom} f \mid f(I^\delta_{x_0}) \subseteq I^\varepsilon_{f(x_0)}$

(6) V F $\square\square$ $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathrm{Dom} f \mid 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$