Complementi di Metodi Matematici per la Fisica. Esame 09/06/2025

Per passare all'orale sono necessari 17/34 punti. Durata: 2h. Si può usare un formulario personale al massimo di 4 facciate.

Esercizio 1. (10 punti)

Si consideri l'equazione per la vibrazione di una corda di violoncello di lunghezza L:

$$u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = 0, \quad x \in [0,L], t \geq 0, \tag{0.1}$$

dove $u(x,t)$ denota lo spostamento trasversale della corda, fissata ai bordi con condizioni di bordo $u(0,t) = u(L,t) = 0$, e la costante c è una caratteristica della corda.

- (9 punti) Con il metodo di Fourier, si scriva la soluzione data la condizione iniziale

$$u(x,0) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq L/2, \\ L-x, & L/2 \leq x \leq L. \end{cases}, \tag{0.2}$$

$$u_t(x,0) = 0, \quad x \in [0,L]. \tag{0.3}$$

  Si può far riferimento al formulario allegato per il calcolo dei coefficienti di Fourier.

- (1 punto) Sapendo che $L = \frac{\pi}{5} m$ e che quando viene fatta vibrare con condizioni iniziali generiche la corda produce una nota di frequenza $220 s^{-1}$, si calcoli la costante c.

Esercizio 2. (9 punti)

Si consideri la seguente equazione differenziale alle derivate parziali

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) + u(x,t) \frac{\partial}{\partial x} u(x,t) = \cos(t), \tag{0.4}$$

Si consideri un profilo iniziale

$$u(x,0) = e^{-x^2}, \;\; x \in \mathbb{R}, \tag{0.5}$$

- (6 punti) Si scriva la soluzione in forma implicita usando il metodo delle curve caratteristiche.

- (3 punti) Questo profilo iniziale può sviluppare una singolarità per qualche tempo $t > 0$? Si faccia un esempio di un altro profilo iniziale per il quale la risposta sarebbe opposta. Per l'esempio in cui si forma una singolarità, si determini in quale istante questa si forma.

Esercizio 3. (8 punti) Si consideri la seguente equazione differenziale ordinaria per una grandezza $F(t)$:

$$F''(t) - \frac{1}{t+1} F(t) = 0. \tag{0.6}$$

- (2 punti) Si indichi quali sono i punti singolari dell'equazione, specificando se siano fuchsiani o meno (NON è necessario calcolare gli indici nei punti fuchsiani).
- (6 punti) Si determinino **i primi due termini** di uno sviluppo asintotico di

  $$S(t) \equiv \log F(t)$$

  per $t \to +\infty$ per una soluzione dell'equazione che soddisfi

  $$\lim_{t\to\infty} F(t) = 0. \tag{0.7}$$

  Suggerimenti per lo svolgimento: Si consideri l'equazione soddisfatta da $S(t)$, e si usi il metodo dell'equilibrio dominante. Si può usare l'assunzione che $S'(t))^2 >> |S''(t)|$ per $t \to +\infty$. È necessario espandere i coefficienti dell'equazione nel limite considerato.

Esercizio 3. (7 punti)

Si consideri l'equazione di Poisson in un dominio circolare di raggio R, con una sorgente uniforme:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) U(x, y) = 1, \quad x^2 + y^2 \leq R^2, \tag{0.8}$$

e condizioni di bordo:

$$U(x, y) = 0 \quad \text{per} \quad x^2 + y^2 = R^2. \tag{0.9}$$

Si determini $U(x, y)$ all'interno del dominio.

Suggerimenti per lo svolgimento: conviene passare a coordinate polari, $U(x, y) \equiv u(r, \theta)$. Sono possibili scorciatoie, vista la particolare semplicità del termine inomogeneo. Per affrontare il problema in modo sistematico, si può cercare una soluzione della forma

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(r) \cos(k_n\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} g_n(r) \sin(k_n\theta), \tag{0.10}$$

determinando opportunamente i coefficienti k_n con i dati del problema. Le funzioni radiali $g_n(r)$ e $f_n(r)$ si possono fissare scomponendo l'equazione di Poisson in queste coordinate. NOTA: può essere utile fare riferimento al formulario per la soluzione di alcune equazioni differenziali.

Formulario. Esame Giugno 2025

Alcune di queste equazioni (non necessariamente tutte!) possono essere utili.

Proprietà di ortogonalità per funzioni trigonometriche: per $m, n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{2}{L}\int_0^L \sin(\frac{n\pi x}{L})\sin(\frac{m\pi x}{L})dx = \frac{2}{L}\int_0^L \sin(\frac{(n+\frac{1}{2})\pi x}{L})\sin(\frac{(m+\frac{1}{2})\pi x}{L})dx = \delta_{m.n}, \tag{0.11}$$

$$\frac{2}{L}\int_0^L \cos(\frac{n\pi x}{L})\cos(\frac{m\pi x}{L})dx = \delta_{m.n}\ 2^{\delta_{n,0}}. \tag{0.12}$$

Integrali notevoli. Alcuni di questi integrali possono essere utili alla prova:

$$2\int_0^1 \sin(n\pi x)x dx = 2\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{0.13}$$

$$2\int_0^1 \cos(n\pi x)dx = 2\delta_{n,0} \quad n \in \mathbb{N}, \tag{0.14}$$

$$2\int_{\frac{1}{2}}^1 \sin(n\pi x)(1-x)dx + 2\int_0^{\frac{1}{2}} \sin(n\pi x)x dx = \frac{4\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{\pi^2 n^2}, \quad n \in \mathbb{N}^+, \tag{0.15}$$

$$2\int_{\frac{1}{2}}^1 \cos(n\pi x)(1-x)dx + 2\int_0^{\frac{1}{2}} \cos(n\pi x)x dx = \frac{8\sin^2\left(\frac{\pi n}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{\pi^2 n^2}, \quad n \in \mathbb{N}^+. \tag{0.16}$$

Operatore di Laplace in coordinate polari in 2D

Passando da coordinate cartesiane $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ a coordinate polari, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, l'operatore di Laplace diventa

$$\partial_x^2 + \partial_y^2 = \partial_r^2 + \frac{\partial_r}{r} + \frac{\partial_\theta^2}{r^2}. \tag{0.17}$$

Equazioni differenziali utili

Alcuni dei seguenti risultati possono essere utili.

L'equazione differenziale

$$x^2 F''(x) + xF'(x) - \nu^2 F(x) = Ax^2, \tag{0.18}$$

con generici parametri A, ν, ha soluzione **generale**

$$F(x) = \begin{cases} C_1 x^\nu + C_2 x^{-\nu} + A\frac{x^2}{4-\nu^2}, & \text{per } \nu^2 \neq 4, \\ C_1 x^\nu + C_2 x^{-\nu} + A\left(\frac{1}{4}x^2\log(x) - \frac{x^2}{16}\right), & \text{per } \nu^2 = 4, \end{cases} \tag{0.19}$$

dove C_1, C_2 sono costanti arbitrarie.