MODULO
"CHEMIOMETRIA"
CHIMICA ANALITICA STRUMENTALE (CLINICA E FORENSE)

L.M. CHIMICA CLINICA, FORENSE E DELLO SPORT

Prof. Marco Vincenti

LE MATRICI E LE LORO OPERAZIONI

Data una qualsiasi tabella di numeri reali, appartenenti cioè all'insieme $\mathbb{R}$, diremo che essi formano una *matrice* se sono disposti secondo righe orizzontali e colonne verticali. Una matrice si denota con una lettera maiuscola; così, ad esempio, la scrittura

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 3 & 8 & 9 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad (1.1)$$

denota una matrice di tre righe e tre colonne i cui elementi sono numeri assegnati ciascuno al suo posto. Si usa, per chiarezza, numerare le righe dall'alto verso il basso e le colonne da sinistra a destra. In questo modo, se consideriamo una generica matrice formata da m righe e n colonne, ogni elemento verrà indicato da una scrittura con due pedici indicanti univocamente il posto occupato, riferendosi il primo alla riga, e il secondo alla colonna. Detto a un elemento qualsiasi, se si scrive a_{23} si indica l'elemento a che appartiene alla *seconda* riga e alla *terza* colonna. Avremo quindi per una generica matrice A di m righe per n colonne la scrittura

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (1.2)$$

Per indicare le dimensioni di una matrice utilizzeremo il simbolo $A(m\times n)$. Con la scrittura a_{ij} si indica invece l'elemento generico posto all'incrocio tra la i–esima riga e la j–esima colonna.

Per indicare che una determinata matrice A sia composta dagli elementi a_{ij}, scriveremo

$$A(m \times n) = \{a_{ij}\}$$

intendendo che $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$.

Una matrice si dice *quadrata* di ordine n se è formata da uno stesso numero n di righe e di colonne.

Diagonale principale. Si chiama diagonale principale di una matrice il sottoinsieme di elementi, $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$, disposti sulla diagonale discendente, dal primo elemento in alto a sinistra fino all'ultimo in basso a destra. La rimanente diagonale si chiama diagonale secondaria. Queste definizioni si applicano solo a matrici quadrate.

Traccia di una matrice quadrata. Si dice traccia di una matrice quadrata A, e si indica con $tr(A)$, la somma degli elementi della diagonale principale.

Matrice nulla. È tale una matrice i cui elementi sono tutti nulli.

Matrice diagonale. È una matrice quadrata con gli elementi tutti nulli tranne quelli disposti sulla diagonale principale.

Matrice unità o identica. È una matrice diagonale con tutti gli elementi eguali all'unità. Di solito si denomina con la lettera I. Ad esempio per la matrice identica del terzo ordine avremo

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

Matrici trasposte, simmetriche

Matrice trasposta. Data una matrice A, non necessariamente quadrata, il cui elemento generico sia a_{ij} si definisce matrice trasposta, A^T, la matrice il cui elemento generico è a_{ji}, cioè la matrice ottenuta da A scambiando le righe con le colonne. Ad esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 9 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 5 & 9 & 6 \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

Procedendo nell'eseguire la trasposta di A^T si ottiene la relazione

$$(A^T)^T = A$$

Si può inoltre notare che la trasposta di una matrice riga è una matrice colonna e viceversa.

Matrice simmetrica. È una matrice quadrata in cui gli elementi simmetrici rispetto alla diagonale principale sono eguali. Si ha pertanto $a_{ij} = a_{ji}\ (i, j = 1, 2, ..., n,\ i \neq j)$.

In base alla definizione di matrice trasposta, si ha per una matrice simmetrica la proprietà:

$$A^T = A$$

Matrice antisimmetrica. Una matrice quadrata si dice antisimmetrica quando risulta $a_{ij} = -a_{ji}\ (i, j = 1, 2, ..., n,\ i \neq j)$.

Prodotto tra matrici (righe per colonne)
Date due matrici, A di dimensioni $(m \times n)$ e B di dimensioni $(n \times p)$, i cui elementi generici denoteremo rispettivamente con a_{ik} e b_{kj}, si definisce *matrice prodotto* la matrice $C = A \cdot B$ il cui elemento generico c_{ij} è dato da

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

La matrice prodotto C risulta avere dimensioni $(m \times p)$, cioè C possiede il numero di righe della matrice A (primo fattore del prodotto) e il numero di colonne di B (matrice che appare come secondo fattore nel prodotto). In altre parole, per ottenere l'elemento c_{ij} occorre sommare tutti i prodotti tra gli elementi della i-esima riga della matrice A per i corrispondenti elementi della j-esima colonna della matrice B.

Per quanto sopra detto, il prodotto di due matrici è definito solo se *il numero di colonne della prima matrice è eguale al numero di righe della seconda.* Notiamo che se le due matrici sono quadrate il loro prodotto righe per colonne è possibile se sono dello stesso ordine.

A proposito del prodotto di due matrici quadrate A e B, è da rimarcare che il risultato di tale prodotto non è lo stesso invertendo l'ordine delle matrici nell'operazione di moltiplicazione. Si parlerà per chiarezza di moltiplicazione a destra o moltiplicazione a sinistra, o, ancora meglio si dirà che A premoltiplica B quando appare come primo fattore nell'operazione $A \cdot B$ o postmoltiplica B quando l'operazione di prodotto è $B \cdot A$.

La regola che riguarda il prodotto di due matrici è condensata nella formula seguente:

$$\boxed{A(m \times n) \cdot B(n \times p) = C(m \times p)}$$

Proprietà delle operazioni tra matrici.

Premesso che in generale è $$A \cdot B \neq B \cdot A$$

cioè che per il prodotto righe per colonne non vale la proprietà commutativa, sono da ricordare le seguenti proprietà, valide quando le matrici siano opportunamente dimensionate in modo che le operazioni descritte possano essere effettuate:

a) $$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$
b) $$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$
c) $$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$
d) $$a\,(A \cdot B) = (a\,A) \cdot B = A \cdot (a\,B), \quad \forall a \in \mathbf{R}$$
e) $$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$
f) $$(A + B)^T = A^T + B^T$$
g) $$I \cdot A = A$$

Calcolo dei determinanti

Chiameremo *determinante* un numero, ricavato nel modo che vedremo di seguito, associato a una data *matrice quadrata* A, cioè ad una tabella di n^2 elementi disposti, come già detto, in n righe e n colonne.

Essendo la definizione generale di determinante piuttosto complicata, è preferibile, prima di stabilire la regola generale, considerare il calcolo dei determinanti in due casi particolari.

Premesso che per una matrice di ordine uno (costituita cioè da un solo elemento) il determinante coincide con l'elemento stesso, consideriamo una matrice (2×2). Il suo determinante è definito dal simbolo

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$\boxed{|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

Si osserva che il risultato è dato dal prodotto dei due elementi posti sulla diagonale principale meno il prodotto dei due elementi posti sulla diagonale secondaria.

Per conoscere la definizione di determinante di una matrice quadrata di ordine qualunque è necessario introdurre alcune definizioni.

Minore di una matrice $A(m \times n)$. Si chiama *minore* di ordine p, M_p, di una matrice A, il determinante di una sottomatrice quadrata di A avente p righe e p colonne.

Minore complementare di un elemento a_{rs}. Data una matrice quadrata di ordine n, si definisce *minore complementare* M_{rs} di un qualunque elemento a_{rs}, il determinante di ordine $n-1$ che si ottiene cancellando la riga r–sima e la colonna s–sima che si incrociano in quell'elemento.

Complemento algebrico di un elemento a_{rs}. Si definisce *complemento algebrico* dell'elemento a_{rs} il prodotto

$$\boxed{A_{rs} = (-1)^{r+s} M_{rs}}$$

Come si vede dalla formula, al secondo membro vale il segno + o − a seconda che la somma $r+s$ dei pedici sia pari o dispari.

Dopo questi preliminari, torniamo alla definizione di determinante del terzo ordine, cioè di

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$|A| = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

È immediato verificare che in questa formula si trovano, presi con segno alterno a cominciare dal +, i prodotti degli elementi della prima riga del determinante moltiplicati per le quantità entro parentesi, cioè, per i minori di ordine due, M_{11}, M_{12}, M_{13}, ricavati cancellando la riga e la colonna che si intersecano in ogni elemento della prima riga stessa.

Dopo queste considerazioni, ricordando la definizione di complemento algebrico (inglobando cioè il segno + o − nei minori), si ha

$$\boxed{\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}}$$

La formula è valida per il calcolo del determinante di una matrice del terzo ordine, sviluppando tale calcolo secondo la prima riga. Tuttavia, essa è anche valida se applicata ad uno sviluppo secondo una qualunque riga o colonna (d'ora in poi chiamate indifferentemente *linee*) e per una matrice di ordine qualsiasi. Questo risultato è quindi enunciabile in forma generale secondo il seguente teorema.

PRIMO TEOREMA DI LAPLACE:

Il determinante è dato dalla somma dei prodotti degli elementi di una qualunque linea per i loro corrispondenti complementi algebrici.

Il calcolo del determinante viene quindi effettuato operando sempre con elementi e complementi algebrici della stessa riga. In presenza di righe o colonne contenenti elementi nulli si preferirà quindi sviluppare il calcolo del determinante secondo una di queste. In questo modo il calcolo è semplificato.

Si capisce a questo punto come operare per il calcolo di un determinante di ordine n. Per mezzo del primo teorema di Laplace applicato una prima volta, ci si riconduce al calcolo di n determinanti di ordine $(n-1)$. Ogni determinante di ordine $(n-1)$ porta al calcolo di $(n-1)$ determinanti di ordine $(n-2)$ e così via fino ad avere tutti determinanti di secondo ordine calcolabili con la regola (1.11). Naturalmente, se si ha cura, come si è detto, di scegliere linee con alcuni elementi eguali a zero, il calcolo è notevolmente facilitato.

Siamo quindi ora in grado di fornire la formula generale del calcolo del determinante per una qualunque matrice quadrata $A(n \times n)$. Se lo sviluppo viene effettuato secondo la i-esima riga si ha:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \qquad \text{con } i \text{ fissato}$$

Se, viceversa, si vuole effettuare il calcolo secondo la j-esima colonna avremo

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \qquad \text{con } j \text{ fissato}$$

SECONDO TEOREMA DI LAPLACE:

Data una matrice quadrata A, la somma dei prodotti degli elementi di una linea per i complementi algebrici di un'altra linea è nulla. Valgono cioè le seguenti relazioni

$$a_{i1}A_{j1} + \ldots + a_{in}A_{jn} = 0$$

$$a_{1i}A_{1j} + \ldots + a_{ni}A_{nj} = 0$$

Nel terminare questo paragrafo segnaliamo che è utile conoscere un'altra regola pratica che permette di sviluppare un determinante del terzo ordine dato da:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Essa consiste nel disporre gli elementi del determinante in tre righe e cinque colonne riscrivendo a destra le prime due colonne. Si ha quindi la seguente disposizione:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Proprietà dei determinanti.

In questo paragrafo riassumiamo le principali proprietà del calcolo dei determinanti, ricordando che una matrice con determinante nullo è detta *matrice singolare*:

$\boxed{1}$ Una matrice quadrata A e la sua trasposta A^T hanno egual determinante. Ciò è dovuto al fatto che il calcolo del determinante può essere effettuato secondo una riga o una colonna qualunque.

$\boxed{2}$ Se una matrice ha una riga o colonna di elementi tutti nulli, allora è singolare. Infatti, per verificare questa proprietà, basta sviluppare tale determinante secondo la linea di elementi nulli.

$\boxed{3}$ Se in una matrice quadrata A si scambiano delle linee tra loro si ottiene una matrice B il cui determinante è

$$\det B = \pm \det A$$

dove vale il segno $+$ o il segno $-$ secondo che B è ottenuta da A rispettivamente con un numero pari o dispari di scambi tra le linee. Scambiando quindi tra loro due linee parallele il determinante cambia di segno.

$\boxed{4}$ Se una matrice A ha due linee eguali il suo determinante è eguale a zero.

$\boxed{5}$ Se tutti gli elementi di una linea di una matrice sono moltiplicati o divisi per uno stesso numero $k \in \mathbf{R}$ anche il suo determinante rimane moltiplicato o diviso per k.

$\boxed{6}$ Il determinante del prodotto di una costante k per una matrice A è eguale a $k^n \det A$.

$\boxed{7}$ Se una matrice ha due linee parallele proporzionali (cioè gli elementi delle due linee differiscono per una uguale costante k), allora è singolare. Questa proprietà è conseguenza delle proprietà 4 e 5.

$\boxed{8}$ Se gli elementi di una linea di una matrice A sono espressi tutti come un binomio $x_i + y_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ il determinante di A si può esprimere come somma di due determinanti, il primo con gli elementi della linea in questione dati dalle x_i, e il secondo, con gli elementi dati dalle y_i.

$\boxed{9}$ Il determinante di una matrice non cambia aggiungendo agli elementi di una linea quelli di una linea parallela moltiplicati ciascuno per una costante k.

$\boxed{10}$ Se gli elementi di una matrice situati sopra la diagonale principale (o quelli situati sotto) sono tutti nulli (matrice triangolare), il determinante della matrice è dato dal prodotto degli elementi della diagonale principale.

Matrice inversa di una matrice quadrata.

Il concetto di matrice inversa è uno dei più importanti nella teoria delle matrici. Si abbia una matrice quadrata A di ordine n. Se esiste un'altra matrice B, dello stesso ordine, tale che risulti

$$A \cdot B = B \cdot A = I$$

diremo che A è invertibile e B è la sua inversa.

L'inversa di una matrice A si denota con il simbolo A^{-1}

quindi, tra una matrice e la sua inversa vale la relazione

$$\boxed{A \cdot A^{-1} = I = A^{-1} \cdot A}$$

Un esempio di matrice invertibile è

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{che ha come inversa} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$$

Al contrario la matrice $\quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

non è invertibile in quanto, qualunque sia la matrice D, eventuale inversa di C,

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix}$$

eseguendo il prodotto $C \cdot D$, righe per colonne, si otterrà

$$C \cdot D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3d_{11} + 0d_{21} & 3d_{12} + 0d_{22} \\ 0d_{11} + 0d_{21} & 0d_{12} + 0d_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3d_{11} & 3d_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

TEOREMA DI BINET:

Se A e B sono due matrici quadrate si ha $\quad \det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$

Premesso questo teorema, che useremo tra poco per l'invertibilità di una matrice $A = \{a_{ij}\}$, chiamiamo C la matrice dei complementi algebrici degli elementi a_{ij}, cioè

$$C(n \times n) = \{A_{ij}\}$$

Dimostriamo ora il seguente

□ TEOREMA:

a) Una matrice A è invertibile se e solo se si ha $\det A \neq 0$.

b) Se A è invertibile si ha $\det(A^{-1}) = 1/\det A$.

c) Se $\det A \neq 0$, *l'inversa di A è data da:*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} C^T$$

dove con C^T *si è indicata la matrice trasposta dei complementi algebrici degli elementi* a_{ij}, *cioè* $C^T = \{A_{ji}\}$.

Dividiamo la dimostrazione in due parti e precisamente facciamo prima l'ipotesi che la matrice A sia invertibile. La nostra tesi è: $\det A \neq 0$.

Dire che A è invertibile equivale a dire che si ha

$$A \cdot A^{-1} = I$$

e quindi scrivendo i determinanti $\quad \det(A \cdot A^{-1}) = \det I = 1$

e per Binet: $\quad (\det A) \cdot (\det A^{-1}) = 1.$

$$\boxed{\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}}$$

Nella seconda parte scambiamo tesi e ipotesi. Sia quindi det$A \neq 0$, si vuole dimostrare che A è invertibile e che inoltre $C^T/\det A$ è l'inversa di A

Per convincerci di quanto detto è sufficiente scrivere il prodotto della matrice A e della matrice trasposta C^T dei complementi algebrici. Conviene fissare l'attenzione su una matrice del terzo ordine e eseguire il prodotto righe per colonne tra le due matrici. Si ha:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det A & 0 & 0 \\ 0 & \det A & 0 \\ 0 & 0 & \det A \end{pmatrix}$$

Il risultato ottenuto è di immediata giustificazione tramite il primo e il secondo teorema di Laplace. Eseguendo la moltiplicazione righe per colonne, si ottengono tutti zeri tranne che sulla diagonale principale dove ogni elemento risulta essere il det$A$. Se ora, come richiesto dal teorema, dividiamo tale matrice diagonale per det$A$, si ottiene la tesi enunciata, e cioè, come affermato in *(c)*,

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A}\, C^T}$$

Vettori in coordinate cartesiane.

Fino ad ora abbiamo indicato ogni vettore con una lettera. Il significato, in uno spazio $\mathbb{R}^3$, è che un dato vettore $\vec{v}$ unisce due punti qualsiasi dello spazio con un verso assegnato.

Abbiamo visto, tuttavia, definendo l'operazione di somma vettoriale, che un vettore non perde la sua identità se lo si trasla nello spazio, nel senso che *una traslazione non ne modifica il modulo, la direzione e il verso.*

Di conseguenza, con riferimento alla Fig. 2.3, trasliamo un vettore $\vec{v}$ di $\mathbb{R}^3$ in modo che il suo punto d'inizio venga a coincidere con l'origine O, di coordinate $(0,0,0)$, di un sistema di riferimento cartesiano. Il suo estremo libero sarà quindi individuato da un punto P di coordinate (x,y,z). Avremo, dunque, che $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$. Questo vettore può essere determinato dalla somma di tre vettori $\vec{v}_x$, $\vec{v}_y$ e $\vec{v}_z$, rispettivamente paralleli agli assi x, y e z. D'altra parte, questi vettori, nel caso della Fig. 2.3, possono essere espressi, rispettivamente, da

$$|\vec{v}_x|\,\vec{\imath}, \qquad |\vec{v}_y|\,\vec{\jmath}, \qquad |\vec{v}_x|\,\vec{k}$$

Il calcolo dei moduli di questi vettori è immediato, in quanto basta sottrarre ad ogni coordinata del punto P la coordinata omologa del punto O. Avremo quindi

$$|\vec{v}_x| = (x-0) = x, \qquad |\vec{v}_y| = (y-0) = y, \qquad |\vec{v}_z| = (z-0) = z$$

ed il vettore $\vec{v}$ potrà essere espresso dalla somma vettoriale

$$\vec{v} = (P-O) = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

In questo modo, le coordinate x, y, z del punto P, della Fig. 2.3, sono le *componenti* del vettore $(P-O)$ secondo i tre assi. In generale quindi un qualsiasi vettore $\vec{v}$ sarà espresso da

$$\vec{v} = v_x\vec{\imath} + v_y\vec{\jmath} + v_z\vec{k}$$

dove v_x, v_y, v_z sono, appunto, le sue componenti cartesiane ortogonali.

Ancora più in generale, dati due punti A, di coordinate (x_A, y_A, z_A), e B, di coordinate (x_B, y_B, z_B), il vettore $\overrightarrow{AB} = (B-A)$ sarà espresso nella sua cosiddetta *forma cartesiana* da

$$\boxed{(x_B - x_A)\vec{\imath} + (y_B - y_A)\vec{\jmath} + (z_B - z_A)\vec{k} = v_x\vec{\imath} + v_y\vec{\jmath} + v_z\vec{k}}$$

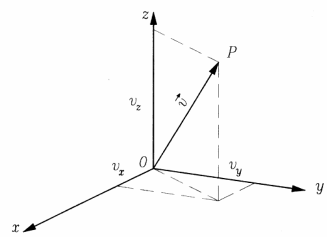


Fig. 2.3

È importante notare che le tre componenti, v_x, v_y, v_z, del vettore potranno essere tre numeri non necessariamente positivi, in quanto ottenuti per differenze di numeri reali. Concluderemo, quindi, osservando che le componenti di un vettore rappresentano le proiezioni con segno, del vettore stesso, sui tre assi cartesiani. La positività o negatività della componente sta ad indicare se il vettore, nella direzione del corrispondente asse, ha verso concorde o meno con il verso positivo dell'asse stesso.

Il vantaggio che deriva da una rappresentazione in componenti, per le già definite operazioni di somma e differenza tra vettori, è evidente. Noti i vettori in componenti, l'operazione di somma si effettua sommando le componenti omologhe, e così la differenza. Si ottiene un vettore $\vec{R}$ le cui componenti sono date dalla somma algebrica delle componenti omologhe.

Si abbiano, ad esempio, i tre vettori

$$\vec{u} = 3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - \vec{k}$$
$$\vec{v} = \vec{\imath} - \vec{\jmath} + 3\vec{k}$$
$$\vec{w} = 2\vec{\imath} - 5\vec{\jmath} + 2\vec{k}$$

Il vettore somma è

$$\vec{R} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = 6\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} + 4\vec{k}$$

Pertanto le componenti del vettore risultante sono date, nell'ordine, dalla terna di numeri 6, -4 e 4. Il fatto che le componenti lungo gli assi x e z siano positive, indica che le proiezioni del vettore, in tali direzioni, hanno verso concorde con gli assi stessi. Viceversa, lungo l'asse y la proiezione del vettore $\vec{R}$ ha verso opposto a quello dell'asse y stesso.

Il vettore $\vec{u}+\vec{v}-\vec{w}$ sarà dato da

$$\vec{u}+\vec{v}-\vec{w}=2\vec{\imath}+6\vec{\jmath}$$

Si noti che il vettore, così ottenuto, ha componente eguale a zero rispetto all'asse z. Pertanto, esso ha proiezione nulla rispetto a quest'asse ed appartiene quindi al piano xy.

Notiamo, terminando questo paragrafo, che un vettore di $\mathbf{R}^3$ è quindi individuato dalle sue componenti, cioè da una terna di numeri. Pertanto, invece di utilizzare la notazione (2.6), un vettore può essere anche rappresentato da

$$\boxed{\vec{v}=(v_x,\ v_y,\ v_z)}$$

2.5 Prodotto scalare di due vettori.

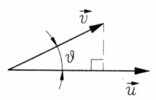
Dati due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ si definisce *prodotto scalare (o interno)* la quantità scalare

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\,|\vec{v}|\,\cos\vartheta} \qquad (2.8)$$

dove ϑ è l'angolo compreso tra i due vettori.

La quantità (2.8) si annulla, quindi, oltre al caso in cui sia nullo uno dei due vettori, quando i vettori dati sono perpendicolari.

Come visualizzato dalla Fig. 2.4, il prodotto scalare di due vettori può essere visto come il prodotto del modulo di un vettore per la proiezione dell'altro su di esso.



La circostanza che il prodotto scalare si annulla se i due vettori sono perpendicolari viene anche assunta come definizione di *ortogonalità* tra due vettori. Diremo, quindi, che *condizione necessaria e sufficiente per l'ortogonalità di due vettori non nulli è l'annullarsi del loro prodotto scalare.*

Inoltre, se il prodotto scalare dà come risultato un numero positivo, l'angolo tra i due vettori è acuto, altrimenti l'angolo risulta ottuso.

2.5.1 Proprietà del prodotto scalare.

Proprietà commutativa. Il prodotto scalare non varia invertendo l'ordine dei vettori nel prodotto. Si ha

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$$

Proprietà di linearità. Vale la relazione

$$(\lambda\vec{u}+\mu\vec{v})\cdot\vec{w}=\lambda\vec{u}\cdot\vec{w}+\mu\vec{v}\cdot\vec{w}$$

con λ e μ scalari. Ponendo $\lambda=\mu=1$ si ha la

Proprietà distributiva del prodotto scalare.

$$(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}=\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$$

Disuguaglianza di Schwarz. Dalla definizione (2.8), prendendo i valori assoluti, si ha

$$|\vec{u}\cdot\vec{v}|=|\vec{u}|\,|\vec{v}|\,|\cos\vartheta|$$

relazione che essendo in ogni caso $|\cos\vartheta|\le 1$ porta alla disuguaglianza

$$|\vec{u}\cdot\vec{v}|\le|\vec{u}|\,|\vec{v}|$$

Angolo tra due vettori. Invertendo la definizione (2.8), noti i moduli e il prodotto scalare dei vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$, è possibile calcolare il coseno dell'angolo tra i vettori

$$\boxed{\cos\vartheta=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|}}$$

Modulo di un vettore. La precedente (2.12) dà inoltre origine a

$$\boxed{|\vec{u}\cdot\vec{u}|=|\vec{u}|^2} \qquad (2.15)$$

che permette di calcolare il modulo di un vettore.

Prodotti scalari dei versori fondamentali. Nel caso dei versori $\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}$, si ha chiaramente

$$\vec{\imath}\cdot\vec{\imath}=\vec{\jmath}\cdot\vec{\jmath}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1 \qquad (2.16)$$

mentre è

$$\begin{aligned}\vec{\imath}\cdot\vec{\jmath}&=\vec{\jmath}\cdot\vec{\imath}=0\\ \vec{\jmath}\cdot\vec{k}&=\vec{k}\cdot\vec{\jmath}=0\\ \vec{k}\cdot\vec{\imath}&=\vec{\imath}\cdot\vec{k}=0\end{aligned} \qquad (2.17)$$

Prodotto scalare di due vettori qualsiasi. Dati due vettori qualsiasi in componenti cartesiane ortogonali

$$\vec{a}=a_1\vec{\imath}+a_2\vec{\jmath}+a_3\vec{k} \qquad \vec{b}=b_1\vec{\imath}+b_2\vec{\jmath}+b_3\vec{k}$$

il loro prodotto scalare, considerate le (2.10), (2.11), (2.16) e (2.17), vale

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3} \qquad (2.18)$$

Pertanto, la (2.15), già scritta a proposito del calcolo del modulo di un vettore $\vec{u}=u_x\vec{\imath}+u_y\vec{\jmath}+u_z\vec{k}$, fornisce

$$\boxed{|\vec{u}|=\sqrt{|\vec{u}\cdot\vec{u}|}=\sqrt{u_x^2+u_y^2+u_z^2}} \qquad (2.19)$$

che rappresenta anche il teorema di Pitagora nello spazio.

Ad esempio, il modulo di $\vec{R}=(6,-4,4)$ (si veda l'esercizio del paragrafo 2.4) vale

$$|\vec{R}|=\sqrt{6^2+(-4)^2+4^2}=\sqrt{68}$$

■ *Esempio.* Calcoliamo il prodotto scalare tra i vettori $\vec{u}=\vec{\imath}+3\vec{\jmath}+2\vec{k}$ e $\vec{v}=-\vec{\imath}+\vec{\jmath}+2\vec{k}$. Si ha

$$(1,3,2)\cdot(-1,1,2)=-1+3+4=6$$

Prodotto vettoriale di due vettori.

Introduciamo ora un nuovo tipo di prodotto tra vettori: il *prodotto vettoriale*, detto anche *esterno*.

Siano dati in $\mathbf{R}^3$ due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e sia ϑ l'angolo formato tra le loro direzioni. Vogliamo definire il *prodotto vettoriale* del primo vettore $\vec{u}$ per il secondo vettore $\vec{v}$.

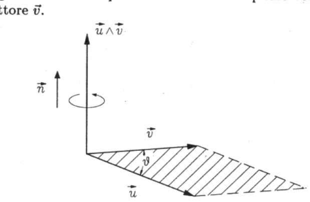


Fig. 2.6

Non si perde in generalità se immaginiamo i due vettori uscenti dallo stesso punto. Nella Fig. 2.6 sono rappresentati i due vettori e il versore $\vec{n}$ perpendicolare a entrambi e al piano che li contiene. Il versore $\vec{n}$ è scelto in modo che i tre vettori $\vec{u},\vec{v},\vec{n}$ formino in quest'ordine una terna *sinistrorsa*. La regola mnemonica per ricordare la convenzione di terna sinistrorsa è detta anche "della mano destra", per cui se si dispongono pollice e indice secondo i versi di $\vec{u}$ e di $\vec{v}$, il medio si dispone nel verso di $\vec{n}$.

Chiameremo *prodotto vettoriale* dei due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ nell'ordine dato, il vettore

$$\boxed{\vec{u}\wedge\vec{v}=|\vec{u}|\,|\vec{v}|\,\sin\vartheta\,\vec{n}} \qquad (2.26)$$

Oltre al caso ovvio in cui uno dei due vettori è nullo, osserviamo che il prodotto vettoriale è nullo quando i due vettori sono paralleli. L'annullarsi del prodotto vettoriale tra due vettori non nulli è, quindi, *condizione necessaria e sufficiente per il loro parallelismo.*

Riguardo al verso del versore $\vec{n}$ e quindi del vettore (2.26), facciamo ancora notare che esso è legato all'ordine in cui i due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sono moltiplicati tra loro. Con il criterio dato prima, della terna sinistrorsa formata da $\vec{u}, \vec{v}, \vec{n}$, il prodotto esterno $\vec{u} \wedge \vec{v}$ o $\vec{v} \wedge \vec{u}$ non dà lo stesso risultato. Il vettore che ne risulta differisce nei due casi per il verso, precisamente si ha

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u} \qquad (2.27)$$

Ricordiamo, inoltre, che, dal punto di vista della geometria piana, il modulo del prodotto esterno (2.26), cioè la quantità

$$\boxed{|\vec{u}|\,|\vec{v}|\,|\sin\vartheta|}$$

rappresenta *l'area del parallelogramma* costruito sui vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Applicando la definizione (2.26) e la proprietà (2.27) ai tre versori fondamentali degli assi di riferimento, si hanno le importanti relazioni

$$\begin{array}{ll} \vec{\imath} \wedge \vec{\jmath} = \vec{k} & \vec{\jmath} \wedge \vec{\imath} = -\vec{k} \\ \vec{\jmath} \wedge \vec{k} = \vec{\imath} & \vec{k} \wedge \vec{\jmath} = -\vec{\imath} \\ \vec{k} \wedge \vec{\imath} = \vec{\jmath} & \vec{\imath} \wedge \vec{k} = -\vec{\jmath} \end{array} \qquad (2.28)$$

Espressione in componenti del prodotto vettoriale. Se i vettori da moltiplicare vettorialmente sono dati in componenti cartesiane ortogonali, ad esempio

$$\vec{a} = a_1\vec{\imath} + a_2\vec{\jmath} + a_3\vec{k} \qquad \vec{b} = b_1\vec{\imath} + b_2\vec{\jmath} + b_3\vec{k} \qquad (2.29)$$

il loro prodotto vettoriale si ottiene da

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = (a_1\vec{\imath} + a_2\vec{\jmath} + a_3\vec{k}) \wedge (b_1\vec{\imath} + b_2\vec{\jmath} + b_3\vec{k})$$

utilizzando le (2.28).

Tuttavia, esso è anche ottenibile calcolando il determinante del terzo ordine le cui tre righe sono rispettivamente costituite, la prima dai tre versori della terna di riferimento, la seconda dalle componenti del primo vettore $\vec{a}$ e la terza dalle componenti del secondo vettore $\vec{b}$. Avremo quindi

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \qquad (2.30)$$

Calcolando il determinante secondo gli elementi della prima riga si ha come risultato il vettore

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{\imath} + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \vec{\jmath} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k} =$$

$$= (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{\imath} + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{\jmath} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k} \qquad (2.31)$$

Alla luce di quanto è stato visto in dettaglio al Capitolo 1, studiando i determinanti, si ritrova la proprietà (2.27): invertendo l'ordine dei vettori nel prodotto vettoriale si ha un cambio di segno nel determinante. E quindi il vettore che si ottiene cambia di verso.

Per il prodotto vettoriale vale la ***proprietà distributiva*** rispetto alla somma. Avremo quindi per tre vettori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ le relazioni:

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{c} \qquad (\vec{a} + \vec{b}) \wedge \vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{c} + \vec{b} \wedge \vec{c} \qquad (2.32)$$

■ *Esempio.* Si vuole calcolare il prodotto vettoriale tra $\vec{u} = 3\vec{\imath} + \vec{\jmath}$ e $\vec{v} = -\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + \vec{k}$. Si avrà

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (1)\vec{\imath} - (3)\vec{\jmath} + (-5)\vec{k} = \vec{\imath} - 3\vec{\jmath} - 5\vec{k}$$

Il modulo di questo vettore vale $\sqrt{1+9+25} = \sqrt{35}$ che corrisponde all'area del parallelogramma costruito sui due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$. ■

Prodotto misto.

Prodotto misto di tre vettori. Dati tre vettori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, si definisce prodotto misto lo scalare

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}) \qquad (2.33)$$

Esso è dato dal determinante

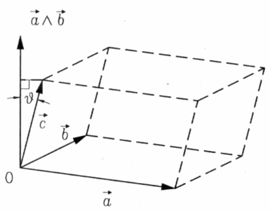
$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \qquad (2.34)$$

come può essere facilmente verificato, eseguendo prima il prodotto $\vec{b} \wedge \vec{c} = \vec{w}$, e poi calcolando il prodotto scalare $\vec{a} \cdot \vec{w}$.

È, inoltre, di immediata verifica la proprietà

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

Il risultato è chiaramente uno scalare, il cui valore assoluto corrisponde, dal punto di vista della geometria solida, al ***volume del parallelepipedo*** costruito sui tre vettori, riportati come uscenti dallo stesso punto O, come in Fig. 2.7.



Dalla definizione (2.34), e dalla Fig. 2.7, si evince anche che il prodotto misto di tre vettori si annulla quando i tre vettori sono *complanari*.

Pertanto, si ha che *l'annullarsi del prodotto misto*

$$\boxed{\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}) = 0} \qquad (2.35)$$

è condizione necessaria e sufficiente per la complanarità di tre vettori non nulli in $\mathbf{R}^3$.

Infatti, il prodotto $\vec{b} \wedge \vec{c}$ determina un vettore $\vec{w}$ perpendicolare al piano individuato da $\vec{b}$ e $\vec{c}$. La circostanza poi che si abbia $\vec{a} \cdot \vec{w} = 0$ implica che $\vec{a}$ è perpendicolare a $\vec{w}$ e quindi che $\vec{a}$ appartenga allo stesso piano di $\vec{b}$ e $\vec{c}$.

Dipendenza e indipendenza lineare in $\mathbf{R}^3$. Basi.

Date n costanti $k_1, k_2, \ldots, k_n$ e n vettori $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ in $\mathbf{R}^3$, chiameremo il vettore

$$\vec{b}_n = k_1\vec{a}_1 + k_2\vec{a}_2 + \cdots + k_n\vec{a}_n \qquad (2.38)$$

una *combinazione lineare* degli n vettori dati.

Sia, quindi, fissato $\vec{a}_1 \neq 0$, e k_1 scelto arbitrariamente: tutti i vettori ottenuti da

$$\vec{b}_1 = k_1\vec{a}_1 \qquad (2.39)$$

saranno vettori paralleli ad $\vec{a}_1$.

Se invece in $\mathbf{R}^3$ sono fissati $\vec{a}_1$ e $\vec{a}_2$, diversi da zero e non paralleli, e k_1, k_2 arbitrari, tutti i vettori espressi da

$$\vec{b}_2 = k_1\vec{a}_1 + k_2\vec{a}_2 \qquad (2.40)$$

saranno complanari.

Infine, siano $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$, tre vettori diversi da zero in $\mathbf{R}^3$, non complanari e non paralleli tra loro. Il vettore

$$\vec{b}_3 = k_1\vec{a}_1 + k_2\vec{a}_2 + k_3\vec{a}_3 \qquad (2.41)$$

sarà ancora un vettore appartenente a $\mathbf{R}^3$. Essendo k_1, k_2, k_3 arbitrari si possono generare tutti i possibili vettori appartenenti a $\mathbf{R}^3$, rappresentati genericamente da $\vec{b}_3 = k_1\vec{a}_1 + k_2\vec{a}_2 + k_3\vec{a}_3$. In questo modo, la combinazione lineare di vettori indicata con $\vec{b}_3$ fornisce la più generale rappresentazione di un qualsiasi vettore in $\mathbf{R}^3$.

Base di vettori e spazio vettoriale. I tre vettori utilizzati nella combinazione lineare $\vec{b}_3$ permettono come si è visto la generazione di tutti i vettori di $\mathbf{R}^3$. Essi sono detti una *base* per lo *spazio vettoriale* dei vettori di $\mathbf{R}^3$. Il numero dei vettori costituenti la base corrisponde alla *dimensione* dello spazio vettoriale. Nel caso illustrato si hanno tre vettori nella base e quindi lo spazio vettoriale $\mathbf{R}^3$ ha dimensione 3, cioè $\dim(\mathbf{R}^3) = 3$.

È chiaro che in $\mathbf{R}^3$ una base non è unica, si possono quindi avere basi diverse a seconda della scelta fatta per i tre vettori $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$. Se i vettori $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$, scelti come base, sono tra loro mutuamente perpendicolari, si parlerà di *base ortogonale*. Se, in aggiunta alla mutua perpendicolarità, i tre vettori sono anche di modulo unitario, allora la base sarà detta *ortonormale*.

Un esempio di base ortonormale è quella costituita dai versori fondamentali, $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$, degli assi cartesiani, con i quali finora abbiamo indicato qualunque vettore di $\mathbf{R}^3$.

La scelta dei vettori $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$, che devono costituire una base per lo spazio vettoriale, deve essere effettuata in maniera che in nessuna base un vettore possa essere espresso mediante combinazione lineare degli altri due. Da questa circostanza deriva la definizione formale di *indipendenza lineare* che di seguito esponiamo.

Concetto di indipendenza lineare. Siano $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ tre vettori qualsiasi in $\mathbf{R}^3$ e k_1, k_2, k_3 degli scalari. Diremo che i tre vettori $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ sono *linearmente indipendenti* se l'unica soluzione dell'equazione

$$k_1\vec{a}_1 + k_2\vec{a}_2 + k_3\vec{a}_3 = 0 \qquad (2.42)$$

è: $k_1 = k_2 = k_3 = 0$.

Concetto di dipendenza lineare. Se la (2.42) è verificata per valori di k_1, k_2, k_3 che non siano tutti nulli, diremo che i tre vettori $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ sono *linearmente dipendenti.*

Dalla definizione di base vettoriale discende quindi che quattro o più vettori qualsiasi non nulli, in $\mathbf{R}^3$, devono essere linearmente dipendenti.

Basta verificare questa affermazione per quattro vettori qualsiasi $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$, $\vec{a}_4$ in $\mathbf{R}^3$ ed estendere il ragionamento al caso di più vettori.

Equivalenza tra vettori e matrici. Lo spazio $\mathbf{R}^n$.

Una matrice $(m \times n)$ può essere considerata costituita da un certo numero m di matrici riga o da un certo numero n di matrici colonna. Immaginiamo di avere una matrice quadrata di ordine n di rango massimo, coincidente quindi con n. Ogni riga o ogni colonna di questa matrice può rappresentare un vettore di n elementi, appartenente cioè a uno spazio a n dimensioni, lo spazio $\mathbf{R}^n$.

Quanto detto porta a considerare una matrice riga, costituita da una sola riga di n elementi, o una matrice colonna, costituita da una sola colonna di n elementi, come dei vettori: ogni elemento di una delle suddette matrici è la *componente* di un vettore. Se la matrice riga o colonna è costituita da n elementi allora il vettore ha n componenti e appartiene ad uno spazio $\mathbf{R}^n$.

Pertanto il prodotto righe per colonne di una matrice riga A di n elementi per una matrice colonna B di n elementi

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \cdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1}$$

definisce il *prodotto scalare* in $\mathbf{R}^n$.

Tale operazione era stata eseguita, ad esempio, nel paragrafo 1.5, quando si era calcolato il costo globale del materiale da ordinare per la fabbricazione dei capannoni industriali.

Si è giunti a definire in questo modo per le righe e per le colonne uno spazio a n dimensioni, concetto difficile da accettare se si è abituati a vivere e quindi ragionare in uno spazio ordinario a tre dimensioni, ma utilissimo per trattare questioni riguardanti oggetti, quali i vettori, con un numero di componenti superiore a tre.

Sistemi di equazioni lineari.

Un insieme di m equazioni in n incognite (con m maggiore, minore o eguale a n), così definito

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (4.1)$$

è detto ***sistema algebrico lineare di coefficienti a_{ij} e termini noti b_i***. Chiameremo tale sistema ***risolubile*** se ammette soluzioni, ***non risolubile*** se non ne ammette.

Riguardo al numero di soluzioni esse potranno essere, come vedremo, una sola o infinite.

Tramite il formalismo matriciale si può affrontare agevolmente la risoluzione di questi sistemi di equazioni lineari.

Il sistema (4.1) può essere scritto sotto forma matriciale come

$$A \cdot X = B$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

La matrice A, che contiene i coefficienti a_{ij}, è detta *matrice dei coefficienti* del sistema (4.1), la matrice colonna X è chiamata *matrice o vettore delle incognite*, mentre la matrice colonna B è la *matrice (o vettore) dei termini noti.*

La matrice A^c, ottenuta aggiungendo alla matrice A la matrice colonna B, cioè

$$A^c = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \qquad (4.2)$$

viene detta *matrice completa* del sistema (4.1); talvolta, per ricordare che alla matrice A aggiungiamo la colonna B, indicheremo la matrice completa A^c con il simbolo $(A|B)$.

Se tutti gli elementi b_i di B sono nulli il sistema (4.1) è detto *omogeneo*, altrimenti, se anche uno solo degli elementi b_i è diverso da zero, il sistema è detto *non omogeneo.*

4.1.1 Concetto di applicazione lineare.
Ricordando quanto definito al paragrafo 2.9, si dice anche che un sistema lineare del tipo (4.1) costituisce un'*applicazione lineare*, in quanto, applicando la matrice A al vettore X, appartenente ad uno spazio vettoriale $\mathbf{K}^n$ a n dimensioni, il vettore X è trasformato in un altro vettore B che appartiene, invece, ad uno spazio vettoriale $\mathbf{K}^m$ a m dimensioni. In simboli

$$A \ : \quad \mathbf{K}^n \to \mathbf{K}^m$$

Tale applicazione è anche detta lineare perché le operazioni fondamentali di somma e prodotto negli spazi vettoriali sono conservate.

Regola di Cramer.

Prima di definire un criterio generale che permetta di stabilire se un sistema algebrico ammette una o infinite soluzioni o non ne ammette affatto (come visto negli esempi del paragrafo precedente), occupiamoci di sistemi algebrici omogenei o non omogenei in cui la matrice A sia quadrata.
Consideriamo, dunque, un sistema del tipo (4.1) con n equazioni e n incognite e dimostriamo la seguente regola risolutiva.

□ TEOREMA
Sia A il determinante della matrice (quadrata) dei coefficienti e supponiamo che sia $\det A \neq 0$. Allora il sistema ha un'unica soluzione data da

$$x_1 = \frac{|D_1|}{|A|}, \quad x_2 = \frac{|D_2|}{|A|}, \dots, \quad x_n = \frac{|D_n|}{|A|},$$

dove $|D_1|, |D_2|, \dots, |D_n|$ sono i determinanti delle matrici che si ottengono da A sostituendo, rispettivamente, la prima, la seconda, ..., la $n-$esima colonna della matrice A stessa, con la colonna dei termini noti $b_1, b_2, \dots, b_n$.
Se il sistema è omogeneo e $|A| \neq 0$, la sola soluzione è quella banale $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$.
Se il sistema è omogeneo e $|A| = 0$, esistono anche infinite soluzioni non banali.

Una facile dimostrazione della regola appena enunciata può essere fornita alla luce di quanto visto nei precedenti capitoli. Sia dato il sistema (4.1) scritto in forma matriciale

$$A \cdot X = B \tag{4.8}$$

con A matrice quadrata di ordine n, e determinante diverso da zero. Moltiplicando a sinistra per A^{-1} ambo i membri si ottiene

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \tag{4.9}$$

relazione che, sfruttando la proprietà della matrice inversa, diventa

$$I \cdot X = A^{-1} \cdot B \tag{4.10}$$

e quindi in definitiva

$$\boxed{X = A^{-1} \cdot B} \tag{4.11}$$

La 4.11 è già la soluzione del nostro problema. Difatti utilizzando il risultato del paragrafo 1.9 (si veda la relazione (1.27)), scrivendo al posto di A^{-1} l'espressione là ricavata, si ottiene

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{\det A} C^T \cdot B \tag{4.12}$$

che è la regola di Cramer scritta tramite le matrici A, B e la matrice C^T, trasposta dei complementi algebrici di A (si veda la (1.25)).

Resta da convincersi che la (4.12), o meglio il suo numeratore, corrisponde ai vari determinanti indicati con $D_1, D_2, \ldots, D_n$ all'inizio del paragrafo.
Senza fare il calcolo generale consigliamo, alla luce di quanto detto a proposito della matrice inversa, di fare il calcolo manuale riferito a una matrice (3×3) e ritrovare la regola di Cramer come appena detto.
Se il sistema è omogeneo e $|A| \neq 0$, tutti i determinanti $D_1, D_2, \ldots, D_n$ avranno una colonna composta di soli zeri e quindi saranno nulli (si ricordi la proprietà $\boxed{2}$ del paragrafo 1.8). Di conseguenza l'unica soluzione di tale sistema sarà quella banale, $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.
Come applicazione del metodo di Cramer, consideriamo, ad esempio, il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} 2x + y - z = -3 \\ x - 3y + 2z = 13 \\ x - y + 3z = 12 \end{cases} \tag{4.13}$$

Per la sua risoluzione, si consideri la matrice dei coefficienti

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

il cui determinante è diverso da zero, essendo $|A| = -17$, e le matrici D_1, D_2, D_3 ottenute dalla A sostituendo ogni volta alla colonna dei coefficienti di ciascuna incognita x, y, z la colonna dei termini noti:

$$D_1 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 13 & -3 & 2 \\ 12 & -1 & 3 \end{pmatrix}, D_2 = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 13 & 2 \\ 1 & 12 & 3 \end{pmatrix}, D_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 13 \\ 1 & -1 & 12 \end{pmatrix}$$

I tre determinanti $|D_1|$, $|D_2|$, $|D_3|$ sono eguali, rispettivamente, a -17, 34 e -51, e quindi i valori di x, y, z sono dati dai rapporti:

$$x = \frac{|D_1|}{|A|} = \frac{-17}{-17} = 1, \quad y = \frac{|D_2|}{|A|} = \frac{34}{-17} = -2, \quad z = \frac{|D_3|}{|A|} = \frac{-51}{-17} = 3$$

Metodi di riduzione.

I metodi di riduzione consistono, in linea generale, nell'operare sulla matrice completa dei coefficienti e termini noti A^c, per mezzo di trasformazioni elementari, già introdotte al paragrafo 1.11, in maniera tale da ottenere una matrice *equivalente* alla precedente A^c in quanto ottenuta da essa tramite trasformazioni elementari.

In effetti, quale che sia la trasformazione fatta sulla matrice di partenza, ciò equivale a effettuare la stessa trasformazione sulle equazioni del sistema. Ci si riconduce quindi a un sistema equivalente a quello di partenza, in quanto scritto tramite matrici equivalenti, che ammette le stesse soluzioni del sistema dato. Si è in grado quindi, con trasformazioni opportune, di risolvere il sistema cominciando a ricavare una delle incognite e, man mano, tutte le altre.

Oppure le n incognite possono essere ricavate tutte insieme alla fine del procedimento.

Quest'ultimo caso si presenta quando, partendo da un sistema non omogeneo del tipo (4.1) e scritta la matrice completa dei coefficienti e termini noti sotto la forma

$$(A|B) \tag{4.17}$$

si opera con trasformazioni elementari sulle righe della matrice (4.17) fino ad ottenere una matrice del tipo

$$(I|B') \tag{4.18}$$

dove con I, al solito, si è indicata la matrice unità. In altre parole la matrice (4.18) è una matrice completa nella quale la parte relativa alla matrice dei coefficienti è stata ridotta ad una matrice unitaria e la colonna dei termini noti è stata trasformata in una nuova matrice colonna B'.

In questo modo si leggono direttamente sulla matrice colonna B', che ha elementi diversi da B, in quanto ottenuta da essa mediante la trasformazione (4.17)–(4.18), i valori delle incognite. Se il sistema di partenza è, ad esempio, un sistema non omogeneo di tre equazioni in tre incognite la (4.18) equivale a una scrittura del tipo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & b'_1 \\ 0 & 1 & 0 & b'_2 \\ 0 & 0 & 1 & b'_3 \end{pmatrix} \tag{4.19}$$

La scrittura precedente rappresenta un sistema equivalente a quello di partenza; scritto per esteso, il sistema (4.19) fornisce

$$\begin{cases} x_1 \qquad\quad = b'_1 \\ \qquad x_2 \quad\; = b'_2 \\ \qquad\qquad x_3 = b'_3 \end{cases} \tag{4.20}$$

dove i secondi membri delle equazioni rappresentano appunto le soluzioni del sistema.

Come applicazione di questa procedura, riprendiamo il sistema (4.13) del quale è nota la soluzione trovata al paragrafo 4.2 con la regola di Cramer.

Scriviamo innanzitutto la matrice completa, cioè la matrice

$$(A|B) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & -3 & 2 & 13 \\ 1 & -1 & 3 & 12 \end{pmatrix} \tag{4.21}$$

Trasformiamo questa matrice per righe fino ad ottenere una matrice del tipo

$$(I|B') \tag{4.22}$$

Le trasformazioni sono le seguenti (si veda il paragrafo 1.11):

$$(A|B) \quad \text{operando con } R_{12} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 13 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 3 & 12 \end{pmatrix}$$

e poi nell'ordine

$$\begin{matrix} R_2 + (-2)R_1 \\ R_3 + (-1)R_1 \end{matrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 13 \\ 0 & 7 & -5 & -29 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

quindi

$$R_2 + (-3)R_3 \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 13 \\ 0 & 1 & -8 & -26 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} R_1 + (3)R_2 \\ R_3 + (-2)R_2 \end{matrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -22 & -65 \\ 0 & 1 & -8 & -26 \\ 0 & 0 & 17 & 51 \end{pmatrix}$$

A questo punto, dividendo per 17 la terza riga dell'ultima matrice ottenuta, la riga stessa diventa

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Pertanto, con ancora due successive trasformazioni

$$\begin{matrix} R_1 + (22)R_3 \\ R_2 + (8)R_3 \end{matrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

si giunge alla forma cercata del tipo (4.22), dalla quale si leggono direttamente le soluzioni del sistema

$x = 1 \qquad y = -2 \qquad z = 3$ già trovate in precedenza.

Trasformazioni lineari.

Dopo quanto detto nei paragrafi precedenti, è agevole scrivere il sistema seguente

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \cdot = \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{cases} \tag{4.23}$$

nella forma matriciale

$$Y = A \cdot X \tag{4.24}$$

dove le tre matrici che vi compaiono sono rispettivamente

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Scritto inoltre un secondo sistema

$$\begin{cases} x_1 = b_{11}z_1 + b_{12}z_2 + \cdots + b_{1p}z_p \\ x_2 = b_{21}z_1 + b_{22}z_2 + \cdots + b_{2p}z_p \\ \cdot = \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ x_n = b_{n1}z_1 + b_{n2}z_2 + \cdots + b_{np}z_p \end{cases} \tag{4.25}$$

sotto la forma

$$X = B \cdot Z \tag{4.26}$$

con

$$Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_p \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{np} \end{pmatrix}, \tag{4.27}$$

combinando insieme la (4.24) e la (4.26) otteniamo: $Y = A \cdot B \cdot Z$

Questa scrittura mostra come sia possibile mettere direttamente in relazione Y e Z tramite la nuova matrice dei coefficienti $A \cdot B$, prodotto delle matrici A e B. S'intende che le matrici A e B devono avere dimensioni tali che il loro prodotto righe per colonne sia possibile. La (4.28) può essere vista come una trasformazione di un vettore Z in un altro Y tramite la matrice $A \cdot B$. Vediamo qui di seguito due possibili trasformazioni.

■ *Esempio 1: trasformazione lineare.*

Dati i sistemi

$$\begin{cases} y_1 = 2x_1 + x_2 \\ y_2 = x_1 - 3x_2 \end{cases} \tag{4.29}$$

$$\begin{cases} x_1 = 3z_1 + 2z_2 \\ x_2 = 2z_1 - z_2 \end{cases} \tag{4.30}$$

si vogliono esprimere y_1 e y_2 in termini di z_1 e di z_2 tramite il formalismo matriciale.

La soluzione del problema è immediata. Posto

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

e scritte le matrici A e B dedotte dai sistemi dati

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

possiamo scrivere

$$Y = A \cdot X \qquad X = B \cdot Z$$

e quindi

$$Y = A \cdot B \cdot Z$$

La matrice di trasformazione $A \cdot B$ è data dal prodotto

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

Si ha allora

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \tag{4.31}$$

ossia

$$\begin{cases} y_1 = 8z_1 + 3z_2 \\ y_2 = -3z_1 + 5z_2 \end{cases}$$

Osserviamo che questo esempio nel quale sono coinvolte matrici di dimensione 2×2 poteva essere risolto benissimo con sostituzione diretta delle (4.30) nei secondi membri delle (4.29). Tuttavia, quest'ultimo procedimento non è consigliabile nel caso generale in cui le matrici non sono di dimensioni piccole. ■

■ *Esempio 2: trasformazione rotazionale.*

Immaginiamo di avere due sistemi piani di coordinate cartesiane ortogonali (Oxy) e $(O\xi\eta)$ di origine comune O, ma con gli assi corrispondenti ruotati di un angolo ϑ. Vogliamo trovare le relazioni tra le coordinate x, y e ξ, η, nei due sistemi, del medesimo punto P, utilizzando il formalismo matriciale.

Consideriamo allo scopo un punto qualsiasi P. Esso avrà coordinate x, y in un sistema e ξ, η nell'altro sistema (si veda la Fig. 4.6).

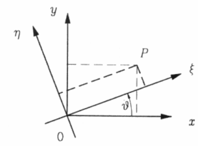


Fig. 4.6

Da tale figura, si ha con calcoli trigonometrici,

$$\begin{aligned} \xi &= x\cos\vartheta + y\sin\vartheta \\ \eta &= -x\sin\vartheta + y\cos\vartheta \end{aligned} \tag{4.32}$$

Il risultato ottenuto non è altro che lo sviluppo del prodotto matriciale

$$X' = A \cdot X \tag{4.33}$$

con

$$X' = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \tag{4.34}$$

Come si vedrà nel prossimo capitolo la matrice precedente A è un esempio di matrice ortogonale. Inoltre, fissato un valore per ϑ (ad esempio $\vartheta = \pi/2$), si verifica immediatamente, dalla (4.32), che si tratta effettivamente di una rotazione di $\frac{\pi}{2}$ tramite la quale si ottiene $\xi = y, \eta = -x$.

Alla luce di quanto detto l'applicazione (4.32) può essere letta come una trasformazione che ruota il vettore $\overrightarrow{OP} = X$ di un angolo ϑ trasformandolo in un altro vettore X' di egual modulo ma direzione diversa. ■

Autovalori di una matrice.

Dalla trattazione e dagli esempi del precedente paragrafo abbiamo visto che, moltiplicando un vettore

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad \text{per una matrice} \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

il vettore ottenuto dall'applicazione

$$Y = A \cdot X$$

è un vettore che ha componenti diverse dal primo e risulta ruotato, in generale, rispetto a questo di un angolo α. Ad esempio, se nelle (4.29) si assegnano al vettore $X = (x_1, x_2)$ componenti $(1,1)$ si ottiene il vettore $Y = (y_1, y_2)$ di componenti $(3,-2)$. Da un semplice calcolo si può verificare (Fig. 4.7) che l'angolo tra i due vettori $X = (1,1)$ e $Y = (3,-2)$ è di circa 79 gradi. I moduli dei vettori sono ovviamente diversi: il primo vale $\sqrt{2}$ e il secondo vale $\sqrt{13}$.

Vogliamo adesso porre il seguente problema: è possibile trovare una trasformazione del tipo (4.29) tale che il vettore ottenuto differisca dal primo solo per la lunghezza, senza subire alcuna rotazione?

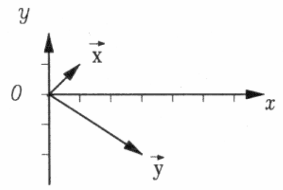


Fig. 4.7

La questione si generalizza trattando una matrice quadrata di dimensione $n \times n$ e vettori di n componenti.

Data quindi una matrice quadrata A di dimensioni $n \times n$ consideriamo la trasformazione lineare

$$A \cdot X = Y \tag{4.35}$$

con X e Y vettori colonna di n elementi.

La (4.35) trasforma un vettore X di n elementi in un altro vettore Y di n elementi.

La questione che abbiamo posto è quindi la seguente: è possibile trovare una trasformazione lineare del tipo (4.35) che trasformi un vettore X in un vettore Y parallelo a X? In altre parole si chiede: per quali vettori X la (4.35) produce un vettore Y della forma $Y = \lambda\, X$, con λ costante da determinare?

Posto il problema in questi termini non v'è che da sostituire $Y = \lambda\, X$ nella (4.35) e scrivere l'equazione matriciale che si ottiene

$$\boxed{A \cdot X = \lambda\, X} \tag{4.36}$$

La (4.36) è il punto di partenza nel *problema degli autovalori di una matrice.*

Notiamo che una soluzione banale della (4.36) esiste sempre: essa è $X = 0$ per qualunque valore di λ. Oltre a questa soluzione banale a noi interessano altre soluzioni per le quali si abbia $X \neq 0$. Una soluzione di questo tipo esiste a condizione che λ appartenga all'insieme finito dei valori numerici speciali i cui elementi sono chiamati *autovalori* o *valori caratteristici* della matrice A. In corrispondenza di ciascuno di questi valori esiste un insieme non banale $X \neq 0$, detto *autovettore* corrispondente a ogni singolo autovalore.

Spettro degli autovalori e raggio spettrale. L'insieme degli autovalori è chiamato lo *spettro* della matrice A e contiene informazioni utili sulle proprietà algebriche della matrice stessa.
Il massimo tra i valori assoluti degli autovalori è detto *raggio spettrale.*

Partendo dalla (4.36), determiniamo autovalori e autovettori di una matrice. A tale scopo, tramite l'identità

$$X = I \cdot X$$

riscriviamo la (4.36) e, raccogliendo a primo membro, otteniamo

$$\boxed{(A - \lambda\, I) \cdot X = 0} \qquad (4.37)$$

La (4.37) fornisce le condizioni algebriche per arrivare alla determinazione degli autovalori. Difatti, essa è un sistema omogeneo di equazioni lineari nelle incognite $x_1, x_2, \dots, x_n$, componenti del vettore X. La matrice dei coefficienti è $A - \lambda\, I$. Per quanto visto nel paragrafo 4.2 questo sistema avrà una soluzione non banale, $X \neq 0$, quando il determinante della matrice dei coefficienti è eguale a zero. Deve quindi essere

$$\det(A - \lambda\, I) = 0$$

Sviluppando il precedente determinante si ottiene un polinomio di grado n in λ che, eguagliato a zero, costituisce l'*equazione caratteristica* della matrice A. L'equazione così ottenuta, algebrica di grado n, per il teorema fondamentale dell'algebra possiede n radici, eventualmente anche complesse (si veda l'Appendice A, alla fine del presente libro, per una breve introduzione ai numeri complessi). Tali radici sono gli autovalori della matrice A. Riassumendo si ha

$$P_n(\lambda) = \det(A - \lambda\, I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (4.38)$$

Ricavati quindi gli n autovalori

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \dots, \quad \lambda_n,$$

come zeri del polinomio $P_n(\lambda)$, i corrispondenti autovettori

$$X_1, \quad X_2, \quad \dots, \quad X_n$$

si ottengono risolvendo il sistema omogeneo di equazioni, ottenuto dalla (4.37),

$$(A - \lambda\, I) \cdot X = 0$$

per ciascuno degli autovalori.

Pertanto, se $\lambda = \lambda_k$ è un autovalore e $X = X_k$ il corrispondente autovettore, si ha

$$(A - \lambda_k\, I) \cdot X_k = 0 \qquad (k = 1, 2, \dots, n) \qquad (4.39)$$

La determinazione dell'autovettore X_k consiste quindi nel risolvere il sistema algebrico lineare *omogeneo* (4.39) in cui la matrice dei coefficienti è $(A - \lambda_k\, I)$.

4.6.1 Normalizzazione degli autovettori.

Ogni generico autovettore ricavato è determinato a meno di una costante moltiplicativa arbitraria. Difatti basta osservare che se X è un autovettore, anche $\alpha\, X$, con $\alpha \neq 0$, lo è.
Per evitare questa dipendenza si può procedere con l'operazione di *normalizzazione* degli autovettori.

Infatti, sia X un autovettore con componenti reali $x_1, x_2, \ldots, x_n$, l'operazione di *normalizzazione* consiste nel dividere l'autovettore per la propria *norma* o distanza euclidea in $\mathbf{R}^n$. Si ha cioè

$$\widehat{X} = \frac{1}{||X||} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{4.40}$$

dove

$$||X|| = (X^T \cdot X)^{\frac{1}{2}} = (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)^{\frac{1}{2}} \tag{4.41}$$

è la *norma* in $\mathbf{R}^n$ (si vede subito che in $\mathbf{R}^2$ e in $\mathbf{R}^3$ la norma coincide con il modulo di un vettore).
La normalizzazione è quindi utile nei calcoli in quanto scompare la dipendenza dalla costante arbitraria, come si vede bene nel primo dei due esempi che seguono.

■ *Esempio 1: due autovalori distinti e reali.*
Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 10 & -4 \end{pmatrix}$$

determinare autovalori, autovettori e raggio spettrale.
Per prima cosa si scrive il determinante (4.38)

$$\begin{vmatrix} -(5+\lambda) & 3 \\ 10 & -(4+\lambda) \end{vmatrix} = 0$$

dal quale si ottiene il polinomio caratteristico

$$P_2(\lambda) = \lambda^2 + 9\lambda - 10 = (\lambda - 1)(\lambda + 10) = 0$$

È evidente che le due radici, cioè gli autovalori della matrice A, sono

$$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = -10$$

Consideriamo il primo autovalore $\lambda_1 = 1$ e riscriviamo il sistema (4.39). Otteniamo in questo modo due equazioni

$$\begin{cases} -6x_1 + 3x_2 = 0 \\ 10x_1 - 5x_2 = 0 \end{cases}$$

che sono compatibili e dalle quali si ricava subito

$$x_2 = 2x_1$$

Ponendo $x_1 = \alpha \neq 0$, arbitrario, si può quindi dire che un autovettore corrispondente a λ_1 è

$$X_1 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

di componenti

$$x_1 = \alpha \qquad x_2 = 2\alpha$$

La norma di questo autovettore è

$$||X_1|| = \alpha\sqrt{(1^2 + 2^2)} = \alpha\sqrt{5}$$

mentre l'autovettore normalizzato è

$$\widehat{X}_1 = \frac{1}{||X_1||}\, \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Consideriamo ora il secondo autovalore $\lambda_2 = -10$ e ripetiamo il procedimento riscrivendo il sistema (4.39) con $\lambda_2 = -10$. Otteniamo le due equazioni compatibili

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 = 0 \\ 10x_1 + 6x_2 = 0 \end{cases}$$

dalle quali si ricava

$$x_2 = -\frac{5}{3}x_1$$

Si pone $x_1 = \beta \neq 0$, arbitrario, e si può scrivere l'autovettore corrispondente a λ_2

$$X_2 = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

di componenti

$$x_1 = \beta \qquad x_2 = -\frac{5}{3}\,\beta$$

la cui norma è

$$||X_2|| = \beta\sqrt{1^2 + \left(-\frac{5}{3}\right)^2} = \frac{\beta}{3}\sqrt{34}$$

e l'autovettore normalizzato

$$\widehat{X}_2 = \frac{1}{||X_2||}\, \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{5}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{34}} \\ -\frac{5}{\sqrt{34}} \end{pmatrix}$$

Per concludere, determiniamo il raggio spettrale ρ della matrice A. È, in base alla definizione,

$$\rho = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\} = 10$$

■

DIAGONALIZZAZIONE DELLE MATRICI

Matrici ortogonali. Definizioni e proprietà.

Dati in $\mathbf{R}^3$ due sistemi di riferimento cartesiani ortogonali aventi la stessa origine O, $(Ox_1x_2x_3)$ e $(Oy_1y_2y_3)$ (si veda la Fig. 5.1), consideriamo un punto qualsiasi P.

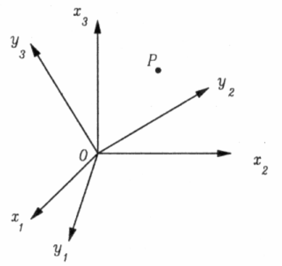


Fig. 5.1

Nei due sistemi di riferimento le coordinate di P saranno

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad \text{nel primo sistema}$$
$$y_1, \quad y_2, \quad y_3, \quad \text{nel secondo sistema}$$

Il teorema di Pitagora permette di scrivere la distanza $\overline{OP}$ tra i due punti O e P. Data l'invarianza di $\overline{OP}$ rispetto ai due sistemi di riferimento possiamo scrivere l'eguaglianza tra le due seguenti quantità, rappresentanti ciascuna la distanza al quadrato $\overline{OP}^2$ nei due sistemi

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 \tag{5.1}$$

Quanto finora detto si comprende molto chiaramente perché si è fatto uso di concetti noti, ragionando su distanze appartenenti allo spazio ordinario. Ciò che segue è una estensione allo spazio $\mathbf{R}^n$ dei medesimi concetti, facendo uso delle nozioni sin qui acquisite.

Consideriamo, quindi, la trasformazione lineare

$$Y = A \cdot X \tag{5.2}$$

che, come sappiamo trasforma un vettore X di $\mathbf{R}^n$ in un vettore Y di $\mathbf{R}^n$, attraverso la matrice quadrata A. Le rispettive lunghezze euclidee, o norme al quadrato, sono

$$\begin{aligned} \|X\|^2 &= x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \\ \|Y\|^2 &= y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 \end{aligned} \tag{5.3}$$

Vogliamo vedere se, e come, le norme (5.3) sono influenzate dalla trasformazione lineare (5.2). Per vedere ciò, consideriamo le matrici trasposte di ambo i membri della (5.2) e moltiplichiamoli a sinistra per dette trasposte. Si ottiene (si veda la proprietà *(e)* delle (1.7))

$$Y^T \cdot Y = X^T \cdot A^T \cdot A \cdot X \tag{5.4}$$

In base alla definizione di norma (si veda il paragrafo 4.6), la (5.4) può essere riscritta sotto la seguente forma

$$\|Y\|^2 = X^T \cdot A^T \cdot A \cdot X \tag{5.5}$$

Avevamo supposto la matrice A arbitraria; se, invece, la si suppone appartenente a una classe di matrici per le quali si abbia

$$A^T \cdot A = I$$

allora dalla (5.5), si ottiene $\qquad \|Y\|^2 = \|X\|^2$

È chiaro che una tale classe di matrici conserva le lunghezze.

Terminiamo questo paragrafo enunciando (senza dimostrazione) i principali TEOREMI sulle matrici ortogonali Q:

$\boxed{1}$ *det* $Q = \pm 1$

$\boxed{2}$ *Se due matrici* Q_1 *e* Q_2 *sono ortogonali, il loro prodotto è ancora una matrice ortogonale (ricordando che le matrici ortogonali sono quadrate).*

$\boxed{3}$ *Permutando le righe o le colonne di una matrice ortogonale, la matrice che ne risulta è ancora una matrice ortogonale.*

$\boxed{4}$ *Gli autovalori di una matrice ortogonale sono tutti eguali a 1 (o di modulo eguale a 1, se si tratta di autovalori complessi).*

$\boxed{5}$ *Se si dispongono gli autovettori normalizzati di una matrice simmetrica con autovalori distinti a formare le colonne di una matrice, tale matrice è ortogonale. Il risultato è anche vero se vi sono autovalori ripetuti, basta che gli autovettori normalizzati corrispondenti agli autovalori ripetuti siano scelti mutuamente ortogonali.*

Matrici simili. Diagonalizzabilità di una matrice.

Due matrici quadrate A e B, entrambe di ordine n, si diranno *simili* se esiste una terza matrice C non singolare tale che si abbia

$$\boxed{B = C^{-1} \cdot A \cdot C}$$

Sono simili, ad esempio, le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ -5 & -5 \end{pmatrix}$$

mentre la matrice C è

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

La più semplice forma, in cui una matrice si può presentare, è la forma diagonale. Vediamo quindi quando è possibile, data una matrice A, trasformarla in forma diagonale, cioè in una matrice del tipo

$$\Lambda = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

dove si è usata la lettera Λ per indicare la generica matrice diagonale.

Si tratta di trovare una matrice P che operando sulla matrice A, come appena visto a proposito delle matrici simili, dia come risultato una matrice diagonale

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = \Lambda \tag{5.10}$$

Se una tale matrice esiste, la matrice A si dirà *diagonalizzabile* e la matrice P matrice *diagonalizzante*.

La diagonalizzabilità di una matrice è strettamente legata alle proprietà dei suoi autovettori e autovalori tramite diversi TEOREMI, che qui di seguito enunciamo, senza dimostrarli:

$\boxed{1}$ *Condizione necessaria e sufficiente perché una matrice $A(n \times n)$ sia diagonalizzabile è che abbia n autovettori linearmente indipendenti.*

$\boxed{2}$ *Una matrice A, diagonalizzabile, sarà diagonalizzata tramite una matrice P le cui colonne sono gli autovettori di A.*

$\boxed{3}$ *Se una matrice $A(n \times n)$, diagonalizzabile, ha autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ e corrispondenti autovettori $P_1, P_2, \ldots, P_n$ e se P è la matrice le cui colonne sono costituite dagli autovettori $P_1, P_2, \ldots, P_n$, allora la matrice diagonalizzata è*

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$\boxed{4}$ *Una matrice diagonalizzante P è ancora diagonalizzante se si scambiano le sue colonne.*

$\boxed{5}$ *Una matrice $A(n \times n)$ con meno di n autovettori linearmente indipendenti non può essere diagonalizzata.*