Esercizi assegnati nell'ultima lezione (lezione 7).

Es 1. Si consideri l'equazione differenziale ipergeometrica

$$x(x-1)y''(x) + ((a+b+1)x - c)\, y'(x) + aby(x) = 0, \tag{0.1}$$

assumendo generiche costanti a, b, c. Si noti che una soluzione è

$$y_1(x) =_2 F_1(a, b; c; x). \tag{0.2}$$

Usando il metodo del simbolo P di Riemann, si calcoli

- una soluzione indipendente $y_2(x)$ con diverso andamento per $x \sim 0$ (svolto a lezione).
- una base di soluzioni $y_3(x)$, $y_4(x)$ costruite in modo da avere due comportamenti diversi per $x \sim 1$ (parzialmente svolto a lezione, manca la determinazione di $y_4(x)$).
- una base di soluzioni $y_5(x)$, $y_6(x)$ costruite in modo da avere due comportamenti diversi per $x \sim \infty$.

Le soluzioni del primo e terzo quesito si possono trovare svolte sulle note.

Es 2. Si consideri l'equazione differenziale di Legendre generalizzata

$$(1-x^2)y''(x) + -2xy'(x) + \left(\lambda(\lambda+1) - \frac{\mu^2}{1-x^2}\right) y(x) = 0, \tag{0.3}$$

assumendo generiche costanti λ, μ.

- Si identifichino i punti singolari verificando che sono soltanto tre e tutti fuchsiani (quindi, siamo nelle condizioni per applicare il metodo del simbolo P). Si verifichi anche che la somma di tutti gli indici nei tre punti fuchsiani è 1.
- Si costruisca una base di due soluzioni indipendenti con il metodo del simbolo P.
- Si costruisca una soluzione con andamento $y \sim (x-1)^{\mu/2}$ per $x \sim 1$. Si verifichi che, quando $\lambda, \mu/2 \in \mathbb{N}$ **e** $\lambda - \mu \in \mathbb{N}$, questa soluzione è un polinomio. **Si noti la correzione rispetto a una versione precedente nelle condizioni su μ, λ!**

Es 3. *Dalla prova d'esame di Giugno 2023.* Si consideri l'equazione differenziale

$$\frac{5y(x)}{32(x-2)^2(x-1)x} + \left(\frac{1}{2(x-1)} + \frac{5}{4x} + \frac{1}{4(x-2)}\right) y'(x) + y''(x) = 0. \tag{0.4}$$

Usando il metodo di Papperitz-Riemann, si trovi la più generale soluzione tale che

$$\lim_{x \to 1} y(x) = 0, \tag{0.5}$$

esprimendola in termini di funzioni speciali esplicite.

Suggerimento per abbreviare i calcoli: L'equazione ha tre punti singolari, tutti fuchsiani. I primi due punti sono: $x_1 = 0$ con indici $\left\{-\frac{1}{4}, 0\right\}$, e $x_2 = 2$ con indici $\left\{\frac{5}{8}, \frac{1}{8}\right\}$.