Complementi di Metodi Matematici per la Fisica. Esame 10/09/2024

Per passare all'orale sono necessari 17/34 punti. Durata: 2h. Si può usare un formulario personale al massimo di 4 facciate.

NOTA: Si svolga uno solo, a scelta, tra gli esercizi $3a$) e $3b$), non entrambi. Uno solo verrà corretto.

Esercizio 1. (11 punti)

Si consideri l'evoluzione della temperatura $u(x,t)$ di una barretta posta lungo l'intervallo $x \in [0, L]$ (con coefficiente di diffusività termica $\alpha = 1$):

$$u_t - u_{xx} = 0, \quad t \geq 0, \quad x \in [0, L]. \tag{0.1}$$

La temperatura è uniforme, $u(x,t) = 0$ per $t < 0$. Al tempo $t = 0$, il centro della barretta viene scaldato generando una condizione iniziale data da una delta di Dirac:

$$u(x,t) = \delta(x - \frac{L}{2})T_0, \text{ con } T_0 > 0. \tag{0.2}$$

- (10 punti) Supponendo che i bordi della barretta siano mantenuti **termicamente isolati**, si determini $u(x,t)$ per $t > 0$ con il metodo di Fourier.
- (1 punto) Si calcoli la temperatura assunta dalla barretta dopo un tempo infinito $t \to +\infty$, mostrando come questo valore sia consistente con la legge di conservazione dell'energia termica. Nota: la densità di energia termica è proporzionale alla temperatura.

Suggerimento: Si usi il metodo di decomposizione di Fourier. Data la semplicità delle condizioni iniziali, è possibile calcolare esplicitamente i coefficienti a partire dalla loro definizione come integrali.

Esercizio 2. (8 punti)

La grandezza $u(x,t)$ evolve secondo la seguente equazione nonlineare

$$u_t + \sin(u)u_x = 0, \tag{0.3}$$

e soddisfa la condizione iniziale

$$u(s,0) = s, \quad s \in \mathbb{R}. \tag{0.4}$$

- (6 punti) Si scriva in forma implicita la soluzione per $t \geq 0$ con il metodo delle caratteristiche.
- (2 punti) Si dimostri che l'equazione sviluppa degli shock, determinando il primo valore di t tale che la soluzione non sia più differenziabile.

Esercizio 3 a). (7 punti) La seguente equazione differenziale possiede tre punti singolari, tutti fuchsiani:

$$y''(x) + \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-5}\right) y'(x) - \frac{8y(x)}{25(x-5)(x-3)(x-1)^2} = 0. \tag{0.5}$$

Si scriva (in termini di funzioni speciali esplicite) la soluzione più generale dell'equazione tale che

$$\lim_{x\to 1} y(x) = 0,$$

avendo cura di segnalare eventuali parametri arbitrari.

Suggerimento: Si usi il metodo di Papperitz-Riemann. Per abbreviare i calcoli, si può usare l'informazione che gli indici nel punto singolare fuchsiano $x = 1$ sono $\{-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\}$, e nel punto fuchsiano $x = 3$ sono $\{0, 1\}$.

Esercizio 3 b). (7 punti) Si consideri la seguente equazione differenziale ordinaria per una grandezza $Y(t)$:

$$Y''(t) = +t^8\, Y(t). \tag{0.6}$$

Si determini quali sono i possibili andamenti asintotici della soluzione per $t \to +\infty$, ottenendo i primi due termini di uno sviluppo asintotico di $S(t) \equiv \log Y(t)$ per $t \to +\infty$.

Esercizio 4. (8 punti)

Si considerino le vibrazioni di una membrana quadrata di dimensioni $L \times L$ soggetta a una forza esterna proporzionale a un parametro K. Le vibrazioni sono descritte dall'equazione delle onde inomogenea:

$$u_{tt} - c^2\,(u_{xx} + u_{yy}) = K \times F(x, y, t), \quad (x, y) \in [0, L] \times [0, L], \quad t \geq 0, \tag{0.7}$$

dove $u(x, y, t)$ rappresenta lo spostamento trasversale della membrana al tempo t. La membrana è ancorata sui bordi del rettangolo, dando condizioni di bordo $u(x, y, t) = 0$ per $x = 0$ o $x = L$ o $y = 0$ o $y = L$. Le condizioni iniziali a $t = 0$ sono

$$u(x, y, 0) = x(x - L)\sin^2(y\pi/L), \quad u_t(x, y, 0) = 0. \tag{0.8}$$

- (5 punti) Usando il metodo delle autofunzioni, si scriva la soluzione per la membrana a $t \geq 0$ in assenza di forza esterna (cioè ponendo $K = 0$).

  Nota: i coefficienti di Fourier possono essere indicati come integrali.

- (3 punti) Si scriva la soluzione valida per $K \neq 0$, assumendo la seguente forma per il termine inomogeneo:

  $$F(x, y, t) = \sin(\omega t) \times \sin(\frac{\pi x}{L}) \times \sin(\frac{\pi y}{L}), \tag{0.9}$$

  (dove ω è un parametro distinto dalle frequenze di oscillazione del sistema).

Suggerimento per il secondo punto: La soluzione per K generico è data dalla soluzione per $K = 0$, più una soluzione particolare con condizioni iniziali nulle. Si veda il formulario per la soluzione di una equazione differenziale rilevante al caso inomogeneo.