Complementi di Metodi Matematici per la Fisica. Prova d'esame 24/01/2024

NOTA (giugno 2024): Un errore concettuale è stato corretto nel quesito 2, si veda la nota a piè di pagina.

Per passare all'orale sono necessari 17/34 punti. Durata: 2h. Si può usare un formulario personale al massimo di 4 facciate.

NOTA: Si svolga uno solo, a scelta, tra gli esercizi $3a)$ **e** $3b)$**, non entrambi. Uno solo verrà corretto.**

Esercizio 1. (11 punti)

Le oscillazioni trasversali di una corda ancorata a due punti $x = 0$ e $x = L$ sono descritte dall'equazione delle onde con velocità di propagazione c:

$$u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = 0, \quad x \in [0, L]. \tag{0.1}$$

Gli estremi della corda sono fissati. Al tempo $t = 0$, la corda viene posta nella condizione iniziale

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = (L^2 - x^2)^2, \quad x \in [0, L]. \tag{0.2}$$

- (10 punti) Si scriva l'evoluzione temporale della soluzione per $t \geq 0$ usando il metodo di Fourier. I coefficienti di Fourier vanno specificati come integrali espliciti, ma non è necessario calcolare gli integrali.
- (1 punto) Sia T il periodo temporale della soluzione precedente per $t > 0$. Si faccia un esempio di condizione iniziale che porti a oscillazioni di periodo $T/3$.

Esercizio 2. (8 punti)

Si consideri la seguente equazione per una funzione di due variabili reali $u(x,t)$:

$$t\, u_t + u^2\, u_x = 0, \tag{0.3}$$

dove t rappresenta il tempo, con una condizione iniziale at tempo $t = 1$:*

$$u(x,1) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{0.4}$$

- (6 punti) Si scriva in forma implicita la soluzione dell'equazione per $t \geq 0$, usando il metodo delle caratteristiche.
- (2 punti) Data una condizione iniziale $u_0(x)$ infinitamente differenziabile, è possibile la formazione di uno shock con $|u_x| \to \infty$ per qualche istante successivo? Si giustifichi la risposta con un'analisi quantitativa.

*Si noti che non è possibile imporre una generica condizione iniziale a $t = 0$!

Esercizio 3. (7 punti)

Si svolga uno dei due esercizi 3a) o 3b).

Es. 3 a) (7 punti) Si studi il comportamento per grandi tempi $t \to +\infty$ delle soluzioni della seguente equazione differenziale ordinaria:

$$y''(t) + t^8 y(t) = 0. \tag{0.5}$$

In particolare, si ottengano i primi due termini di uno sviluppo asintotico di $S(t) = \log y(t)$ per $t \to +\infty$.

Es. 3 b). (7 punti) La seguente equazione differenziale possiede tre punti singolari, tutti fuchsiani:

$$y''(x) + \left(\frac{7}{3(x-1)} - \frac{4}{3(x+2)} \right) y'(x) + \left(\frac{7}{27(x+2)} + \frac{2}{3(x+2)^2} - \frac{7}{27(x-1)} \right) y(x) = 0. \tag{0.6}$$

Usando il metodo di Papperitz-Riemann, si determini una soluzione dell'equazione con un comportamento **non divergente** nel punto $x = 1$, esprimendola in termini di funzioni speciali esplicite.

Suggerimento per lo svolgimento: Per abbreviare i calcoli, si può usare l'informazione che gli indici nel punto singolare fuchsiano $x = \infty$ sono $\left\{\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right\}$, mentre nel punto singolare fuchsiano $x = -2$ sono $\left\{2, \frac{1}{3}\right\}$.

Esercizio 4. (8 punti)

La diffusione di una goccia di inchiostro in una piscina quadrata di dimensione $L \times L$ è descritta dall'equazione di diffusione, formalmente identica all'equazione del calore:

$$\partial_t \rho(x, y, t) = \alpha(\partial_{xx} + \partial_{yy})\rho(x, y, t), \quad (x, y) \in [0, L] \times [0, L], \quad t \geq 0, \tag{0.7}$$

dove ρ rappresenta la concentrazione di inchiostro e $\alpha > 0$ è il coefficiente di diffusione. La condizione di bordo appropriata è una condizione di Neumann su tutti i lati:

$$\rho_y|_{y=0} = \rho_y|_{y=L} = \rho_x|_{x=0} = \rho_x|_{x=L} = 0. \tag{0.8}$$

Assumendo che l'inchiostro sia inizialmente concentrato in un punto (x', y') della vasca:

$$\rho(x, y, 0) = R_0 \delta(x - x')\delta(y - y'), \tag{0.9}$$

dove $R_0 > 0$ è una costante, si esprima la distribuzione di inchiostro a tempi successivi $t > 0$ usando il metodo di Fourier in due variabili.

Nota per lo svolgimento: Nonostante la condizione iniziale a delta di Dirac sia un caso limite, si può applicare il metodo di Fourier in modo standard. Vista la semplicità di questa condizione iniziale, è possibile calcolare esplicitamente gli integrali che definiscono i coefficienti di Fourier.

Soluzioni

Es. 1

La soluzione per il moto della corda a $t \geq 0$ con estremi fissati e le condizioni iniziali del problema si può scrivere come

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(k_n x) a_n \sin(\omega_n t), \quad k_n \equiv n\frac{\pi}{L}, \quad \omega_n = ck_n, \tag{0.10}$$

con

$$a_n \equiv \frac{2}{\omega_n L} \int_0^L \sin(k_n x)\,(L^2 - x^2)^2\,dx. \tag{0.11}$$

Per rispondere al secondo quesito, notiamo che il periodo di ogni oscillazione armonica di frequenza ω_n è dato da $T_n = 1/\omega_n = \omega_1/n$. Il periodo temporale complessivo della soluzione è il minimo comune multiplo dei periodi di tutte le armoniche, dato da

$$T = \frac{L}{\pi c} = 1/\omega_1, \tag{0.12}$$

che è anche il periodo del'armonica più bassa.

Se vogliamo costruire una soluzione con periodo $T/3$, vuol dire che tale soluzione deve contenere solo armoniche contenenti le armoniche ω_{3m}, $m = 1, 2, 3, \ldots$ (con numero d'onda multiplo di 3). Ci sono ovviamente infinite condizioni iniziali che contengono solo queste armoniche. La scelta più semplice è una condizione iniziale che contenga solo l'armonica di frequenza ω_3, ad esempio:

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = \sin(3x\frac{\pi}{L}). \tag{0.13}$$

Questa soluzione ha appunto periodo $T/3$ come richiesto.

Es. 2

Usando il metodo delle caratteristiche si può scrivere la soluzione in forma implicita come

$$\begin{aligned} u(\ell, s) &= u_0(s), && (0.14)\\ x(\ell, s) &= s + u_0(s)^2 \ell && (0.15)\\ t(\ell, s) &= e^{\ell}, && (0.16) \end{aligned}$$

dove $\ell = 0$ $s \in \mathbb{R}$ corresponde alla curva $t = 1$ su cui sono specificati i dati iniziali.

Per studiare la possibile formazione di punti in cui $u_x \to \infty$, possiamo dedurre con un argomento simile a quello usato per l'equazione di Burgers, che

$$u_x = \frac{u_0'(s)}{1 + 2u_0(s)u_0'(s)\log t}. \tag{0.17}$$

Quindi se esistono punti per $t \geq 1$, e $s \in \mathbb{R}$ tali che $1 + 2u_0(s)u_0'(s)\log t = 0$, si può formare una singolarità anche se il profilo iniziale $u_0(s)$ è completamente regolare.

Es. 3 a)

Due soluzioni indipendenti si possono caratterizzare dagli andamenti $y_\pm(t) = e^{S_\pm(t)}$, con

$$S_\pm(t) \sim \pm i t^4 - 2\log(t) + o(\log(t)). \tag{0.18}$$

Es. 3 b)

Gli indici nel restante punto fuchsiano $x = 1$ sono $\rho = 0$ o $\rho = -4/3$. Ci viene chiesto di scrivere una soluzione non divergente in $x \to 1$, quindi dobbiamo isolare una soluzione corrispondente all'andamento $\propto O((x-1)^0)$ per $x \to 1$.

Ci sono vari modi equivalenti di manipolare il P-symbol per estrarre una tale soluzione. Ad esempio possiamo mappare $1 \to 0$, $-2 \to 1$, $\infty \to \infty$ con la mappa $x' = \frac{1-x}{3}$. Facendo poi opportune trasformazioni per portarci alla forma canonica che ci interessa troviamo la soluzione

$$y_1(x) = (x'-1)^2 \, {}_2F_1(\frac{7}{3}, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, x') = (\frac{2+x}{3})^2 \, {}_2F_1(\frac{7}{3}, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, \frac{1-x}{3}). \tag{0.19}$$

Questa soluzione come richiesto è regolare per $x \to 1$.

Es. 4

La soluzione può essere decomposta in armoniche. Date le condizioni di contorno di Neumann le armoniche sono

$$\cos(m\frac{\pi x}{L}) \times \cos(n\frac{\pi y}{L}) e^{-\alpha\sqrt{m^2+n^2}\frac{\pi}{L}t}, \tag{0.20}$$

con $m = 0, 1, 2, 3, \ldots$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$. **Importante:** questi due numeri quantici sono indipendenti, quindi la soluzione sarà espressa in termini di una **doppia** somma:

$$\rho(x, y, t) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} A_{m,n}\, e^{-\alpha\sqrt{m^2+n^2}\frac{\pi}{L}t}\, \cos(m\frac{\pi x}{L}) \times \cos(n\frac{\pi y}{L}), \tag{0.21}$$

dove la condizione iniziale, usando le proprietà della funzione delta di Dirac, può essere valutata esplicitamente e prende il valore:

$$A_{m,n} = R_0 \cos(n\frac{\pi x'}{L}) \times \cos(m\frac{\pi y'}{L})\, \frac{4}{L^2}\, 2^{-\delta_{m,0}-\delta_{n,0}}. \tag{0.22}$$