Appunti di
Algebra lineare, multilineare e tensori

Marco FERRARIS

Dipartimento di Matematica “Giuseppe Peano”
Università degli Studi di Torino

2023

Sommario

Se non è esplicitamente affermato il contrario, gli spazi vettoriali che considereremo sono spazi vettoriali reali o complessi di dimensione finita.

1 Spazi vettoriali di dimensione finita

Si suppongono noti i concetti di spazio vettoriale reale (o complesso), spazio duale e spazio biduale, dimensione di uno spazio vettoriale, funzioni lineari e multilineari fra spazi vettoriali. ...

1.1 Basi e basi duali

Uno spazio vettoriale $\mathbf{E}$ di dimensione finita n sul campo $\mathbb{K}$ (con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) è uno spazio vettoriale sul quale è possibile definire una funzione lineare biiettiva $\beta : \mathbf{E} \to \mathbb{K}^n$. Con la funzione biiettiva β si possono trasferire su $\mathbf{E}$ tutte le strutture presenti sullo spazio vettoriale $\mathbb{K}^n$ come, ad esempio, la topologia.

Una base orientata di $\mathbf{E}$ è una n-pla di vettori $(\vec{\boldsymbol{e}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{e}}_n) \in \mathbf{E}^n$ tale che gli n vettori $\vec{\boldsymbol{e}}_i$ siano linearmente indipendenti. Indicando con $(\vec{\boldsymbol{u}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{u}}_n)$ la base orientata canonica di $\mathbb{K}^n$ ($\vec{\boldsymbol{u}}_i$ è il vettore in cui la i-esima componente vale 1 e tutte le altre valgono 0), possiamo definire la funzione lineare β associata ad una base $(\vec{\boldsymbol{e}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{e}}_n)$ come la funzione lineare definita da $\beta(\vec{\boldsymbol{e}}_i) = \vec{\boldsymbol{u}}_i$ (oppure $\vec{\boldsymbol{e}}_i = \beta^{-1}(\vec{\boldsymbol{u}}_i)$).

Indicando con $\pi^k : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ la k-esima proiezione del prodotto cartesiano, le n funzioni lineari $\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^k = \pi^k \circ \beta : \mathbf{E} \to \mathbb{K}$ formano una base ordinata $(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^1, \ldots, \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^n)$ dello spazio duale $\mathbf{E}^*$ che viene detta *base duale* della base $(\vec{\boldsymbol{e}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{e}}_n)$ di $\mathbf{E}$.

Ovviamente si ha

$$\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^k(\vec{\boldsymbol{e}}_i) = \pi^k(\vec{\boldsymbol{u}}_i) = \delta_i^k$$

dove la δ di Kronecker è definita, come al solito, da

$$\delta_i^k = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad k = i \\ 0 & \text{se} \quad k \neq i, \end{cases}$$

Si dimostra facilmente che

$$\vec{\boldsymbol{x}} = x^1\,\vec{\boldsymbol{e}}_1 + \ldots + x^n\,\vec{\boldsymbol{e}}_n = \sum_{i=1}^{n} x^i\,\vec{\boldsymbol{e}}_i \Longleftrightarrow x^k = \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^k(\vec{\boldsymbol{x}})$$

$$\underline{\boldsymbol{\omega}} = \omega_1\,\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^1 + \ldots + \omega_n\,\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^n = \sum_{i=1}^{n} \omega_i\,\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^i \Longleftrightarrow \omega_k = \underline{\boldsymbol{\omega}}(\vec{\boldsymbol{e}}_k)$$

D'ora in avanti utilizzeremo sempre (ameno che non venga altrimenti specificato esplicitamente) la *convenzione della sommatoria di Einstein*: al posto di $\sum_{i=1}^{n} x^i\,\vec{\boldsymbol{e}}_i$ scriveremo $x^i\,\vec{\boldsymbol{e}}_i$ ed al posto di $\sum_{i=1}^{n} \omega_i\,\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^i$ scriveremo $\omega_i\,\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^i$, sottintendendo la sommatoria da 1 a n. Gli indici in cui sono sottintese le sommatorie si chiameranno *indici muti*[1], gli altri indici sono detti *indici liberi*.

Per esempio, per dimostrare le due formule precedenti, possiamo procedere come segue:

$$\begin{array}{lcccccccc}
\vec{\boldsymbol{x}} = x^i\,\vec{\boldsymbol{e}}_i & \Longleftrightarrow & \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^k(\vec{\boldsymbol{x}}) & = & \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^k(x^i\,\vec{\boldsymbol{e}}_i) & = & x^i\,\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^k(\vec{\boldsymbol{e}}_i) & = & x^i\,\delta_i^k & = & x^k \\
\underline{\boldsymbol{\omega}} = \omega_i\,\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^i & \Longleftrightarrow & \underline{\boldsymbol{\omega}}(\vec{\boldsymbol{e}}_k) & = & (\omega_i\,\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^i)(\vec{\boldsymbol{e}}_k) & = & \omega_i\,\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^i(\vec{\boldsymbol{e}}_k) & = & \omega_i\,\delta_k^i & = & \omega_k
\end{array}$$

I numeri x^i (risp. ω_i) sono le componenti del vettore $\vec{\boldsymbol{x}}$ (risp. del covettore $\underline{\boldsymbol{\omega}}$) rispetto alla base $(\vec{\boldsymbol{e}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{e}}_n)$

[1] Gli indici muti possono comparire solo due volte: una volta in alto ed una volta in basso.

1.2 Cambiamenti di base

Date due basi $(\vec{\boldsymbol{e}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{e}}_n)$ e $(\vec{\boldsymbol{e}}'_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{e}}'_n)$ di uno spazio vettoriale $\mathbf{E}$, definiamo la matrice di cambiamento di base (dalla prima alla seconda) come la matrice quadrata $n \times n$

$$A = \begin{pmatrix} A^1_1 & \cdots & A^1_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A^n_1 & \cdots & A^n_n \end{pmatrix}$$

i cui coefficienti sono definiti da $A^i{}_{i'} = \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^i(\vec{\boldsymbol{e}}'_{i'})$. La matrice A è invertibile e la sua inversa è la matrice

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{A}^1_1 & \cdots & \bar{A}^1_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{A}^n_1 & \cdots & \bar{A}^n_n \end{pmatrix}$$

i cui coefficienti sono definiti da $\bar{A}^{i'}{}_i = \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}'^{i'}(\vec{\boldsymbol{e}}_i)$. Valgono le identità

$$A^i{}_{i'}\bar{A}^{i'}{}_j = \delta^i_j \qquad , \qquad \bar{A}^{i'}{}_k A^k{}_{j'} = \delta^{i'}_{j'}.$$

Per il momento non è necessario specificare esplicitamente le formule che esprimono i coefficienti $\bar{A}^{i'}{}_j$ in funzione dei coefficienti $A^r{}_{s'}$.

La trasformazione di base $(\vec{\boldsymbol{e}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{e}}_n) \mapsto (\vec{\boldsymbol{e}}'_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{e}}'_n)$ definita da

$$\vec{\boldsymbol{e}}'_{i'} = \vec{\boldsymbol{e}}_i A^i{}_{i'}$$

induce una trasformazione $(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^1, \dots, \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^n) \mapsto (\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}'^1, \dots, \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}'^n)$ che è definita da

$$\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}'^{\,i'} = \bar{A}^{i'}{}_k \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^k$$

Per le componenti dei vettori $\vec{\boldsymbol{x}} \in \mathbf{E}$ e dei covettori $\underline{\boldsymbol{\omega}} \in \mathbf{E}^*$ valgono le seguenti leggi di trasformazione:

$$x'^{\,i'} = \bar{A}^{i'}{}_k x^k \qquad , \qquad \omega'_{i'} = \omega_k A^k{}_{i'}$$

1.3 Orientazioni

Indichiamo con $\mathcal{B}(\mathbf{E}) \subset \mathbf{E}^n$ l'insieme delle basi orientate di uno spazio vettoriale $\mathbf{E}$. Quando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ possiamo dire che due basi orientate $(\vec{\boldsymbol{e}}_1, \dots, \vec{\boldsymbol{e}}_n) \in \mathcal{B}(\mathbf{E})$ e $(\vec{\boldsymbol{e}}'_1, \dots, \vec{\boldsymbol{e}}'_1) \in \mathcal{B}(\mathbf{E})$ hanno la stessa orientazione se la matrice di cambiamento di base ha determinante positivo. Questa proprietà definisce una relazione di equivalenza in $\mathcal{B}(\mathbf{E})$ che ha due sole classi di equivalenza. Scegliere una delle due classi di equivalenza equivale a definire una orientazione dello spazio vettoriale $\mathbf{E}$; la classe di equivalenza scelta verrà indicata con $\mathcal{B}^+(\mathbf{E})$, mentre l'altra sarà indicata con $\mathcal{B}^-(\mathbf{E})$. Moltiplicando ogni base in $\mathcal{B}^+(\mathbf{E})$ per una matrice $A \in GL(n, \mathbb{R})$ con determinante negativo si ottengono tutte le basi in $\mathcal{B}^-(\mathbf{E})$ (e viceversa).

La scelta di un'orientazione in $\mathbf{E}$ induce un'orientazione su $\mathbf{E}^*$: scelta una base in $(\vec{\boldsymbol{e}}_1, \dots, \vec{\boldsymbol{e}}_n) \in \mathcal{B}^+(\mathbf{E})$ definiamo $\mathcal{B}^+(\mathbf{E}^*)$ dicendo che è la classe di equivalenza della base duale $(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^1, \dots, \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^n)$.

Nel caso di $\mathbb{R}^n$ si sottintende sempre che viene scelta come orientazione la classe di equivalenza della base canonica $(\vec{\boldsymbol{u}}_1, \dots, \vec{\boldsymbol{u}}_n)$.

1.4 Applicazioni lineari fra spazi vettoriali

L'insieme delle applicazioni lineari da uno spazio vettoriale $\mathbf{E}$ sul campo $\mathbb{K}$ ad uno spazio vettoriale $\mathbf{F}$ sul campo $\mathbb{K}$ verrà indicato con $\mathbf{L}(\mathbf{E};\mathbf{F})$. Com'è noto, l'insieme $\mathbf{L}(\mathbf{E};\mathbf{F})$ ha una struttura naturale di spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$, con dimensione $\dim(\mathbf{L}(\mathbf{E};\mathbf{F})) = \dim(\mathbf{E})\dim(\mathbf{F})$. Le due operazioni sono quelle indotte dalla struttura naturale di spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ che è definita sull'insieme $\mathbf{F}^{\mathbf{E}}$ di tutte le funzioni $\psi : \mathbf{E} \to \mathbf{F}$:

$$\psi_1 + \psi_2 : \vec{\boldsymbol{x}} \longmapsto \psi_1(\vec{\boldsymbol{x}}) + \psi_2(\vec{\boldsymbol{x}}) \qquad , \qquad k\,\psi : \vec{\boldsymbol{x}} \longmapsto k\,\psi(\vec{\boldsymbol{x}})$$

Date una base $\mathfrak{b} = (\vec{\boldsymbol{e}}_1, \dots, \vec{\boldsymbol{e}}_n) \in \mathcal{B}(\mathbf{E})$ ed una base $\mathfrak{g} = (\vec{\boldsymbol{f}}_1, \dots, \vec{\boldsymbol{f}}_m) \in \mathcal{B}(\mathbf{F})$, indichiamo con $(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^1, \dots, \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^n)$ e $(\underline{\boldsymbol{\varphi}}^1, \dots, \underline{\boldsymbol{\varphi}}^m)$ le rispettive basi duali. Una funzione lineare $\psi \in \mathbf{L}(\mathbf{E};\mathbf{F})$ viene rappresentata da una matrice, di m righe ed n, colonne avente componenti $\psi_i^\alpha = \underline{\boldsymbol{\varphi}}^\alpha(\psi(\vec{\boldsymbol{e}}_i))$:

$$\psi(\vec{\boldsymbol{x}}) = \psi(x^i\,\vec{\boldsymbol{e}}_i) = x^i\,\psi(\vec{\boldsymbol{e}}_i) = x^i\,\psi_i^\alpha\,\vec{\boldsymbol{f}}_\alpha$$

Indicando con $\beta : \mathbf{E} \to \mathbb{K}^n$ la funzione lineare biiettiva associata alla base $\mathfrak{b}$ e con $\gamma : \mathbf{F} \to \mathbb{K}^m$

quella associata alla base $\mathfrak{g}$, possiamo considerare il seguente diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{E} \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\beta"'] & \mathbf{F} \arrow[d, "\gamma"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, "\tilde{\psi}"'] & \mathbb{K}^m
\end{tikzcd}$$

dove la funzione lineare $\tilde{\psi} = \gamma \circ \psi \circ \beta^{-1}$ è definita da

$$\tilde{\psi} : (x^i) \longmapsto (y^\alpha) = (\psi^\alpha_i \, x^i) \, .$$

La funzione lineare $\tilde{\psi} : \mathbb{K}^n \longmapsto \mathbb{K}^m$ viene detta rappresentazione della funzione lineare ψ attraverso le due basi $\mathfrak{b}$ e $\mathfrak{g}$. Se si cambiano le due basi allora cambia anche la funzione $\tilde{\psi}$ e si ha

$$\psi'^{\alpha'}_{i'} = \bar{B}^{\alpha'}_{\alpha} \, \psi^\alpha_i \, A^i_{i'}$$

dove $\vec{\boldsymbol{e}}'_{i'} = \vec{\boldsymbol{e}}_i \, A^i_{i'}$ e $\vec{\boldsymbol{f}}'_{\alpha'} = \vec{\boldsymbol{f}}_\alpha \, B^\alpha_{\alpha'}$.

Per ogni funzione lineare $\psi \in \mathbf{L}(\mathbf{E};\mathbf{F})$ la trasposta di ψ è la funzione lineare ${}^t(\psi) : \mathbf{F}^* \to \mathbf{E}^*$ definita da

$${}^t(\psi)(\underline{\boldsymbol{\omega}}) = \underline{\boldsymbol{\omega}} \circ \psi \qquad\qquad \forall \underline{\boldsymbol{\omega}} \in \mathbf{F}^* = \mathbf{L}(\mathbf{F};\mathbb{K})$$

L'operazione di trasposizione è una funzione lineare ${}^t(\cdot) : \mathbf{L}(\mathbf{E};\mathbf{F}) \longrightarrow \mathbf{L}(\mathbf{F}^*;\mathbf{E}^*)$ che gode delle seguenti proprietà:

1. ${}^{t}(\psi \circ \phi) = {}^{t}(\phi) \circ {}^{t}(\psi)$

2. ${}^{t}(\mathrm{id}_{\mathbf{E}}) = \mathrm{id}_{\mathbf{E}^*}$

Quando esiste la funzione inversa $\psi^{-1} \in \mathbf{L}(\mathbf{F};\mathbf{E})$ si dimostra che: ${}^{t}(\psi^{-1}) = ({}^{t}(\psi))^{-1}$. La funzione ${}^{t}\psi^{-1}$ verrà indicata con ψ^* e si ha $(\psi \circ \phi)^* = (\psi^*) \circ (\phi^*)$.

Ricordiamo che esiste una funzione lineare iniettiva $\iota_{\mathbf{E}} : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{E}^{**}$ definita da

$$\iota_{\mathbf{E}} : \vec{\boldsymbol{x}} \longmapsto (\underline{\boldsymbol{\omega}} \longmapsto \underline{\boldsymbol{\omega}}(\vec{\boldsymbol{x}}))$$

Quando la dimensione di $\mathbf{E}$ è finita, la funzione $\iota_{\mathbf{E}}$ è biiettiva perché $\dim(\mathbf{E}) = \dim(\mathbf{E}^*) = \dim(\mathbf{E}^{**})$ e verrà utilizzata sempre per identificare i due spazi vettoriali[2].

1.5 Applicazioni multilineari fra spazi vettoriali

Dati $k+1$ spazi vettoriali $\mathbf{E}_1, \ldots, \mathbf{E}_k$ e $\mathbf{F}$ sul campo $\mathbb{K}$, indicheremo con $\mathbf{L}\left(\mathbf{E}_1, \ldots, \mathbf{E}_k; \mathbf{F}\right)$ lo spazio vettoriale delle applicazioni multilineari $A : \mathbf{E}_1 \times \cdots \times \mathbf{E}_k \longrightarrow \mathbf{F}$.[3] Si ha

$$\dim\left(\mathbf{L}\left(\mathbf{E}_1, \ldots, \mathbf{E}_k; \mathbf{F}\right)\right) = \dim(\mathbf{F}) \dim(\mathbf{E}_1) \cdots \dim(\mathbf{E}_k)$$

[2] Se $\dim(\mathbf{E})$ è infinita, si ha $\dim(\mathbf{E}) < \dim(\mathbf{E}^*) < \dim(\mathbf{E}^{**})$ e, quindi, la funzione $\iota_{\mathbf{E}} : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{E}^{**}$ non può essere biiettiva.

[3] Attenzione che, quando $k > 1$, le applicazioni multilineari non sono applicazioni lineari dallo spazio vettoriale $\mathbf{E}_1 \times \cdots \times \mathbf{E}_k$ allo spazio vettoriale $\mathbf{F}$. Infatti, si ha: $\mathbf{L}\left(\mathbf{E}_1 \times \cdots \times \mathbf{E}_k; \mathbf{F}\right) \cap \mathbf{L}\left(\mathbf{E}_1, \ldots, \mathbf{E}_k; \mathbf{F}\right) = \{0\}$.

Quando tutti gli spazi vettoriali $\mathbf{E}_i$ sono uguali ad uno spazio vettoriale $\mathbf{E}$, lo spazio vettoriale $\mathbf{L}(\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_k; \mathbf{F})$ verrà indicato con $\mathbf{L}_k(\mathbf{E}; \mathbf{F})$. In questo caso si ha

$$\dim(\mathbf{L}_k(\mathbf{E}; \mathbf{F})) = \dim(\mathbf{F}) \dim(\mathbf{E})^k$$

Esiste un isomorfismo canonico $\mathbf{L}(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2; \mathbf{F}) \equiv \mathbf{L}(\mathbf{E}_1; \mathbf{L}(\mathbf{E}_2; \mathbf{F}))$ che è definito da

$$A \longmapsto (x \mapsto A(x, \cdot))$$

dove $A \in \mathbf{L}(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2; \mathbf{F})$ e si è posto $A(x, \cdot) = (y \mapsto A(x, y)) \in \mathbf{L}(\mathbf{E}_2; \mathbf{F})$. L'isomorfismo inverso è dato da

$$B \longmapsto ((x, y) \mapsto B(x)(y)),$$

dove $B \in \mathbf{L}(\mathbf{E}_1; \mathbf{L}(\mathbf{E}_2; \mathbf{F}))$.

Esiste anche un isomorfismo canonico $\mathbf{L}(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2; \mathbf{F}) \equiv \mathbf{L}(\mathbf{E}_2; \mathbf{L}(\mathbf{E}_1; \mathbf{F}))$ che è definito da

$$A \longmapsto (y \mapsto A(\cdot, y))$$

dove $A \in \mathbf{L}(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2; \mathbf{F})$ e si è posto $A(\cdot, y) = (x \mapsto A(x, y)) \in \mathbf{L}(\mathbf{E}_1; \mathbf{F})$. L'isomorfismo inverso è dato da

$$B \longmapsto ((x, y) \mapsto B(y)(x)),$$

dove $B \in \mathbf{L}(\mathbf{E}_2; \mathbf{L}(\mathbf{E}_1; \mathbf{F}))$.

1.6 Prodotti tensoriali di spazi vettoriali

Dati due spazi vettoriali di dimensione finita $\mathbf{E}$ ed $\mathbf{F}$ sul campo $\mathbb{K}$, lo spazio vettoriale $\mathbf{L}\left(\mathbf{E},\mathbf{F};\mathbb{K}\right)^*$ verrà indicato con $\mathbf{E}\otimes\mathbf{F}$ e verrà chiamato *prodotto tensoriale* dello spazio vettoriale $\mathbf{E}$ e dello spazio vettoriale $\mathbf{F}$. Per quanto riguarda le dimensioni, si ha $\dim(\mathbf{E}\otimes\mathbf{F}) = \dim(\mathbf{E})\dim(\mathbf{F})$.

Il prodotto tensoriale $\vec{\boldsymbol{x}}\otimes\vec{\boldsymbol{y}}$ di un vettore $\vec{\boldsymbol{x}}\in\mathbf{E}$ e di un vettore $\vec{\boldsymbol{y}}\in\mathbf{F}$ è la funzione lineare $\vec{\boldsymbol{x}}\otimes\vec{\boldsymbol{y}} : \mathbf{L}\left(\mathbf{E},\mathbf{F};\mathbb{K}\right)\longrightarrow\mathbb{K}$ definita da $(\vec{\boldsymbol{x}}\otimes\vec{\boldsymbol{y}})(A) = A(\vec{\boldsymbol{x}},\vec{\boldsymbol{y}})$. Lo spazio vettoriale $\mathbf{E}\otimes\mathbf{F}$ è generato da tutti i prodotti tensoriali del tipo $\vec{\boldsymbol{x}}\otimes\vec{\boldsymbol{y}}$, ma non è detto che un elemento $\boldsymbol{t}\in\mathbf{E}\otimes\mathbf{F}$ sia per forza del tipo $\vec{\boldsymbol{x}}\otimes\vec{\boldsymbol{y}}$.

Per ogni spazio vettoriale $\mathbf{G}$ di dimensione finita, esiste un isomorfismo

$$\mathbf{L}\left(\mathbf{E},\mathbf{F};\mathbf{G}\right)\longleftrightarrow\mathbf{L}\left(\mathbf{E}\otimes\mathbf{F};\mathbf{G}\right)$$

di spazi vettoriali di dimensione finita. La dimostrazione si deduce dalla catena di isomorfismi

$$\mathbf{L}\left(\mathbf{E},\mathbf{F};\mathbf{G}\right)\overset{\alpha}{\longleftrightarrow}\mathbf{L}\left(\mathbf{G}^*;\mathbf{L}\left(\mathbf{E},\mathbf{F};\mathbb{K}\right)\right)\overset{t(\cdot)}{\longleftrightarrow}\mathbf{L}\left(\mathbf{L}\left(\mathbf{E},\mathbf{F};\mathbb{K}\right)^*;\mathbf{G}^{**}\right)\longleftrightarrow\mathbf{L}\left(\mathbf{E}\otimes\mathbf{F};\mathbf{G}\right),$$

dove l'isomorfismo lineare $\alpha : \mathbf{L}(\mathbf{E},\mathbf{F};\mathbf{G})\longrightarrow\mathbf{L}(\mathbf{G}^*;\mathbf{L}(\mathbf{E},\mathbf{F};\mathbb{K}))$ è definito da: $\alpha(A)(\omega)\overset{\text{def}}{=}\omega\circ A$.

L'isomorfismo appena descritto ci permette di affermare che ogni funzione bilineare $\psi : \mathbf{E}\times\mathbf{F}\longrightarrow\mathbf{G}$ si fattorizza in maniera unica attraverso la composizione di una funzione lineare $\hat{\psi} : \mathbf{E}\otimes\mathbf{F}\longrightarrow\mathbf{G}$ e del prodotto tensoriale $\otimes : \mathbf{E}\times\mathbf{F}\longrightarrow\mathbf{E}\otimes\mathbf{F}$. Detto in un altro modo, per ogni funzione bilineare

$\psi : \mathbf{E} \times \mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{G}$ esiste un'unica funzione lineare $\hat{\psi} : \mathbf{E} \otimes \mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{G}$ tale che il diagramma

$$\begin{tikzcd} \mathbf{E} \times \mathbf{F} \arrow[rr, "\psi"] \arrow[d, "\otimes"'] & & \mathbf{G} \\ \mathbf{E} \otimes \mathbf{F} \arrow[urr, "\hat{\psi}"'] & & \end{tikzcd}$$

sia commutativo. Cioè, tale che $\psi(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}}) = \hat{\psi}(\vec{\boldsymbol{x}} \otimes \vec{\boldsymbol{y}})$.

FINE LEZIONE 1 MMdFC (2023-02-28 ore 16:00 – 18:00)

Riferimenti bibliografici

[1] G. C. Shephard: *Spazi vettoriali di dimensioni finite*; Collana Poliedro, Edizioni Cremonese, Roma, 1969.

[2] S. Mac Lane, G. Birkhoff: *Algèbre, Tome 1, Structures fondamentales*; Gauthier–Villars, Paris, 1970.

[3] S. Mac Lane, G. Birkhoff: *Algèbre, Tome 2, Les grands théorèmes*; Gauthier–Villars, Paris, 1970.

[4] W. Gröbner: *Gruppi, anelli e algebre di Lie*; Collana Poliedro, Edizioni Cremonese, Roma, 1975.