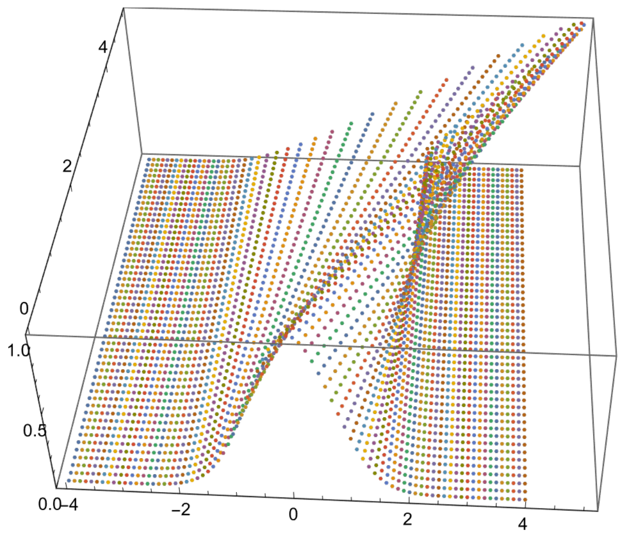
Burgers eq. with gaussian profile

In[ ]:=
```
u0[s_] := E^(-s^2)
```

In[ ]:=
```
ListPointPlot3D[Table[{s + t u0[s], t, u0[s]}, {s, -4, 4, 1/10}, {t, 0, 5, 1/10}]]
```

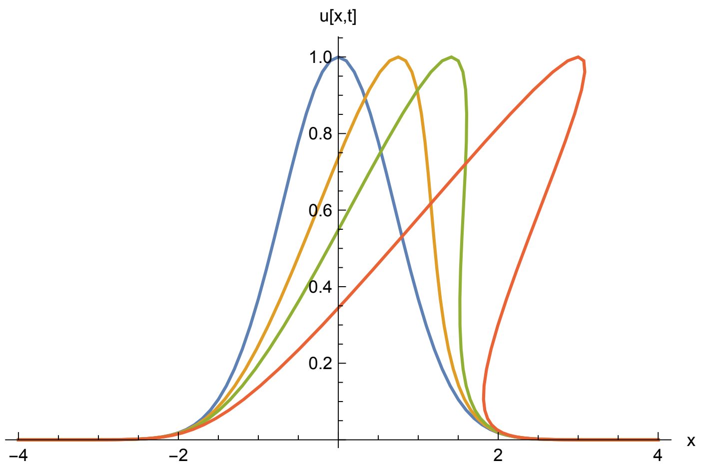
Out[ ]=



In[ ]:=
```
points[t_] := Table[{s + t u0[s], u0[s]}, {s, -4, 4, 1/10}]
```

In[ ]:=
```
ListPlot[{points[0], points[3/4], points[Sqrt[2]], points[3]},
 Joined → True, AxesLabel → {"x", "u[x,t]"}]
```

Out[ ]=

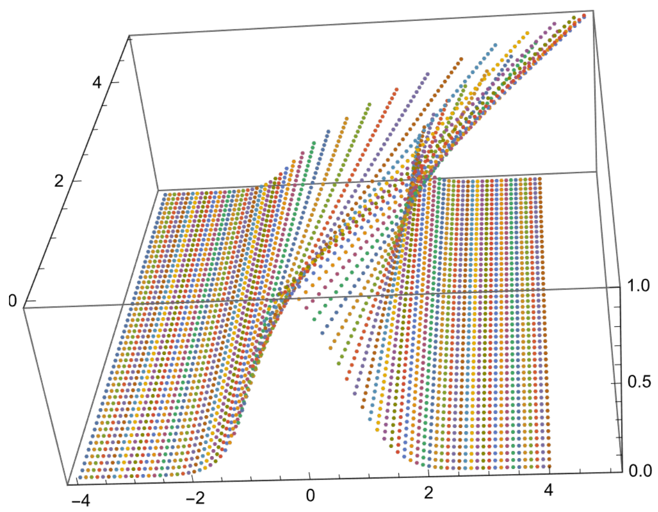


Burgers eq. with modified velocity, initial Gaussian profile

In[ ]:=
```
u0[s_] := E^(-s^2)
```

In[ ]:=
```
ListPointPlot3D[
 Table[{s + t (u0[s])^2, t, u0[s]}, {s, -4, 4, 1/10}, {t, 0, 5, 1/10}]]
```

Out[ ]=



In[ ]:=
```
D[-1/(2 u0'[s] × u0[s]), s]
Solve[% == 0, s]
-1/(2 u0'[s] × u0[s]) /. %[[2]]
```

Out[ ]=

$$e^{2 s^2} - \frac{e^{2 s^2}}{4 s^2}$$

Out[ ]=

$$\left\{\left\{s \to -\frac{1}{2}\right\}, \left\{s \to \frac{1}{2}\right\}\right\}$$

Out[ ]=

$$\frac{\sqrt{e}}{2}$$

In[ ]:=
```
points[t_] := Table[{s + t (u0[s])^2, u0[s]}, {s, -4, 4, 1/10}]
```

In[∘]:=
```
ListPlot[{points[0], points[Sqrt[E] / 2], points[3 / 2], points[3]},
 Joined → True, AxesLabel → {"x", "u[x,t]"}]
```
Out[∘]=

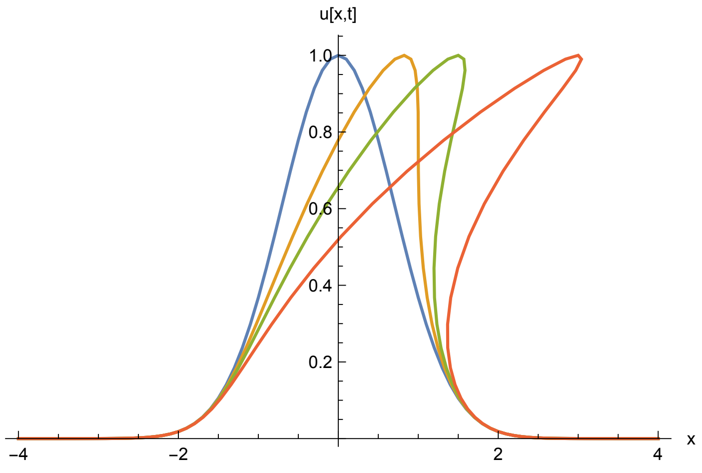


Illustrazione dell’equazione discussa a inizio della lezione

Le due figure successive mostrano la soluzione, con il metodo delle caratteristiche, della PDE

u_x + u u_y = 1

caso 1) condizioni iniziali u(s,1) = s per s ϵ [0,1].

caso 2) condizioni iniziali u(s,s) = 1 per s ϵ [0,1].

La curva blu rappresenta la curva dei valori iniziali.
Si noti come nel caso 1) (buone condizioni iniziali), la soluzione e` a un valore nei dintorni della curva iniziale.

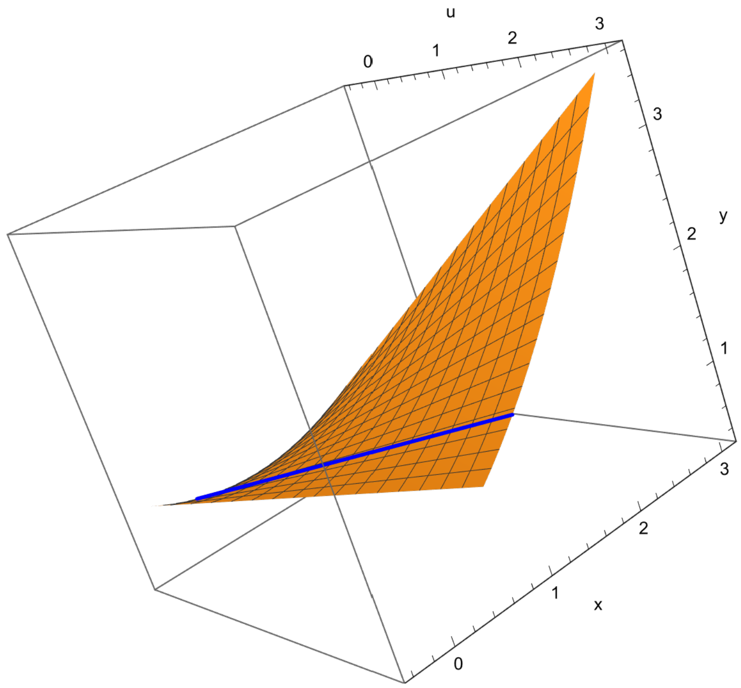
Nel secondo caso 2), la soluzione non esiste da un lato della curva iniziale, e assume due valori sull’altro lato.

Questo discende dal fatto che in questo caso le curve caratterisitiche sono tangenti alla curva di Cauchy, quindi il problema ai valori iniziali ha dei dati “pericolosi”.

In[ ]:=
```
Print["Caso 1) : buone condizioni iniziali "]
Show[ParametricPlot3D[{s + t, 1 + s t + t^2 / 2, s + t},
   {t, -0.3, 1}, {s, 0, 2}, AxesLabel → {"x", "y", "u"}],
 ParametricPlot3D[{s, s + 1 - s, s}, {s, 0, 2}, PlotStyle → Blue]]
```

```
Caso 1) : buone condizioni iniziali
```

Out[ ]=



In[ ]:=

```
Print["Caso 2) : condizioni iniziali pericolose
    (caratteristiche non intersecano bene la curva di Cauchy) "]
Show[ ParametricPlot3D[{s + t, s + t + t^2 / 2, 1 + t},
   {t, -2, 2.2}, {s, 0, 2}, AxesLabel → {"x", "y", "u"}],
 ParametricPlot3D[{s, s , 1}, {s, 0, 2}, PlotStyle → Blue]]
```

```
Caso 2) : condizioni iniziali pericolose
  (caratteristiche non intersecano bene la curva di Cauchy)
```

Out[ ]=