Complementi di Metodi Matematici per la Fisica. Esame 16/01/2025

Per passare all'orale sono necessari 17/34 punti. Durata: 2h. Si può usare un formulario personale al massimo di 4 facciate.

Esercizio 1. (10 punti)

Si consideri l'equazione di Laplace in un dominio di forma quadrata di lati $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad (x, y) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi], \tag{0.1}$$

con condizioni di bordo di Dirichlet:

$$\begin{array}{ll} u(0, y) = 0, & y \in [0, 2\pi], \\ u(2\pi, y) = 0, & y \in [0, 2\pi], \\ u(x, 2\pi) = 0, & x \in [0, 2\pi], \\ u(x, 0) = \sin^2(x), & x \in [0, 2\pi]. \end{array} \tag{0.2}$$

Si determini $u(x, y)$ all'interno del dominio usando il metodo di Fourier. I coefficienti possono essere indicati in termini di integrali espliciti, senza calcolare gli integrali.

Esercizio 2. (9 punti)

Si consideri la seguente equazione alle derivate parziali in due variabili per la grandezza $u(x, y)$:

$$(1 + u)\, u_x + u\, u_y = 0, \tag{0.3}$$

con un dato iniziale

$$u(x, 0) = e^{\arctan(x)}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{0.4}$$

dove $-\pi/2 < \arctan(x) < \pi/2$.

- (6 punti) Si scriva la soluzione in forma implicita usando il metodo delle curve caratteristiche.

- (3 punti) Questa soluzione definisce una funzione a un sol valore C^∞ su tutto il piano $(x, y) \in \mathbb{R}$? Si determinino equazioni esatte per la posizione di eventuali singolarità di $u(x, y)$ nel piano (x, y).

Esercizio 3. (8 punti)

Una quantità di inchiostro si diffonde nell'acqua in una vasca rettangolare di dimensioni $L \times M$. La concentrazione di inchiostro ρ soddisfa l'equazione di diffusione:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(x,y,t) - \alpha\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\rho(x,y,t) = 0, \quad (x,y) \in [0,L] \times [0,M], \tag{0.5}$$

con $\alpha > 0$ un parametro. All'istante $t = 0$, tutto l'inchiostro è concentrato uniformemente in metà della vasca:

$$\rho(x,y,t=0) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < \frac{L}{2}, \\ C/2, & \frac{L}{2} \leq x \leq L. \end{cases} \tag{0.6}$$

- (1 punto) Quali sono le corrette condizioni di bordo per questo problema?
- (7 punti) Utilizzando le precedenti condizioni di bordo, si esprima $\rho(x,y,t)$ per $t > 0$ attraverso il metodo di Fourier.

NOTA: per il calcolo dei coefficienti di Fourier può essere utile fare riferimento al formulario.

Esercizio 4. (7 punti) Si consideri la seguente equazione differenziale ordinaria per una grandezza $F(t)$:

$$F''(t) + tF'(t) - \left(1 + t^{-2}\right)F(t) = 0. \tag{0.7}$$

- (2 punti) Si indichi quali sono i punti singolari dell'equazione, specificando se siano fuchsiani o meno (NON è necessario calcolare gli indici nei punti fuchsiani).
- (5 punti)

  Si determini **il primo termine** di uno sviluppo asintotico di

  $$S(t) \equiv \log F(t)$$

  per $t \to +\infty$ per una soluzione dell'equazione che soddisfi

  $$\lim_{t\to\infty} F(t) = 0. \tag{0.8}$$

  Suggerimenti per lo svolgimento: Si consideri l'equazione soddisfatta da $S(t)$, e si determini l'equilibrio dominante che dà una soluzione con il comportamento di interesse per $t \to +\infty$.

  Si può usare l'informazione che, per la soluzione che soddisfa (0.8), vale la condizione

  $$(S'(t))^2 >> |S''(t)|.$$

  Esiste un **unico** equilibrio dominante consistente con questa condizione, e questa condizione di equilibrio coinvolge **due** termini dell'equazione per $S(t)$.

- $*$(facoltativo - 1 punto extra) Si trovi l'equilibrio dominante alternativo che caratterizza una seconda soluzione indipendente per $F(t)$.

Formulario. Esame Gennaio 2025

Alcune di queste equazioni (non necessariamente tutte!) possono essere utili.

Proprietà di ortogonalità per funzioni trigonometriche: per $m, n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{2}{L}\int_0^L \sin(\frac{n\pi x}{L})\sin(\frac{m\pi x}{L})dx = \frac{2}{L}\int_0^L \sin(\frac{(n+\frac{1}{2})\pi x}{L})\sin(\frac{(m+\frac{1}{2})\pi x}{L})dx = \delta_{m.n}, \tag{0.9}$$

$$\frac{2}{L}\int_0^L \cos(\frac{n\pi x}{L})\cos(\frac{m\pi x}{L})dx = \delta_{m.n}\, 2^{\delta_{n,0}}. \tag{0.10}$$

Integrali notevoli. Alcuni di questi integrali possono essere utili alla prova:

$$2\int_0^1 \sin(n\pi x)dx = \frac{2(1-(-1)^n)}{n\pi}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{0.11}$$

$$2\int_0^1 \cos(n\pi x)dx = 2\delta_{n,0} \quad n \in \mathbb{N}, \tag{0.12}$$

$$2\int_{\frac{1}{2}}^1 \sin(n\pi x)dx = \frac{2\left(\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)-(-1)^n\right)}{\pi n}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{0.13}$$

$$2\int_{\frac{1}{2}}^1 \cos(n\pi x)dx = -\frac{2\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{\pi n}, \quad n \in \mathbb{N}^+. \tag{0.14}$$

Ripasso di una derivata utile per l'esercizio 2.

$$\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1+x^2}.$$