

Esercizi su funzioni di Green e problemi di bordo.

Funzioni di Green per problemi a valori iniziali

Es 1. Si risolva il seguente problemi ai valori iniziali con il metodo della funzione di Green, specificando se la soluzione è unica (dati i parametri del problema).

$$y''(t) = -\omega^2 y(t) + t^3, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 5 \quad (0.1)$$

Es 2. Si scriva la soluzione più generale del seguente problema ai valori iniziali con il metodo della funzione di Green.

$$y''(t) - 2y'(t) + y(t) + \sin(t) = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \quad (0.2)$$

Es 3. Si scriva la soluzione più generale del seguente problema ai valori iniziali

$$y'(t) - t^2 y(t) = \cos^2(t), \quad y(0) = 0. \quad (0.3)$$

Problemi a valori di bordo

Per svolgere questi esercizi si ricordi il seguente teorema visto a lezione: un problema a valori di bordo omogeneo ha solo la soluzione banale, se e solo se ogni corrispondente problema inomogeneo ha un'unica soluzione.

Es 4. Si determini se il seguente problema a valori di bordo ammette una soluzione per ogni scelta di A e B . Se sì, si scriva tale soluzione.

$$y''(t) = -4y(t), \quad y(0) = A, \quad y'(\pi) = B \quad (0.4)$$

Es 5. Si determini se il seguente problema a valori di bordo ammette una soluzione per ogni scelta di A e B . Se sì, si scriva tale soluzione.

$$y''(t) = -4y(t), \quad y(0) = A, \quad y(\pi) + 3y'(\pi) = B \quad (0.5)$$

Es 6. Dopo aver verificato le condizioni di applicabilità di questo metodo, si scriva la soluzione del seguente problema a valori di bordo usando il metodo della funzione di Green:

$$y''(t) + y(t) = 1 + t, \quad y(0) = A, \quad y\left(\frac{3}{2}\pi\right) = B \quad (0.6)$$

Es 7. Si verifichi che la seguente funzione:

$$G(x, t) = \frac{1}{\sinh(1)} \begin{cases} \sinh(t-1) \sinh(x), & 0 \leq x \leq t, \\ \sinh(t) \sinh(x-1), & t \leq x \leq 1 \end{cases}, \quad (0.7)$$

è la funzione di Green per il seguente problema di bordo:

$$y'' - y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0. \quad (0.8)$$

Si usi questa funzione di Green per scrivere la soluzione del problema ai valori di bordo

$$y''(x) - y(x) = 2 \sin(x), \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 2. \quad (0.9)$$

Es 8. Si verifichi che la seguente funzione:

$$G(x, t) = -K_1 e^{-K_2|x-t|}, \quad (0.10)$$

per una particolare scelta dei parametri K_1, K_2 , è la funzione di Green per il problema

$$y'' - y = 0, \quad y(\pm\infty) = 0. \quad (0.11)$$

Si fissi quale sia il valore dei parametri K_1, K_2 .

Quale sarebbe invece la funzione di Green per il problema ai valori iniziali

$$y'' - y = 0, \quad y(0) = y'(0) = 0 \quad ? \quad (0.12)$$

Si usino queste due funzioni di Green per scrivere le soluzioni dei seguenti problemi

•

$$y'' - y = \sin(t), \quad y(\pm\infty) = 0. \quad (0.13)$$

•

$$y'' - y = \sin(t), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \quad (0.14)$$

Es 9. Si usi il metodo della funzione di Green per risolvere il seguente problema ai valori di bordo

$$y''(t) = e^{t^2}, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1. \quad (0.15)$$