Complementi di Metodi Matematici per la Fisica. Esame 17/06/2024

Per passare all'orale sono necessari 17/34 punti. Durata: 2h. Si può usare un formulario personale al massimo di 4 facciate.

Esercizio 1. (11 punti)

Si consideri l'equazione del calore che descrive l'evoluzione della temperatura $u(x,t)$, lungo una sbarretta unidimensionale di lunghezza L:

$$u_t - \alpha u_{xx} = 0, \quad \text{per } x \in [0,L], \ \ t \geq 0, \tag{0.1}$$

dove t rappresenta il tempo, x la coordinata spaziale lungo la sbarretta, e $\alpha > 0$ è il coefficiente di diffusività termica. Gli estremi sono mantenuti termicamente **isolati** per ogni t, cioè non vi è diffusione di calore attraverso le estremità della sbarretta

Si consideri l'evoluzione della temperatura data la condizione iniziale

$$u(x,0) = \sin^2(x\pi/L), \quad x \in [0,L]. \tag{0.2}$$

- (10 punti) Si scriva la soluzione del problema per $t \geq 0$ con il metodo di Fourier. NOTA: i coefficienti di Fourier vanno espressi come integrali espliciti, ma non è necessario calcolare gli integrali.
- (1 punto) Si calcoli il limite per $t \to +\infty$ di $u(x,t)$ (anche in termini di integrali non risolti), specificando se si tratta di un profilo costante o meno.

Esercizio 2. (8 punti)

La grandezza $w(x,t)$ evolve secondo la seguente equazione alle derivate parziali:

$$w_t + (1-w)w_x = 2t, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0 \tag{0.3}$$

Si usi il metodo delle caratteristiche per scrivere una soluzione del problema ai valori iniziali:

$$w(s,0) = e^{-s^2}, \ \ s \in \mathbb{R}, \tag{0.4}$$

analizzando quantitativamente se ci sono valori di t oltre i quali la soluzione non è più differenziabile.

Esercizio 3. (7 punti) La seguente equazione differenziale possiede tre punti singolari, tutti fuchsiani:

$$y''(x) + \left(\frac{4}{3x} + \frac{5}{3(x+1)} - \frac{1}{x-1}\right) y'(x) + \frac{\left(\frac{2}{x-1} - \frac{2}{3(x+1)}\right) y(x)}{(x-1)x(x+1)} = 0. \tag{0.5}$$

Usando il metodo di Papperitz-Riemann, si determini una base di due soluzioni indipendenti, y_1 e y_2, distinte dal comportamento per $x \to 0$, con $y_i(x) \sim A_i x^{r_i}$ per $x \sim 0$ $(i = 1,2)$, con $r_1 \neq r_2$. Tali soluzioni vanno espresse in termini di funzioni speciali esplicite.

Suggerimento: Per abbreviare i calcoli, si può usare l'informazione che gli indici nel punto singolare fuchsiano $x = 1$ sono $\{1,1\}$, e nel punto fuchsiano $x = -1$ sono $\left\{-1, \frac{1}{3}\right\}$.

Esercizio 4. (8 punti)

Si consideri l'equazione di Poisson bidimensionale all'interno di un dominio circolare di raggio R:

$$\Delta u = \rho, \tag{0.6}$$

$$\text{per } x^2 + y^2 \leq R \quad (\text{ cioè } 0 \leq r \leq R, \;\; \phi \in [0, 2\pi])\,, \tag{0.7}$$

dove $\Delta \equiv \partial_{xx} + \partial_{yy}$ denota l'operatore di Laplace, e ρ rappresenta una densità di carica data da

$$\rho(r, \phi) = A \cos\phi + B \sin\phi, \tag{0.8}$$

per due costanti A, B, dove abbiamo usato coordinate polari ($x = r\cos\phi, \;\; y = r\sin\phi$).

- (5 punti) Considerando condizioni di bordo di Dirichlet $u = 0$ sul bordo del cerchio:

  $$u(R, \phi) = 0, \quad \phi \in [0, 2\pi], \tag{0.9}$$

  si determini $u(r, \phi)$ all'interno del dominio circolare.

  Consiglio per lo svolgimento: Si usi una decomposizione in autofunzioni della forma

  $$u(r, \phi) = \cos(\phi) f(r) + \sin(\phi) g(r), \tag{0.10}$$

  determinando le equazioni differenziali ordinarie soddisfatte da $f(r)$ e $g(r)$, con relative condizioni di bordo, in modo da imporre l'equazione di Poisson e i dati del problema. **La soluzione di alcune equazioni differenziali utili è inclusa nel formulario allegato.**

- (3 punti) Si scriva la soluzione della stessa equazione di Poisson, ma con la condizione di bordo più generale

  $$u(R, \phi) = C\cos(2\phi), \quad \phi \in [0, 2\pi], \;\; C \in \mathbb{R}. \tag{0.11}$$

  NOTA: la forma della soluzione in questo caso sarà modificata rispetto a (0.10).

Equazioni utili all'esame di Giugno 2024

Alcune di queste equazioni (non necessariamente tutte!) possono essere utili per l'esame.

Proprietà di ortogonalità per funzioni trigonometriche: per $m, n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{2}{L}\int_0^L \sin(\frac{n\pi x}{L})\sin(\frac{m\pi x}{L})dx = \delta_{m.n} \tag{0.12}$$

$$\frac{2}{L}\int_0^L \cos(\frac{n\pi x}{L})\cos(\frac{m\pi x}{L})dx = \delta_{m.n}\, 2^{\delta_{n,0}}, \tag{0.13}$$

$$\frac{2}{L}\int_0^L \cos(\frac{2n\pi x}{L})\sin(\frac{2m\pi x}{L})dx = \frac{2}{L}\int_0^L \cos(\frac{(2n+1)\pi x}{L})\sin(\frac{(2m+1)\pi x}{L})dx = 0 \tag{0.14}$$

Forma canonica del P-symbol La forma canonica dell'equazione di Papperitz-Riemann è rappresentata da

$$y = P\left\{\begin{array}{cccc} & 0 & 1 & \infty \\ x & 0 & 0 & a \\ & 1-c & c-a-b & b \end{array}\right\}, \tag{0.15}$$

e una delle soluzioni di questa ODE è data esplicitamente da:

$$y(x) ={}_2 F_1(a,b;c;x) \tag{0.16}$$

Altre soluzioni si possono trovare tramite le regole di trasformazione del P-symbol.

Operatore di Laplace in 2D in coodinate polari

$$\Delta^{(2D)} = \partial_r^2 + \frac{\partial_r}{r} + \frac{\partial_\theta^2}{r^2}. \tag{0.17}$$

Soluzione di alcune equazioni differenziali utili per l'esercizio 4. L'equazione

$$F''(r) + \frac{F'(r)}{r} - m^2\frac{F(r)}{r^2} = 0, \tag{0.18}$$

con m un parametro > 0, ha la soluzione generale $F(r) = c_1 r^m + c_2 r^{-m}$, dove c_1, c_2 sono costanti arbitrarie. Nel caso $m = 0$, la soluzione è invece $F(r) = c_1 + c_2 \log r$.

L'equazione inomogenea

$$F''(r) + \frac{F'(r)}{r} - \frac{F(r)}{r^2} = k, \tag{0.19}$$

con k un parametro, ha la soluzione generale

$$F(r) = c_1 r + c_2 r^{-1} + \frac{k}{3}r^2. \tag{0.20}$$

In tutte le formule precedenti, c_1, c_2 rappresentano due costanti arbitrarie, che vanno fissate con opportune condizioni di bordo nel problema di interesse.

1 Soluzione

1.1 Es. 1

Dato che gli estremi sono isolati le condizioni di bordo richieste sono di Neumann.

La soluzione si può scrivere come

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-k_n^2 \alpha t} \cos(k_n x) A_n, \tag{1.21}$$

con $k_n = \frac{n\pi}{L}$ e

$$A_n = \frac{2^{1-\delta_{n,0}}}{L} \int_0^L dx \ \cos(k_n x) \sin^2(x\pi/L). \tag{1.22}$$

Il limite per grandi tempi corrisponde al coefficiente A_0:

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = A_0 = \frac{1}{L} \int_0^L dx \sin^2(x\pi/L) = \frac{1}{2}. \tag{1.23}$$

1.2 Es. 2

Usando il metodo delle caratteristiche troviamo la soluzione scritta in forma implicita

$$t = \ell, \tag{1.24}$$

$$x = \ell - \ell^3/3 - \ell e^{-s^2} + s, \tag{1.25}$$

$$w = \ell^2 + e^{-s^2}, \tag{1.26}$$

dove la condizione iniziale è $w(s,0) = e^{-s^2}$.

Lo Jacobiano del cambio di coordinate $(s,\ell) \to (x,t)$ è $1 + 2se^{-s^2}\ell$.

Una singolarità si forma al tempo

$$t_{\text{shock}} = \min_{s<0} \left(-\frac{1}{2se^{-s^2}} \right). \tag{1.27}$$

1.3 Es. 3

Gli indici nel restante punto fuchsiano $x = 0$ sono $\left\{0, -\frac{1}{3}\right\}$. Ci viene chiesta una base di due soluzioni indipendenti con diverso andamento intorno a questo punto. Si può procedere in diversi modi. Ad esempio, un modo è portarsi in forma canonica facendo la trasformazione di coordinate $x \to x' = \frac{2x}{x+1}$ che manda $0 \to 0$, $1 \to 1$ e $-1 \to \infty$.

Procedendo in questo modo e usando le proprietà del P-symbol si trovano le due soluzioni indipendenti:

$$y_1(x) = \left(\frac{2x}{x+1} - 1\right) {}_2F_1\left(0, \frac{4}{3}; \frac{4}{3}; \frac{2x}{x+1}\right), \tag{1.28}$$

$$y_2(x) = \left(\frac{2x}{x+1}\right)^{-\frac{1}{3}} \left(\frac{2x}{x+1} - 1\right) {}_2F_1\left(-\frac{1}{3}, 1; -\frac{2}{3}; \frac{2x}{x+1}\right), \tag{1.29}$$

che infatti hanno comportamenti distinti $y_1(x) \sim O(1)$ e $y_s(x) \sim x^{-\frac{1}{3}}$ per $x \to 0$.

1.4 Es. 4

A lezione è stato trattato il caso della decomposizione dell'equazione di Laplace in coordinate polari. In questo caso si tratta di equazione di Poisson, la parte radiale viene quindi modificata. Inserendo la forma suggerita per la soluzione si ottengono due ODE per le funzioni $g(r)$ e $f(r)$:

$$f''(r) + f'(r)/r + f(r)/r^2 = A, \tag{1.30}$$

$$g''(r) + g'(r)/r + g(r)/r^2 = B. \tag{1.31}$$

Possiamo riferirci al formulario per la soluzione generale di queste equazioni:

$$f(r) = c_1 r + c_2 r^{-1} + \frac{A}{3} r^2, \tag{1.32}$$

$$g(r) = d_1 r + d_2 r^{-1} + \frac{B}{3} r^2, \tag{1.33}$$

dove visto che vogliamo regolarità in $r = 0$ sappiamo che $c_2 = d_2 = 0$.

Per fissare i restanti coefficienti dobbiamo imporre le condizioni di bordo, cioè $f(R) = g(R) = 0$. Imponendo questa condizione troviamo $c_1 = -\frac{A}{3}R$, $d_1 = -\frac{B}{3}R$, e quindi la soluzione al primo quesito è:

- $$u = \frac{A}{3}\cos(\phi)(r^2 - Rr) + \frac{B}{3}\sin(\phi)(r^2 - Rr). \tag{1.34}$$

Per rispondere al secondo quesito dobbiamo sommare a questa soluzione una soluzione dell'equazione omogenea che soddisfi le nuove condizioni d bordo proporzionali a C. La soluzione completa è

- $$u = \frac{A}{3}\cos(\phi)(r^2 - Rr) + \frac{B}{3}\sin(\phi)(r^2 - Rr) + C\cos(2\phi)r^2. \tag{1.35}$$