Complementi di Metodi Matematici per la Fisica. Esame 16/07/2024

Per passare all'orale sono necessari 17/34 punti. Durata: 2h. Si può usare un formulario personale al massimo di 4 facciate.

NOTA: Si svolga uno solo, a scelta, tra gli esercizi $3a$) e $3b$), non entrambi. Uno solo verrà corretto.

Esercizio 1. (11 punti)

Si consideri una corda di lunghezza a riposo L. Lo spostamento trasversale delle corda $u(x,t)$ soddisfa l'equazione delle onde con velocità c:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad x \in [0, L]. \tag{0.1}$$

Date le condizioni iniziali

$$u(x,0) = x(x-L), \quad u_t(x,0) = \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right), \tag{0.2}$$

e condizioni di bordo con estremi fissati, $u(0,t) = u(L,t) = 0$, si determini la soluzione per $t \geq 0$.

Suggerimento: Si usi il metodo di decomposizione di Fourier. NOTA: i coefficienti di Fourier vanno indicati come integrali espliciti, ma NON è necessario calcolare gli integrali.

Esercizio 2. (8 punti)

La grandezza $w(x,t)$ evolve secondo la seguente equazione alle derivate parziali:

$$(1+t)w_t + (1+x^2)w_x = 1, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0. \tag{0.3}$$

Si scriva la soluzione generale dell'equazione.

Esercizio 3 a). (7 punti) La seguente equazione differenziale possiede tre punti singolari, tutti fuchsiani:

$$y''(x) + \left(\frac{4}{5x} + \frac{1}{5(x+2)} + \frac{1}{x-3}\right) y'(x) + \frac{\left(-\frac{2}{x+2} - \frac{15}{x-3}\right) y(x)}{(x-3)x(x+2)} = 0. \tag{0.4}$$

Si scriva, in termini di funzioni speciali esplicite, la più generale soluzione di quest'equazione avente un'espansione di Taylor regolare intorno al punto $x = 0$.

Suggerimento: Si usi il metodo di Papperitz-Riemann. Per abbreviare i calcoli, si può usare l'informazione che gli indici nel punto singolare fuchsiano $x = -2$ sono $\left\{-\frac{1}{5}, 1\right\}$, e nel punto fuchsiano $x = 3$ sono $\{-1, 1\}$.

Esercizio 3 b). (7 punti) Si consideri la seguente equazione differenziale ordinaria per una grandezza $Y(t)$:

$$Y''(t) = t^{\frac{3}{2}}\, Y(t). \tag{0.5}$$

Si determini quali sono i possibili andamenti asintotici della soluzione per $t \to +\infty$, ottenendo i primi due termini di uno sviluppo asintotico di $S(t) \equiv \log Y(t)$ per $t \to +\infty$.

Esercizio 4. (8 punti)

Si consideri una lastra metallica bidimensionale quadrata di lato L, la cui temperatura $u(x, y, t)$ evolve secondo l'equazione del calore

$$u_t = \alpha(u_{xx} + u_{yy}), \quad (x, y) \in [0, L] \times [0, L], \tag{0.6}$$

con un coefficiente di diffusività termica $\alpha > 0$. Partendo da una distribuzione iniziale di temperatura uniforme al tempo $t = 0$:

$$u(x, y, t)|_{t=0} = 0, \tag{0.7}$$

per tempi $t > 0$ vengono applicate le condizioni di bordo seguenti:

$$\left.\frac{\partial}{\partial y} u(x, y, t)\right|_{y=0} = \left.\frac{\partial}{\partial y} u(x, y, t)\right|_{y=L} = 0, \tag{0.8}$$

$$u(x, y, t)|_{x=0} = T_1, \tag{0.9}$$

$$u(x, y, t)|_{x=L} = T_2. \tag{0.10}$$

In altre parole, i bordi della lastra paralleli all'asse x sono mantenuti termicamente isolati, mentre i bordi paralleli all'asse y sono mantenuti a due temperature costanti diverse, T_1 e T_2.

- (7 punti) Si determini l'evoluzione della temperatura della lastra per $t \geq 0$ con il metodo delle autofunzioni. NOTA: i coefficienti di Fourier vanno indicati come integrali espliciti, ma NON è necessario calcolare gli integrali.
- (1 punto) Si determini quale è la distribuzione di temperatura dopo un tempo infinito.

Suggerimento: Si noti che parte delle condizioni di bordo è non omogenea. Si consiglia di ridefinire la soluzione con una traslazione di u della forma

$$u(x, y, t) = Ax + B + w(x, y, t),$$

dove A, B, vanno fissati appropriatamente in modo che $w(x, y, t)$ soddisfi condizioni di bordo omogenee.

Non ci si preoccupi se la condizione iniziale sembra violare le condizioni di bordo al tempo $t = 0$, l'importante è che le condizioni di bordo siano soddisfatte per $t > 0$.

Equazioni utili all'esame di Luglio 2024

Alcune di queste equazioni (non necessariamente tutte!) possono essere utili per l'esame.

Proprietà di ortogonalità per funzioni trigonometriche: per $m, n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{2}{L}\int_0^L \sin(\frac{n\pi x}{L})\sin(\frac{m\pi x}{L})dx = \delta_{m.n} \tag{0.11}$$

$$\frac{2}{L}\int_0^L \cos(\frac{n\pi x}{L})\cos(\frac{m\pi x}{L})dx = \delta_{m.n}\, 2^{\delta_{n,0}}, \tag{0.12}$$

$$\frac{2}{L}\int_0^L \cos(\frac{2n\pi x}{L})\sin(\frac{2m\pi x}{L})dx = \frac{2}{L}\int_0^L \cos(\frac{(2n+1)\pi x}{L})\sin(\frac{(2m+1)\pi x}{L})dx = 0 \tag{0.13}$$

Forma canonica del P-symbol La forma canonica dell'equazione di Papperitz-Riemann è rappresentata da

$$y = P\left\{\begin{array}{cccc} & 0 & 1 & \infty \\ x & 0 & 0 & a \\ & 1-c & c-a-b & b \end{array}\right\}, \tag{0.14}$$

e una delle soluzioni di questa ODE è data esplicitamente da:

$$y(x) =_2 F_1(a,b;c;x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(n!)(c)_n} x^n. \tag{0.15}$$

Altre soluzioni si possono trovare tramite le regole di trasformazione del P-symbol.

1 Soluzioni

Es. 1

La soluzione è

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(k_n x)\, A_n \cos(\omega_n t) + \frac{1}{\omega_2} \sin(k_2 x) \sin(\omega_2 t), \tag{1.16}$$

con

$$k_n \equiv \frac{n\pi}{L}, \quad \omega_n = k_n c, \tag{1.17}$$

e

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L dx\, x(x-L) \sin(k_n x). \tag{1.18}$$

Es. 2

La soluzione generale si può scrivere nella forma

$$u(x,t) = \log(1+t) + G(\log(1+t) - \arctan(x)), \tag{1.19}$$

dove G rappresenta una funzione arbitraria.

Es. 3 a)

Lo sviluppo richiesto è

$$\log Y(t) \sim \pm \frac{4}{7} t^{\frac{7}{4}} - \frac{3}{8} \log(t) + o\left(\log(t)\right). \tag{1.20}$$

Es. 3 b)

Gli indici nel punto fuchsiano rimanente $x = 0$ sono $\left\{0, \frac{1}{5}\right\}$. Viene chiesto di scrivere una soluzione con sviluppo di Taylor regolare – quindi si tratta della soluzione corrispondente all'indice 0. Per isolarla si può procedere in diversi modi alternativi. Ad esempio si può fare il cambio di variabile $x \to x' = \frac{5x}{2(3-x)}$, che mappa $0 \to 0$, $-2 \to 1$, $3 \to \infty$, e quindi permette di portarsi alla forma canonica del P-symbol.

Estraendo la soluzione richiesta dal problema troviamo

$$y_1(x) = \left(\frac{5x}{2(3-x)} - 1 \right) {}_2F_1(2, 0; \frac{4}{5}; \frac{5x}{2(3-x)}). \tag{1.21}$$

Es. 4)

Iniziamo dal sottrarre una soluzione esatta (indipendente dal tempo) dell'equazione del calore, come suggerito dal testo del problema, in modo da riportarci a condizioni di bordo omogenee.

La sottrazione corretta è:

$$u(x,t) = T_1 + x\frac{T_2 - T_1}{L} + w(x,y,t). \tag{1.22}$$

Le condizioni di bordo richieste sono ora omogenee per w, di Neumann lungo y e di Dirichlet lungo x.

La base corretta di autofunzioni da usare per decomporre w è:

$$\sin(\frac{n\pi}{L}x)\ \cos(\frac{m\pi}{L}y)e^{-\sqrt{m^2+n^2}\frac{\pi}{L}\alpha t}, \tag{1.23}$$

dove n, m sono numeri quantici interi **indipendenti** (quindi avremo una doppia sommatoria).

La soluzione è

$$w(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \sin(\frac{n\pi}{L}x)\cos(\frac{m\pi}{L}y)e^{-\sqrt{m^2+n^2}\frac{\pi}{L}\alpha t}A_{nm}, \tag{1.24}$$

dove, tenendo conto che la condizione iniziale per w è

$$w(x,y,0) = -T_1 - x\frac{T_2 - T_1}{L}, \tag{1.25}$$

i coefficienti sono

$$A_{n,m} = \frac{2^{2-\delta_{m,0}}}{L^2}\int_0^L dx\left(-T_1 - x\frac{T_2-T_1}{L}\right)\sin(\frac{n\pi}{L}x)\int_0^L dy\cos(\frac{m\pi}{L}y) \tag{1.26}$$

$$= \frac{2}{L}\delta_{m,0}\int_0^L dx\left(-T_1 - x\frac{T_2-T_1}{L}\right)\sin(\frac{n\pi}{L}x) \equiv \delta_{m,0}B_n. \tag{1.27}$$

In conclusione, tenendo conto che solo termini con $m = 0$ sopravvivono, e la soluzione alla fine non dipende da y,

$$u(x,y,t) = T_1 + x\frac{T_2 - T_1}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(\frac{n\pi}{L}x)e^{-n\frac{\pi}{L}\alpha t}, \tag{1.28}$$

e per $t \to +\infty$ troviamo il limite $T_1 + x\frac{T_2-T_1}{L}$.