Complementi di Metodi Matematici per la Fisica. Simulazione Esame. Gennaio 2025

Per passare all'orale sono necessari 17/34 punti. Durata: 2h. Si può usare un formulario personale al massimo di 4 facciate. Viene distribuito il formulario allegato.

Esercizio 1. (11 punti)

In un oboe (idealizzato), la pressione della colonna d'aria misurata rispetto alla pressione atmosferica soddisfa l'equazione delle onde unidimensionale:

$$u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = 0, \quad x \in [0, L], \quad t \geq 0, \tag{0.1}$$

dove c e L sono parametri.* Le condizioni di bordo sono diverse alle due estremità (una chiusa e una aperta) dello strumento, rispettivamente:

$$\partial_x \, u(x,t)|_{x=0} = 0, \qquad u(L,t) = 0, \quad t \geq 0. \tag{0.2}$$

- (10 punti) Supponendo che all'istante $t = 0$ la configurazione iniziale sia

$$u(x,0) = 1, \quad \partial_t u(x,t)|_{t=0} = 0, \tag{0.3}$$

  si scriva la soluzione per $u(x,t)$ per $t \geq 0$ con il metodo di Fourier. I coefficienti si possono calcolare usando gli integrali notevoli nel foglio allegato.

- (1 punto) Supponiamo che la nota suonata nella configurazione precedente abbia frequenza ν. Chi suona lo strumento può regolare il parametro L: come deve essere modificato L in modo da produrre una nota di frequenza $\frac{3}{2}\nu$?

Esercizio 2. (8 punti)

- (6 punti) Si scriva in forma implicita, con il metodo delle caratteristiche, la soluzione della seguente equazione alle derivate parziali per $u(x,t)$:

$$u_t - x \, u \, u_x = 1, \tag{0.4}$$

  con il dato iniziale

$$u(s,0) = \frac{1}{1+s^2}, \quad s \in \mathbb{R}. \tag{0.5}$$

- (2 punti) La soluzione del problema precedente sviluppa delle singolarità per qualche valore di $t > 0$? Assumendo al posto (0.5) una condizione iniziale $u(s,0) = u_0(s)$, la risposta potrebbe essere diversa a seconda della forma di $u_0(s)$?

*Il parametro L può essere regolato da chi suona lo strumento, aprendo o chiudendo i buchi sul corpo dell'oboe.

Esercizio 3. (7 punti) Si consideri la seguente equazione differenziale ordinaria per una grandezza $Y(t)$:

$$tY''(t) = \left(t^4 + A\right)\, Y(t), \tag{0.6}$$

dove $A \neq 0$ è una costante.

- (2 punti) Si indichi quali sono i punti singolari dell'equazione, specificando se siano fuchsiani o meno (NON è necessario calcolare gli indici nei punti fuchsiani).
- (5 punti) Si supponga che la soluzione a cui siamo interessati soddisfi $Y(t) \to 0$ per $t \to +\infty$. Si determinino i **i primi due termini** di uno sviluppo asintotico di $S(t) \equiv \log Y(t)$ per $t \to +\infty$.

Esercizio 4. (8 punti)

Si consideri il potenziale elettrico stazionario $u(x, y, z)$ nello spazio tra due cilindri concentrici, di raggi R_1 e R_2, con asse verticale parallelo all'asse z e che possono essere considerati di lunghezza infinita. Si assuma che il potenziale $u(x, y, z)$ NON dipenda da z, ma solo da x, y con

$$R_1^2 < x^2 + y^2 < R_2^2,$$

e che soddisfi condizioni di bordo

$$u(x, y, z) = A + K \cos\theta, \text{ per } x^2 + y^2 = R_1^2, \tag{0.7}$$

$$u(x, y, z) = B, \text{ per } x^2 + y^2 = R_2^2, \tag{0.8}$$

dove $\theta = \arctan(y/x)$ rappresenta la coordinata angolare di un sistema di coordinate polari nel piano x, y. Si scriva la soluzione per il potenziale nella regione tra i due cilindri:

- (6 punti) nel caso $K = 0$.
- (2 punti) nel caso K generico.

Suggerimento: Si usi il metodo delle autofunzioni in coordinate polari. Si noti che nel caso $K = 0$ la soluzione dipende solo dalla coordinata radiale.

Equazioni utili alla Simulazione 2024

Alcune di queste equazioni (non necessariamente tutte!) possono essere utili.

Proprietà di ortogonalità per funzioni trigonometriche: per $m, n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{2}{L}\int_0^L \sin(\frac{n\pi x}{L})\sin(\frac{m\pi x}{L})dx = \frac{2}{L}\int_0^L \sin(\frac{(n+\frac{1}{2})\pi x}{L})\sin(\frac{(m+\frac{1}{2})\pi x}{L})dx = \delta_{m.n}, \quad (0.9)$$

$$\frac{2}{L}\int_0^L \cos(\frac{n\pi x}{L})\cos(\frac{m\pi x}{L})dx = \delta_{m.n}\, 2^{\delta_{n,0}}. \quad (0.10)$$

Si notino inoltre gli integrali notevoli, alcuni dei quali possono essere utili alla prova:

$$2\int_0^1 \sin(n\pi x)dx = \frac{2(1-(-1)^n)}{n\pi}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (0.11)$$

$$2\int_0^1 \cos(n\pi x)dx = 2\delta_{n,0} \quad n \in \mathbb{N}, \quad (0.12)$$

$$2\int_0^1 \sin((n+\frac{1}{2})\pi x)dx = \frac{2}{\pi(n+\frac{1}{2})}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (0.13)$$

$$2\int_0^1 \cos((n+\frac{1}{2})\pi x)dx = \frac{2(-1)^n}{\pi(n+\frac{1}{2})}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (0.14)$$

Operatore di Laplace in coordinate polari:

$$\partial_x^2 + \partial_y^2 = \partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\partial_\theta^2, \quad (0.15)$$

dove $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\theta = \arctan(y/x)$.

La seguente equazione differenziale:

$$C''(r) + \frac{1}{r}C'(r) - \frac{\alpha^2 C(r)}{r^2} = 0, \quad (0.16)$$

ha una base di soluzioni indipendenti $C_\pm(r)$ date da

$$C_\pm(r) = r^{\pm\alpha}, \quad \text{per } \alpha \neq 0, \quad (0.17)$$

e

$$C_+(r) = 1, \quad C_-(r) = \log(r), \quad \text{per } \alpha = 0. \quad (0.18)$$