

1 Esercizi

Esercizio 1 Si calcoli l'integrale

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-p^2} dp = \sqrt{\pi}.$$

Suggerimento: si consideri $I^2 = \int_{\mathbb{R}^2} dx dy e^{-x^2-y^2}$, e si passi a coordinate polari $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$.

Esercizio 2 Usando la relazione di riflessione per la funzione Gamma,

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}, \quad (1.1)$$

si calcoli il valore dei residui $\text{Res}(\Gamma(z))|_{z=-n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 3 Usando la stessa relazione di riflessione (1.1), e il fatto che gli unici poli di $\Gamma(z)$ sono in $z = -n$, $n \in \mathbb{N}$, si dimostri che $\Gamma(z)$ non può avere zeri per nessun valore di z . Suggerimento: si usi il fatto che $\sin(\pi z)$ è una funzione senza singolarità.

Esercizio 4 Usando la definizione di sviluppo asintotico (\rightarrow nelle note), si calcolino i coefficienti c_k dello sviluppo:

$$e^{-n} \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{n^k}, \quad \text{per } n \rightarrow \infty. \quad (1.2)$$