Esercizi sull'espansione attorno a punti irregolari.

Es 1. L'equazione di Bessel (che useremo per risolvere alcune equazioni a derivate parziali), ha la forma:

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2 - \nu^2)y(x) = 0, \tag{0.1}$$

dove ν è un parametro reale. Si mostri che l'equazione ha una base di soluzioni (tradizionalmente chiamate $J_\nu(x)$ e $Y_\nu(x)$ - funzioni di Bessel di prima e seconda specie, rispettivamente), con l'andamento asintotico

$$J_\nu(x) \sim \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\left(x - \frac{1}{2}\nu\pi - \frac{\pi}{4}\right), \quad Y_\nu(x) \sim \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \cos\left(x - \frac{1}{2}\nu\pi - \frac{\pi}{4}\right), \tag{0.2}$$

per $x \to +\infty$. Quali sono i comportamenti possibili per $x \to -\infty$?

Esercizi su espansione a infinito. Si studino i possibili comportamenti per $x \to +\infty$, delle soluzioni delle seguenti equazioni differenziali. (Si controlli se infinito è un punto singolare fuchsiano o irregolare dell'equazione, e si proceda di conseguenza!)

1) Si considerino i due casi a) $y'' = x^{-3}y$ e b) $y'' = x^{+3}y$. Uno di questi problemi può essere analizzato in modo simile all'equazione di Airy vista in classe.

2) $x(x-1)y'' + y' + \frac{3y}{x-2} = 0$.

3) $y'''' = xy$, detta "hyper-Airy equation" - si noti la derivata quarta! **Nota:**questo esercizio si può svolgere generalizzando quanto abbiamo fatto per studiare l'equazione di Airy, tuttavia contiene dei conti significativamente lunghi. A meno di avere un programma di calcolo simbolico per aiutarsi si consiglia di fermarsi al prim'ordine dell'espansione asintotica di $S(x) = \log y(x)$.

4) $y'' + x^{-\frac{3}{2}}y' - x^{-2}y = 0$. **Suggerimento:** Questo esercizio illustra una sottigliezza. Infatti, questo è un caso in cui l'ipotesi $(S')^2 >> S''$, per l'esponente $S(x)$ tale che $y(x) = e^{S(x)}$, NON funziona! Per convincersi, si può provare a usare l'ipotesi, si vedrà che si giunge a una contraddizione. Invece, per risolvere l'esercizio è necessario trovare un altro equilibrio dominante consistente. In questo caso, l'equilibrio da considerare è quello in cui <u>tre</u> termini sono tutti dello stesso ordine! L'origine di questo fenomeno sta nel fatto che, segretamente, le soluzioni di questa equazione hanno un comportamento simile a quello intorno a punti fuchsiani (come spiegato nella soluzione). L'unica differenza è che, in questo caso, l'espansione non è in potenze intere ma semi-intere.

5) **Nota:** Questo esercizio contiene calcoli leggermente intricati. $y'' = (\log x)^2 y$.

Esercizi su espansione intorno a punto al finito Si studino i possibili comportamenti per $x \to 0^+$ (a meno che venga richiesto altrimenti), delle soluzioni delle seguenti equazioni differenziali. (Si controlli se il punto di interesse è singolare fuchsiano o irregolare e si proceda di conseguenza!)

1) $x^2y'' + (1+3x)y' + y = 0$. Questo esempio (leggermente complicato) è stato parzialmente descritto a lezione: si è osservato che esiste una soluzione formale che è una serie asintotica in potenze di x.

   In questo caso si dovrebbe trovare che esistono due distinti modi di scegliere i termini dominanti dell'equazioni differenziale per $S(x)$ (dove $y = e^{S(x)}$). Questi due modi distinti corrispondono, uno, a una soluzione con $y(x) \sim$ const, e un altro corrisponde a un andamento singolare, dove all'ordine dominante $S(x) \sim 1/x^a$, con $a > 0$ una potenza che può essere fissata analizzando il problema. Entrambi questi andamenti asintotici soddisfano $S'' << (S')^2$.

2) $y'' = \sqrt{x}y$. **Nota:** Questo esercizio è più complcato della media. Si noti che anche questo è un caso in cui l'ipotesi $(S')^2 >> S''$, per l'esponente $S(x)$ tale che $y(x) = e^{S(x)}$, non è consistente! Occorre trovare un diverso equilibrio dominante consistente per risolvere il problema. In questo caso si può fare in due modi diversi.

3) $xy''' - y' = 0$.

4) $x(x-1)y'' + 3y' + \frac{y}{x} = 0$.

5) $y'' = (\log x)^2 y$. **Nota:** Questo esercizio può essere risolto in modo simile all'analisi dell'equazione di Airy, ma contiene calcoli leggermente intricati.

6) Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) = \left(\frac{1}{(x-1)^3} + 2\right) y(x). \tag{0.3}$$

   Si studino i possibili andamenti delle soluzioni per $x \to 1^+$, determinando i primi due termini (dominante e sottodominante) di un'espansione di $S(x)$ per $x \to 1^+$, dove $y(x) = e^{S(x)}$.