Esempio di prova d'esame

Questo esempio è solo per avere un'idea del formato della prova. NOTA: In un esame verrebbe richiesto di svolgere **un solo esercizio tra** $3a$) **e** $3b$), non entrambi.

Per passare all'orale sono necessari 17/34 punti. Durata: 2h

È possibile usare qualsiasi formula dal file "UsefulEquations.pdf" (un file analogo con una selezione di formule verrà distribuito per l'esame), inoltre si può usare un formulario personale al massimo di 4 facciate.

Esercizio 1. (11 punti)

Si consideri l'evoluzione della temperatura $u(x,t)$ di una barretta metallica di lunghezza L, in presenza di un processo esterno caratterizzato da una funzione $F(x,t) = A\cos(t)\sin(\pi\frac{x}{L})$ che pompa calore nel sistema:

$$u_t - \alpha\, u_{xx} = A\cos(t)\sin(\pi\frac{x}{L}), \quad 0 \leq x \leq L, \tag{0.1}$$

$\alpha > 0$, dove t denota il tempo. Le condizioni iniziali e ai bordi siano

$$u(0,t) = u(x,L) = 0, \;\; u(x,0) = x^2(x-L)^2. \tag{0.2}$$

- (9 punti) Si risolva il problema nel caso particolare $A = 0$. **Suggerimento: metodo di Fourier.** I coefficienti di Fourier possono essere lasciati espressi come integrali.
- (2 punti) Si trovi una soluzione particolare $v(x,t)$ tale che $u(x,t) = u_{A=0}(x,t) + v(x,t)$ soddisfi il problema completo con $A \neq 0$, dove $u_{A=0}(x,t)$ è la soluzione trovata al punto precedente.

Esercizio 2. (8 punti)

Si consideri l'equazione nonlineare

$$u_t + 2tuu_x = 0, \tag{0.3}$$

con la condizione iniziale $u(s,0) = \tanh(s)$, $\in \mathbb{R}$.

- (6 punti) Si scriva la soluzione dell'equazione per $t \geq 0$ con il metodo delle caratteristiche, anche in forma implicita.
- (2 punti) Data questa condizione iniziale, si analizzi per quale intervallo temporale la soluzione ottenuta con il metodo delle caratteristiche rimane a un sol valore.

Esercizio 3 a). (7 punti)

La soluzione di una certa equazione differenziale ordinaria è descritta dal simbolo di Papperitz-Riemann:

$$f(t) = P\left\{ t;\ \begin{matrix} 1 & 2 & \infty \\ -\frac{3}{4} & \rho & -\frac{1}{4} \\ 1 & \frac{1}{2}-\rho & \frac{1}{2} \end{matrix} \right\}, \quad \rho \in \mathbb{R}. \tag{0.4}$$

Si scrivano, in termini di funzioni speciali esplicite, due soluzioni indipendenti dell'equazione che abbiano uno sviluppo in serie della forma

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n t^{-\alpha-n} \tag{0.5}$$

(dove α è un parametro diverso per le due soluzioni) per t sufficientemente grande. NON è richiesto di calcolare coefficienti c_n, ma di scrivere le due soluzioni in forma compatta in termini di funzioni speciali.

Esercizio 3 b). (7 punti)

Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) = \left(\frac{1}{(x-1)^3} + 2\right) y(x). \tag{0.6}$$

Siamo interessati al comportamento delle soluzioni per $x \sim 1$.

- Si discuta se $x = 1$ sia un punto singolare fuchsiano oppure irregolare.
- Si determinino i possibili andamenti delle soluzioni per $x \to 1^+$. È sufficiente determinare i primi due termini (dominante e sottodominante) di un'espansione di $S(x)$ per $x \to 1^+$, dove $y(x) = e^{S(x)}$.

Esercizio 4. (8 punti)

Si consideri l'equazione di Laplace,

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \tag{0.7}$$

in un dominio costituito dalla metà di un disco: $x^2 + y^2 \leq R^2$, $x \geq 0$, con condizioni di bordo

$$u(0, y) = 0, \quad y \in [-R, R], \tag{0.8}$$

$$u(R\cos\theta, R\sin\theta) = \cos(3\theta) + \cos\theta, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq +\frac{\pi}{2}. \tag{0.9}$$

Si determini la soluzione per u all'interno del dominio.

Suggerimento: Si consiglia di utilizzare coordinate polari, cercando una soluzione della forma $\sum_n F_n(\theta)\, G_n(r)$. Si determini la forma di F_n e G_n imponendo l'equazione di Laplace e le condizioni di bordo.

Soluzioni

- 1) Esercizio 0 del foglio di esercizi su PDE del 2nd ordine su Moodle.
- 2) Esercizio 1b del foglio di esercizi su PDE del prim'ordine su Moodle
- 3a) Esercizio 6 dell'ultima parte del foglio di esercizi su punti singolari irregolari, su Moodle.
- 3b) Esercizio 5 del foglio di esercizi sulle ODE su Moodle, ultima parte.
- 4) Esercizio 12 del foglio di esercizi su PDE del 2nd ordine su Moodle.