ACUNI LIMITI FONDAMENTALI

Funzioni trigonometriche:

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = 1/2$

$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

Più in generale, per $c \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$:
$\lim_{x\to c} \frac{\text{funzione limitata}}{\text{funzione tendente ad infinito}} = 0$

Funzioni exp e log:

$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$

$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$

$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^k} = +\infty, \quad \forall k \in \mathbb{R}$

$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^k}{\log x} = +\infty, \quad \forall k > 0$

$\lim_{x\to -\infty} e^x x^k = 0, \quad \forall k \in \mathbb{R}$

$\lim_{x\to 0^+} x^k \log x = 0, \quad \forall k > 0$

Polinomi:

$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n + ... + a_1 x + a_0}{b_m x^m + ... + b_1 x + b_0} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \text{ecc.}$

Siano $P(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0, \;\; Q(x) = b_m x^m + ... + b_1 x + b_0$.
Se $P(x_0) = Q(x_0) = 0$ allora $P(x) = (x - x_0)P_1(x)$ e $Q(x) = (x - x_0)Q_1(x)$,
per opportuni polinomi $P_1(x)$ e $Q_1(x)$, e si ha:
$\lim_{x\to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{(x-x_0)P_1(x)}{(x-x_0)Q_1(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} = \text{ecc.}$

Potenze di binomio:

$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}$

Un limite molto importante:

$\lim_{x\to\pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \qquad (e = 2.71... \text{ irrazionale})$