Complementi di Metodi Matematici per la Fisica. Esame 12/02/2024

Per passare all'orale sono necessari 17/34 punti. Durata: 2h. Si può usare un formulario personale al massimo di 4 facciate.

NOTA: Si svolga uno solo, a scelta, tra gli esercizi $3a$) e $3b$), non entrambi. Uno solo verrà corretto.

Esercizio 1. (11 punti)

Si consideri l'equazione di Laplace all'interno di un dominio quadrato di lati $L \times L$:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad \text{per } (x, y) \in [0, L] \times [0, L], \tag{0.1}$$

con condizioni di bordo di Dirichlet:

$$\begin{array}{ll} u(0, y) = y(y - L), & y \in [0, L], \\ u(L, y) = 0, & y \in [0, L], \\ u(x, 0) = 0, & x \in [0, L], \\ u(x, L) = 0, & x \in [0, L]. \end{array} \tag{0.2}$$

Si scriva la soluzione del problema con il metodo di Fourier. NOTA: i coefficienti di Fourier vanno espressi come integrali espliciti, ma non è necessario calcolare gli integrali.

Esercizio 2. (8 punti)

Si consideri la seguente PDE lineare in due variabili per una grandezza $u(x, y)$:

$$u_x + y\, u_y = yx, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}. \tag{0.3}$$

Si scriva la soluzione generale dell'equazione, evidenziando la dipendenza da parametri o funzioni arbitrarie.

Esercizio 3. (7 punti)

Si svolga uno solo tra gli esercizi 3a) o 3b).

Es. 3 a) (7 punti) Si studi il comportamento di una soluzione generica della seguente equazione differenziale ordinaria nel limite $x \to 0^+$:

$$y''(x) - x^{-4} y(x) = 0. \tag{0.4}$$

In particolare, si ottengano i primi due termini di uno sviluppo asintotico di $S(x) = \log y(x)$ per $x \to 0^+$.

Es. 3 b). (7 punti) La seguente equazione differenziale possiede tre punti singolari, tutti fuchsiani:

$$y''(x) + \left(\frac{3}{2(x-2)} - \frac{5}{4(x+2)} + \frac{7}{4(x-3)} \right) y'(x) + \frac{\left(\frac{10}{x+2} - \frac{5}{4(x-3)} \right) y(x)}{(x-3)(x-2)(x+2)} = 0. \qquad (0.5)$$

Usando il metodo di Papperitz-Riemann, si ottenga la più generale soluzione tale che $\lim_{x\to 3} y(x) = 0$, esprimendola in termini di funzioni speciali esplicite ed eventuali costanti arbitrarie.

Suggerimento: Per abbreviare i calcoli, si può usare l'informazione che gli indici nel punto singolare fuchsiano $x = 3$ sono $\left\{\frac{1}{4}, -1\right\}$, e nel punto fuchsiano $x = -2$ sono $\left\{\frac{1}{4}, 2\right\}$.

Esercizio 4. (8 punti)

Si consideri l'equazione delle onde, che descrive lo spostamento verticale u della membrana di un tamburo circolare di raggio R:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,y,t) - c^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) u(x,y,t) = 0, \quad \text{per } x^2 + y^2 \leq R \qquad (0.6)$$

dove t rappresenta il tempo, c è un parametro, e le condizioni di bordo impongono $u = 0$ sul bordo del tamburo:

$$u(x,y,t) = 0, \qquad \text{per } x^2 + y^2 = R^2. \qquad (0.7)$$

- (7 punti) Usando il metodo di decomposizione in autofunzioni, si risolva il problema ai valori iniziali:

  $$u|_{t=0} = \sin\theta f(r), \qquad \partial_t u|_{t=0} = 0, \quad \text{per } \theta \in [0, 2\pi], \quad r \in [0, R]. \qquad (0.8)$$

  dove r e θ sono coordinate polari, i.e. $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.

  Suggerimento: Si cerchi la soluzione nella forma di una serie

  $$u = \sin\theta \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \psi_n(r) c_n, \qquad (0.9)$$

  individuando in modo appropriato le funzioni T_n, ψ_n e i coefficienti c_n in modo da soddisfare l'equazione delle onde e imporre le condizioni iniziali e di bordo. I coefficienti c_n possono essere lasciati espressi in termini di integrali.

- (1 punto) La soluzione del problema precedente è in generale periodica nel tempo? Se sì, quale è il periodo? Se no, c'è una scelta della funzione $f(r)$ in (0.8) che genererebbe un moto periodico nel tempo?

Useful equations

Orthogonality properties for trigonometric functions:

for $m, n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{2}{L}\int_0^L \sin(\frac{n\pi x}{L})\sin(\frac{m\pi x}{L})dx = \delta_{m.n} \tag{0.10}$$

$$\frac{2}{L}\int_0^L \cos(\frac{n\pi x}{L})\cos(\frac{m\pi x}{L})dx = \delta_{m.n}\, 2^{\delta_{n,0}}, \tag{0.11}$$

$$\frac{2}{L}\int_0^L \cos(\frac{2n\pi x}{L})\sin(\frac{2m\pi x}{L})dx = \frac{2}{L}\int_0^L \cos(\frac{(2n+1)\pi x}{L})\sin(\frac{(2m+1)\pi x}{L})dx = 0 \tag{0.12}$$

Canonical form of P-symbol

The "canonical form" of the Papperitz Riemann equation is

$$y = P\left\{\begin{array}{cccc} & 0 & 1 & \infty \\ x & 0 & 0 & a \\ & 1-c & c-a-b & b \end{array}\right\} \tag{0.13}$$

and it admits one solution:

$$y =_2 F_1(a,b;c;x) \tag{0.14}$$

Other solutions can be found via transformations.

2D Laplace operator in polar coordinates

Going from Cartesian coordinates $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ to polar coordinates, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, the Laplace operator transforms as

$$\partial_x^2 + \partial_y^2 = \partial_r^2 + \frac{\partial_r}{r} + \frac{\partial_\theta^2}{r^2}. \tag{0.15}$$

Bessel differential equation.

The Bessel differential equation reads

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2 - \alpha^2)y(x) = 0. \tag{0.16}$$

For $\alpha \in \mathbb{R}^+$, this equation has a basis of two independent solutions, denoted as $J_\alpha(x)$ (Bessel function of the first kind) and $Y_\alpha(x)$ (Bessel function of the second kind), distinguished by behaviour at the origin: $J_\alpha(x) \sim x^\alpha$ and $Y_\alpha(x) \sim x^{-\alpha}$ for $x \sim 0$.

Zeros and orthogonality for Bessel functions. The zeros of Bessel functions are denoted in increasing order by $\mu_{\alpha,i}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, such that $J_\alpha(\mu_{\alpha,i}) = 0$. Bessel functions satisfy an orthogonality relation which involves their zeros

$$\int_0^1 dx\, x\, J_\alpha(\mu_{\alpha,i}x)\, J_\alpha(\mu_{\alpha,j}x) \quad = \quad \delta_{i,j}, \quad i, j \in \mathbb{N}^+. \tag{0.17}$$

The zeros are real numbers that can be obtained only numerically. For example, the values of the first few zeros for the functions J_0, J_1, J_2 are approximately

$$\mu_{0,i} \in \{2.40483, 5.52008, 8.65373, 11.7915, 14.9309, \ldots\}\,, \tag{0.18}$$
$$\mu_{1,i} \in \{3.83171, 7.01559, 10.1735, 13.3237, 16.4706, \ldots\}\,, \tag{0.19}$$
$$\mu_{2,i} \in \{5.13562, 8.41724, 11.6198, 14.796, 17.9598, \ldots\}\,. \tag{0.20}$$

1 Soluzioni

Es. 1

La soluzione è

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \, \sin(\frac{n\pi}{L}y) \, \sinh(\frac{n\pi}{L}(L-x)), \tag{1.21}$$

con

$$A_n = \frac{2}{L\sinh(n\pi)} \int_0^L dy \, y(y-L)\sin(\frac{n\pi}{L}y). \tag{1.22}$$

Es. 2

La soluzione completa si può scrivere come

$$u(x,y) = y(x-1) + G(ye^{-x}), \tag{1.23}$$

dove G è una funzione arbitraria.

Es. 3 a)

Si può svolgere con il metodo dell'equilibrio dominante, assumendo $|S''(x)| << (S'(x))^2$ per $x \to 0^+$. La soluzione prende la forma

$$y(x) = e^{S(x)}, \tag{1.24}$$

con

$$S(x) = \pm\frac{1}{x} + \log(x) + o\left(\log(x)\right), \text{ per } x \to 0^+. \tag{1.25}$$

In questo caso, incidentalmente, si può verificare che i primi due termini di questo sviluppo forniscono una soluzione esatta.

Es. 3b)

Gli indici nel punto fuchsiano rimanente $x = 2$ sono $\left\{0, -\frac{1}{2}\right\}$.

Visto che ci viene chiesta una soluzione tendente a zero per $x \to 3$, e che gli indici in tale punto sono $\left\{\frac{1}{4}, -1\right\}$, dobbiamo selezionare la soluzione corrispondente all'indice $1/4$, scartando quella corrispondente all'indice -1. Per portarci in forma canonica si può procedere in diversi modi, ad esempio con la trasformazione $x \to x' = \frac{4(x-3)}{5(x-2)}$ che manda $3 \to 0$, $2 \to \infty$, $-2 \to +1$.

Procedendo con passaggi standard per estrarre la soluzione desiderata, troviamo la seguente forma per la soluzione più generale che si annulla in $x = 3$:

$$y(x) = A\left(\frac{x-3}{x-2}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{4(x-3)}{5(x-2)} - 1\right)^{\frac{1}{4}} {}_2F_1(\frac{1}{2}, 0; \frac{9}{4}; \frac{4(x-3)}{5(x-2)}), \tag{1.26}$$

con A una costante arbitraria.

Es. 4)

L'equazione delle onde su dominio circolare si può risolvere in coordinate polari. In questo caso, come visto a lezione, le singole autofunzioni hanno una delle forme seguenti

$$\sin(m\theta) \times \psi_{m,k}(r) \times \sin(kct), \tag{1.27}$$
$$\cos(m\theta) \times \psi_{m,k}(r) \times \sin(kct), \tag{1.28}$$
$$\sin(m\theta) \times \psi_{m,k}(r) \times \cos(kct), \tag{1.29}$$
$$\cos(m\theta) \times \psi_{m,k}(r) \times \cos(kct), \tag{1.30}$$

e dipendono dagli autovalori $m \in \mathbb{N}$ e $k \in \mathbb{R}$, dove la parte radiale $\psi_{m,k}(r)$ soddisfa l'equazione di Bessel (1.31) con variabile riscalata, cioè

$$r^2\psi''(r) + r\psi'(r) + (r^2k^2 - m^2)\psi(r) = 0, \tag{1.31}$$

la cui soluzione **(scegliendo solo la soluzione regolare in $r = 0$)** è la f. di Bessel di prima specie:

$$\psi_{m,k}(r) = J_m(kr). \tag{1.32}$$

Data la condizione iniziale del problema, le uniche autofunzioni che compariranno avranno la seguente forma:

$$\sin\theta J_1(kr)\cos(kct). \tag{1.33}$$

Dobbiamo ora capire quali valori può assumere k.

La soluzione del nostro problema avrà la forma

$$u(r,\theta,t) = \sin\theta \sum_{n=1}^{\infty} \cos(k_nct) J_1(k_nr) c_n \tag{1.34}$$

con somma su qualche spettro di valori k_n. Per capire quali valori siano ammissibili dobbiamo imporre le condizioni di bordo: u si annulla sul bordo del tamburo, quindi

$$u(R,\theta,t) = 0 \longrightarrow J_1(k_nR) = 0, \forall n. \tag{1.35}$$

Quindi possiamo collegare lo spettro di valori ammissibili per k agli zeri della funzione di Bessel J_1 (come visto a lezione):

$$k_n \equiv \frac{\mu_{1,n}}{R}, \tag{1.36}$$

tali che $J_1(\mu_{1,j}) = 0 \forall j$. Assumiamo la notazione del formulario, in cui gli zeri sono ordinati.

Ora ci manca solo fissare i coefficienti c_n. Possiamo farlo imponendo la condizione iniziale. Per le relazioni di ortogonalità tra f. di Bessel, abbiamo

$$c_n = \frac{\int_0^R r dr J_1(\mu_{1,n}\frac{r}{R})\, f(r)}{\int_0^R r dr \left(J_1(\mu_{1,n}\frac{r}{R})\right)^2}. \tag{1.37}$$

Questo completa la risposta al primo quesito.

Risposta al secondo quesito: In generale la soluzione non è periodica, in quanto le frequenze di oscillazione sono $\omega_n = ck_n = c\mu_{1,n}/R$, e queste sono incommensurabili tra loro in quanto gli zeri delle funzioni di Bessel sono numeri irrazionali. Questo implica che la loro sovrapposizione dia un moto non periodico nel tempo.

L'unico modo di generare una soluzione periodica nel tempo è scegliere una condizione iniziale che ecciti una sola armonica. Ad esempio, se scegliessimo $f(r) \equiv A\, J_1(\mu_{1,3}\frac{r}{R})$, allora avremmo che la soluzione con questa soluzione iniziale conterrebbe solo l'armonica corrispondente a $k = k_3$, cioè avremmo:

$$u = A\,\sin\theta\cos(\omega_3 t) J_1(k_3 r). \tag{1.38}$$

Questa soluzione è periodica nel tempo in quanto contiene una frequenza pura di oscillazione.

Si noti che nel caso di una corda, invece, abbiamo soluzioni periodiche nel tempo per qualunque condizione iniziale, in quanto le varie frequenze di oscillazione sono tutte multipli interi della frequenza fondamentale.