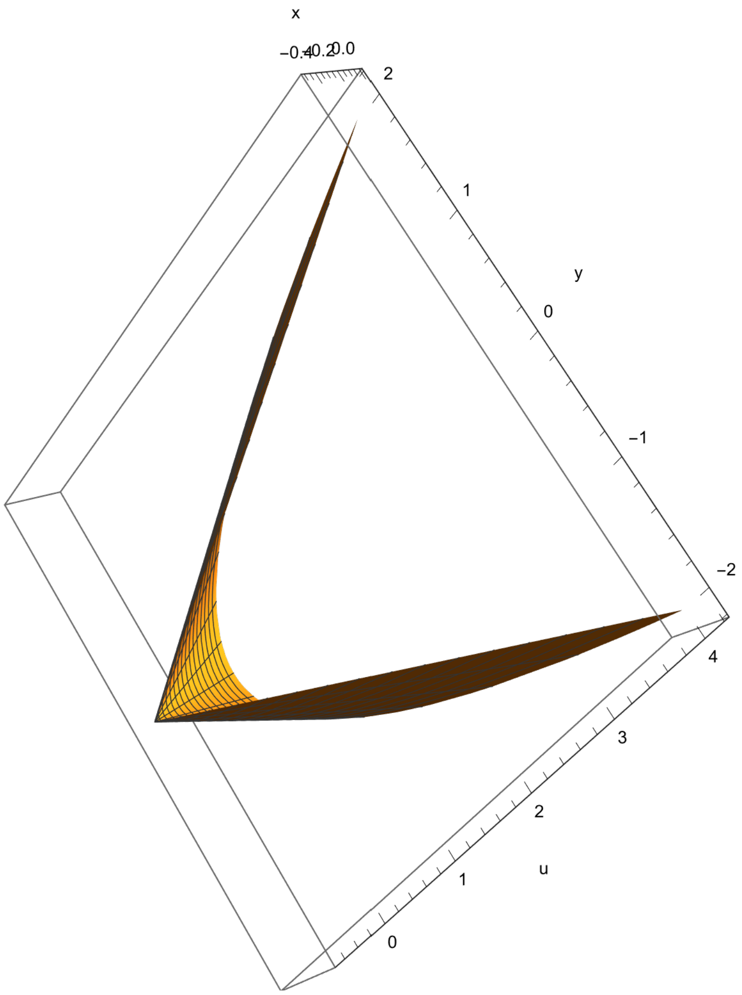
Es. 10

Rappresentazione grafica della soluzione del problema 10. Si noti come le curve caratteristiche che partono dalla curva iniziale (a forma di parabola) convergono tutte formando un tipo di singolarita` conica. E` un tipo di singolarita` diverso rispetto a quello formato dall'equazione di Burgers, in quanto nella singolarita` il gradiente strettamente parlando non diverge, ma diventa una funzione a molti valori il cui limite dipende dalla direzione.

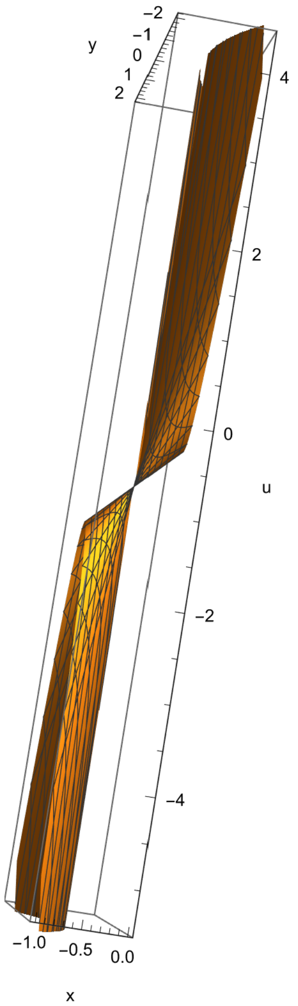
In[∘]:=
```
ParametricPlot3D[{t, s + 2 s t, s^2 + t (1 + 2 s^2)},
 {t, -0.5, 0.}, {s, -2, 2}, AxesLabel → {"x", "y", "u"}]
```

Out[∘]=



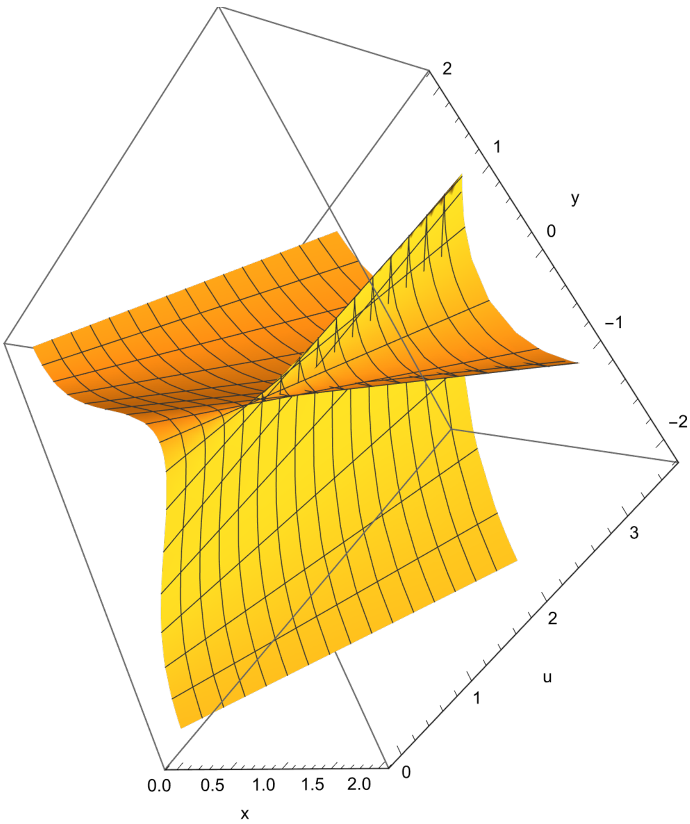
Il secondo grafico mostra semplicemente la soluzione estessa oltre la singolarita`.
Show[ParametricPlot3D[{t, s + 2 s t, s^2 + t (1 + 2 s^2)}, {t, -1, 0.}, {s, -2, 2}, AxesLabel -> {"x", "y", "u"}] , ParametricPlot3D[{x, y, x + y^2/(1 + 2 x)}, {x, -1, 0.}, {y, -2, 2}]]

Out[ ]=



Esempio di soluzione della stessa PDE, ma con condizione iniziale data da una Gaussiana. Anche in questo caso, si puo` notare la formazione di un tipo di singolarita` “conica” a un certo valore del parametro x.

```
U0[s_] = E^(-s^2);
ParametricPlot3D[{t, s + U0'[s] t, U0[s] + t (1 + 1/2 (U0'[s])^2)},
 {t, 0, 2}, {s, -2, 2}, AxesLabel → {"x", "y", "u"}]
```



Altro esempio: equazione eikonale

In[ ]:=
```
Solve[ {px0 x0p + py0 y0p == 0 , 1 == px0^2 + py0^2}, {px0, py0}]
```

Out[ ]=

$$\left\{\left\{px0 \to -\frac{y0p}{\sqrt{x0p^2 + y0p^2}},\ py0 \to \frac{x0p}{\sqrt{x0p^2 + y0p^2}}\right\},\ \left\{px0 \to \frac{y0p}{\sqrt{x0p^2 + y0p^2}},\ py0 \to -\frac{x0p}{\sqrt{x0p^2 + y0p^2}}\right\}\right\}$$

In[ ]:=

$$sp0 = \left\{px0 \to -\frac{y0p}{\sqrt{x0p^2 + y0p^2}},\ py0 \to \frac{x0p}{\sqrt{x0p^2 + y0p^2}}\right\}$$

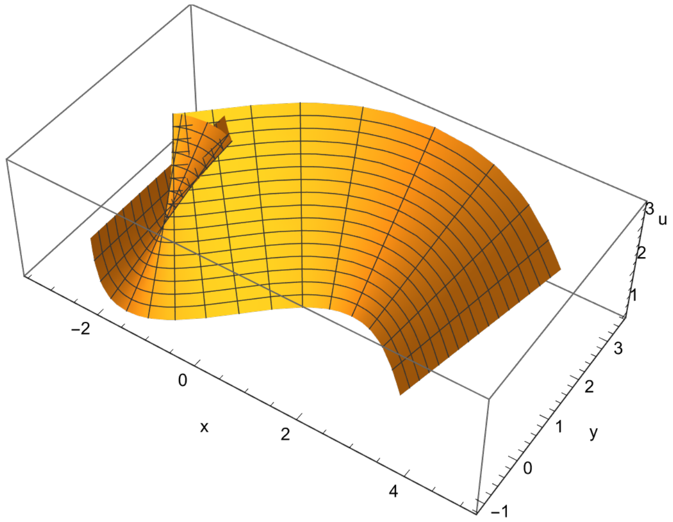
Out[ ]=

$$\left\{px0 \to -\frac{y0p}{\sqrt{x0p^2 + y0p^2}},\ py0 \to \frac{x0p}{\sqrt{x0p^2 + y0p^2}}\right\}$$

Esempio di soluzione dell’equazione eikonale con condizione iniziale u = 1 sulla curva (x, Sin[x]) nel piano (x,y), con x in (-Pi, Pi). Anche in questo caso si puo` vedere la singolarita` formata dall’intersecarsi delle curve caratteristiche.

```
(* cambia tempi 0.2, 0.3, .... 1.2 *)
ParametricPlot3D[{s + 2 px0 t /. sp0 /. x0p → 1 /. y0p → Cos[s],
  Sin[s] + 2 py0 t /. sp0 /. x0p → 1 /. y0p → Cos[s], 2 t + 1},
 {t, 0, 1.2}, {s, -Pi, Pi}, AxesLabel → {"x", "y", "u"}]
```

Out[ ]=



Es. 8

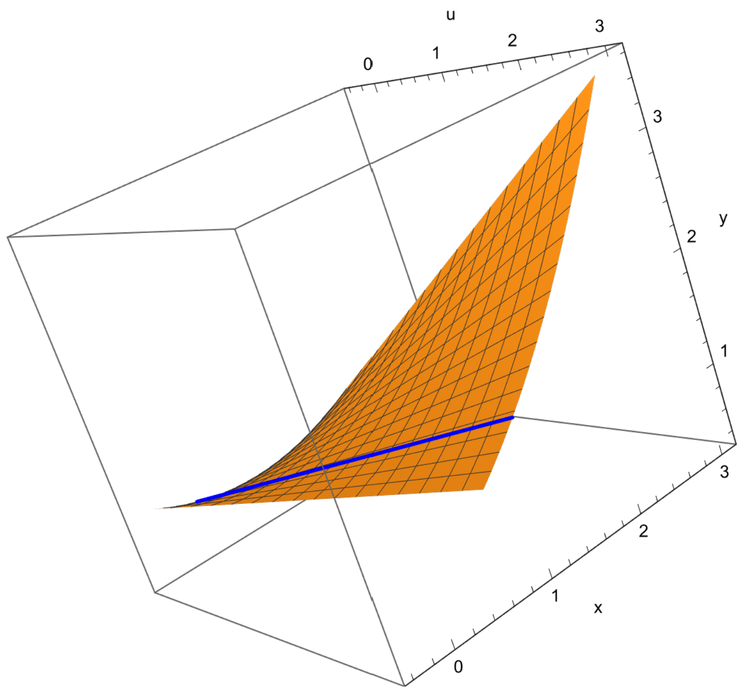
Le due figure successive mostrano la soluzione, con il metodo delle caratteristiche, della PDE del problema 8. La curva blu rappresenta la curva dei valori iniziali.
Si noti come nel caso 1) (buone condizioni iniziali), la soluzione e` a un valore nei dintorni della curva iniziale.
Nel secondo caso 2), la soluzione non esiste da un lato della curva iniziale, e assume due valori sull'altro lato. Questo discende dal fatto che in questo caso le curve caratterisitiche sono tangenti alla curva di Cauchy, quindi il problema ai valori iniziali ha dei dati "pericolosi".

In[7]:=

```
Print["Caso 1) : buone condizioni iniziali "]
Show[ ParametricPlot3D[{s + t, 1 + s t + t^2 / 2, s + t},
  {t, -0.3, 1}, {s, 0, 2}, AxesLabel → {"x", "y", "u"}],
 ParametricPlot3D[{s, s + 1 - s, s}, {s, 0, 2}, PlotStyle → Blue]]
```

```
Caso 1) : buone condizioni iniziali
```

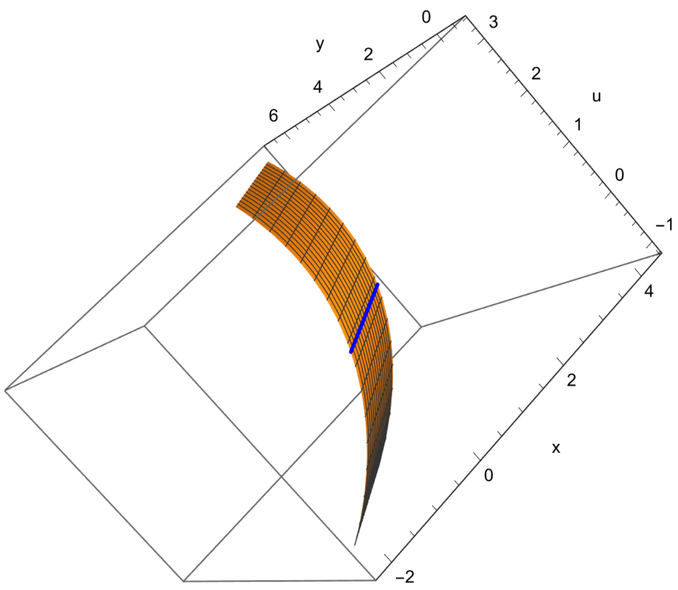
Out[8]=



In[15]:=
```
Print["Caso 2) : condizioni iniziali pericolose
    (caratteristiche non intersecano bene la curva di Cauchy) "]
Show[ ParametricPlot3D[{s + t, s + t + t^2 / 2, 1 + t},
   {t, -2, 2.2}, {s, 0, 2}, AxesLabel → {"x", "y", "u"}],
 ParametricPlot3D[{s, s , 1}, {s, 0, 2}, PlotStyle → Blue]]
```

```
Caso 2) : condizioni iniziali pericolose
  (caratteristiche non intersecano bene la curva di Cauchy)
```

Out[16]=



Es. 1

Questo grafico mostra l’evoluzione di un profilo gaussiano usando l’equazione di Burgers modificata dell’es. 1. Sono visibili gli shock formati sia per tempi positivi che negativi in questo caso.

In[ ]:=
```
U0[s_] = E^(-s^2)
```

Out[ ]=

e^{-s^2}

In[ ]:=
```
ParametricPlot3D[{t, s + (U0[s])^2 t, U0[s]},
 {t, -0.5, 0.6}, {s, -2, 2}, AxesLabel → {"x", "y", "u"}]
```

Out[ ]=