Esercizi sull'espansione attorno a singolarità (soprattutto punti irregolari, con qualche punto fuchsiano).

Es 1. A lezione abbiamo visto come studiare l'equazione di Airy

$$y''(x) = xy(x) \tag{0.1}$$

per $x \to +\infty$. Abbiamo dedotto l'esistenza di due andamenti possibili

$$y_{\pm}(x) \sim e^{\pm\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}} x^{-\frac{1}{4}} \left(1 + \dots\right). \tag{0.2}$$

Si determini il termine successivo dello sviluppo asintotico di queste soluzioni.

Nota: il risultato si può ottenere studiando $S(x) = \log(y(x)) = \pm\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4}\log(x) + D(x)$, con $D(x) << \log(x)$. Studiando l'equazione differenziale per $D(x)$ e il corrispettivo equilibrio dominante, si dovrebbe arrivare a

$$D(x) \sim \pm\frac{5}{48}x^{-3/2}, \tag{0.3}$$

quindi

$$y_{\pm}(x) \sim e^{\pm\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}} x^{-\frac{1}{4}} \left(1 \pm \frac{5}{48}x^{-3/2} + \dots\right), \quad x \to +\infty. \tag{0.4}$$

Es 2. L'equazione di Bessel (che useremo per risolvere alcune equazioni a derivate parziali), ha la forma:

$$x^2y''(x) + xy'(x) + (x^2 - \nu^2)y(x) = 0, \tag{0.5}$$

dove ν è un parametro reale. Si mostri che l'equazione ha una base di soluzioni (tradizionalmente chiamate $J_\nu(x)$ e $Y_\nu(x)$ - funzioni di Bessel di prima e seconda specie, rispettivamente), con l'andamento asintotico

$$J_\nu(x) \sim \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\left(x - \frac{1}{2}\nu\pi - \frac{\pi}{4}\right), \quad Y_\nu(x) \sim \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \cos\left(x - \frac{1}{2}\nu\pi - \frac{\pi}{4}\right), \tag{0.6}$$

per $x \to +\infty$.

Si discuta se le soluzioni dell'equazione sono oscillanti anche per $x \to -\infty$.

Es. 3 Si studi per $x \to +\infty$ l'equazione

$$y'' + x^{-\frac{3}{2}}y' - x^{-2}y = 0. \tag{0.7}$$

- Si determini il comportamento asintotico della soluzione per $x \to +\infty$. in particolare, si determinino due ordini dello sviluppo asintotico di $S(x) = \log y(x)$.

- Si discuta come la soluzione trovata risolvendo il punto precedente sia consistente con questa osservazione: facendo il cambiamento di coordinata $x^{1/2} = t$, l'equazione differenziale si trasforma in
$$t^2 y''(t) + (2 - t)y'(t) - 4y(t) = 0.$$
Cosa troviamo se analizziamo direttamente $t \to +\infty$ in questa equazione?

Suggerimento per il primo punto: Si noti che in questo limite i termini dell'equazione non sono "più singolari" di quanto sarebbero per il caso fuchsiano. Tuttavia il punto è irregolare perchè ci sono potenze non intere di x. In questo caso l'ipotesi $(S')^2 >> S''$, per l'esponente $S(x)$ tale che $y(x) = e^{S(x)}$, NON funziona (lo si domostri, mostrando che questa assunzione porta a una contraddizione!). L'equilibrio dominante corretto invece è lo stesso che si avrebbe per un pinto fuchsiano, in cui $S(x) \sim K \log(x)$. Qual è questo equilibrio dominante nel caso dell'equazione in questione? Si noti che questo equilibrio coinvolge **tre** termini, tutti dello stesso ordine!

Es. 4 Si studino i possibili comportamenti per $x \to +\infty$, delle soluzioni delle seguenti equazioni differenziali.

1) $y'' = x^{-3} y$

2) $y'' = x^{+3} y$

3) $x(x-1)y'' + y' + \frac{3y}{x-2} = 0$.

Nel caso di punto irregolari, si proceda calcolando almeno due termini dello sviluppo asintotico di $S(x) = \log(y(x))$.

Suggerimento: si controlli prima di tutto se infinito è un punto irregolare o fuchsiano, e si proceda di consequenza.

Es. 5 Si studino i possibili comportamenti per $x \to 0^+$ della seguente equazione differenziale:
$$y'' = \sqrt{x} y. \tag{0.8}$$

Nota: Questo esercizio è più complcato della media. Si noti che anche questo è un caso in cui l'ipotesi $(S')^2 >> S''$, per l'esponente $S(x)$ tale che $y(x) = e^{S(x)}$, non è consistente (lo si dimostri)! Occorre trovare un diverso equilibrio dominante consistente per risolvere il problema. In questo caso si può fare in due modi diversi.

Es. 6 Si studi il comportamento per $x \to 0^+$, di:
$$xy''' - y' = 0. \tag{0.9}$$

Suggerimento: Ridefinendo la funzione incognita, diventa un problema del second ordine.

Es. 7 Si studino i possibili comportamenti delle seguente equazione differenziali nei limiti indicati:

1)
$$x(x-1)y'' + 3y' + \frac{y}{x} = 0, \text{ per } x \to 0^+, \tag{0.10}$$

2)
$$y''(x) = \left(\frac{1}{(x-1)^3} + 2\right) y(x), \text{ per } x \to 1^+. \tag{0.11}$$

Nota: si determini prima di tutto se si tratta di punto irregolare o fuchsiano, procedendo di conseguenza. Nel caso di punto irregolare, si determinino i primi due termini (dominante e sottodominante) di un'espansione di $S(x)$, dove $y(x) = e^{S(x)}$.

Esercizio 7. A lezione abbiamo visto l'equazione

$$x^2 y''(x) + (1+3x)y'(x) + y(x) = 0, \tag{0.12}$$

e trovato che, definendo $y(x) = e^{S(x)}$, sono consistenti due equilibri dominanti per $x \to 0^+$:

1) $S'(x) \sim -1$.

2) $x^2(S'(x))^2 \sim -S'(x)$.

- Si verifichi che qualsiasi altra scelta di equilibrio dominante non sarebbe stata consistente.
- Nel caso 1), si calcoli il termine successivo dell'espansione si $y(x)$. Si dovrebbe trovare (normalizzando la soluzione opportunamente):

$$y(x) \sim 1 - x + 2x^2 + \ldots \tag{0.13}$$

per $x \to 0^+$. I coefficienti possono anche essere determinati in modo ricorsivo e si può dimostrare in generale che la serie (asintotica) è $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n!) x^n$.