In particolare, esiste un isomorfismo canonico

$$\mathbf{E} \otimes \mathbf{F} = \mathbf{L}\left(\mathbf{E}, \mathbf{F}; \mathbb{K}\right)^* \longleftrightarrow \mathbf{L}\left(\mathbf{E}^*, \mathbf{F}^*; \mathbb{K}\right) \equiv \left(\mathbf{E}^* \otimes \mathbf{F}^*\right)^*$$

Dalla funzione bilineare $\psi : \mathbf{E} \times \mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{L}\left(\mathbf{E}^*, \mathbf{F}^*; \mathbb{K}\right)$ definita da

$$\psi(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}}) : (\underline{\boldsymbol{\omega}}, \underline{\boldsymbol{\sigma}}) \longmapsto \underline{\boldsymbol{\omega}}(\vec{\boldsymbol{x}})\underline{\boldsymbol{\sigma}}(\vec{\boldsymbol{y}})$$

si deduce che esiste una funzione lineare biiettiva $\hat{\psi} : \mathbf{E} \otimes \mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{L}\left(\mathbf{E}^*, \mathbf{F}^*; \mathbb{K}\right)$ definita da $\hat{\psi}(\vec{\boldsymbol{x}} \otimes \vec{\boldsymbol{y}}) = \psi(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}})$, ed estesa per linearità a tutto lo spazio vettoriale $\mathbf{E} \otimes \mathbf{F}$.

La funzione bilineare $\psi : \mathbf{F} \times \mathbf{E}^* \longrightarrow \mathbf{L}(\mathbf{E}; \mathbf{F})$ definita da $\psi(\vec{\boldsymbol{y}}, \underline{\boldsymbol{\omega}}) : \vec{\boldsymbol{x}} \longmapsto \vec{\boldsymbol{y}}\,\underline{\boldsymbol{\omega}}(\vec{\boldsymbol{x}})$ induce un isomorfismo $\hat{\psi} : \mathbf{F} \otimes \mathbf{E}^* \longrightarrow \mathbf{L}(\mathbf{E}; \mathbf{F})$. Ricordiamo che $\mathbf{F} \otimes \mathbf{E}^*$ è isomorfo a $\mathbf{E}^* \otimes \mathbf{F}$.

L'associatività dell'operazione di prodotto cartesiano di spazi vettoriali

$$(\mathbf{E} \times \mathbf{F}) \times \mathbf{G} \longleftrightarrow \mathbf{E} \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G})$$

permette di dimostrare l'esistenza di un isomorfismo

$$(\mathbf{E} \otimes \mathbf{F}) \otimes \mathbf{G} \longleftrightarrow \mathbf{E} \otimes (\mathbf{F} \otimes \mathbf{G})$$

e, quindi, si dimostra che anche il prodotto tensoriale di spazi vettoriali è associativo. In particolare, si ha che

$$\mathbf{E} \otimes \mathbf{F} \otimes \mathbf{G} \longleftrightarrow \mathbf{L}\left(\mathbf{E}, \mathbf{F}, \mathbf{G}; \mathbb{K}\right)^* \longleftrightarrow \mathbf{L}\left(\mathbf{E}^*, \mathbf{F}^*, \mathbf{G}^*; \mathbb{K}\right)$$

In generale si deduce che

$$\mathbf{E}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{E}_k \longleftrightarrow \mathbf{L}\left(\mathbf{E}_1, \ldots, \mathbf{E}_k; \mathbb{K}\right)^* \longleftrightarrow \mathbf{L}\left(\mathbf{E}_1^*, \ldots, \mathbf{E}_k^*; \mathbb{K}\right)$$

Dati due spazi vettoriali $\mathbf{E}$ ed $\mathbf{F}$, esiste una biiezione

$$\mathbf{E} \times \mathbf{F} \longleftrightarrow \mathbf{F} \times \mathbf{E}$$

da cui si può dimostrare che esiste un isomorfismo

$$\mathbf{E} \otimes \mathbf{F} \longleftrightarrow \mathbf{F} \otimes \mathbf{E}$$

Quindi, quando i due spazi vettoriali sono distinti, possiamo supporre che il prodotto tensoriale sia anche commutativo[4]. Nel caso in cui i due spazi siano uguali, cioè $\mathbf{F} = \mathbf{E}$, si ha un'involuzione $\iota : \mathbf{E} \otimes \mathbf{E} \longleftrightarrow \mathbf{E} \otimes \mathbf{E}$.

Il campo $\mathbb{K}$ si comporta come un'identità per il prodotto tensoriale in quanto esistono isomorfismi

$$\mathbf{E} \otimes \mathbb{K} \longleftrightarrow \mathbf{E} \longleftrightarrow \mathbb{K} \otimes \mathbf{E}$$

che sono associati alla moltiplicazione di un vettore per uno scalare. In questo contesto non ha alcun senso parlare di inverso rispetto al prodotto tensoriale.

Esiste anche un isomorfismo

$$\mathbf{E} \otimes \left\{\vec{0}\right\} \longleftrightarrow \left\{\vec{0}\right\} \longleftrightarrow \left\{\vec{0}\right\} \otimes \mathbf{E}$$

[4] In particolare, si ha che $\mathbf{F} \otimes \mathbf{E}^*$ è isomorfo a $\mathbf{E}^* \otimes \mathbf{F}$.

Se consideriamo quattro spazi vettoriali $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ e due applicazioni lineari $\psi_1 \in \mathbf{L}(\mathbf{E}_1; \mathbf{F}_1)$ e $\psi_2 \in \mathbf{L}(\mathbf{E}_2; \mathbf{F}_2)$, possiamo definire il prodotto tensoriale $\psi_1 \otimes \psi_2 \in \mathbf{L}(\mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2; \mathbf{F}_1 \otimes \mathbf{F}_2)$. A partire dalla funzione bilineare $\sigma := \otimes \circ (\psi_1 \times \psi_2) : \mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2 \longleftrightarrow \mathbf{F}_1 \otimes \mathbf{F}_2$ definita da $\sigma(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}}) = \psi_1(\vec{\boldsymbol{x}}) \otimes \psi_2(\vec{\boldsymbol{y}})$ è sufficiente definire $\psi_1 \otimes \psi_2 = \hat{\sigma}$. Oltre ad essere una funzione bilineare e associativa, il prodotto tensoriale di applicazioni lineari gode di alcune proprietà notevoli, tra cui:

1. $\mathrm{id}_{\mathbf{E}} \otimes \mathrm{id}_{\mathbf{F}} = \mathrm{id}_{\mathbf{E} \otimes \mathbf{F}}$,

2. $(\psi_1 \otimes \psi_2) \circ (\varphi_1 \otimes \varphi_2) = (\psi_1 \circ \varphi_1) \otimes (\psi_2 \circ \varphi_2)$,

3. se ψ_1 e ψ_2 sono invertibili, allora anche $\psi_1 \otimes \psi_2$ è invertibile e si ha $(\psi_1 \otimes \psi_2)^{-1} = \psi_1^{-1} \otimes \psi_2^{-1}$.

1.7 Basi nei prodotti tensoriali di spazi vettoriali

Date una base ordinata $\mathfrak{b} = (\vec{\boldsymbol{e}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{e}}_n) \in \mathcal{B}(\mathbf{E})$ ed una base ordinata $\mathfrak{g} = (\vec{\boldsymbol{f}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{f}}_m) \in \mathcal{B}(\mathbf{F})$ si dimostra facilmente che i prodotti tensoriali $\vec{\boldsymbol{e}}_i \otimes \vec{\boldsymbol{f}}_\alpha$ sono linearmente indipendenti e generano il prodotto tensoriale $\mathbf{E} \otimes \mathbf{F}$. Cioè, l'insieme finito $\{\boldsymbol{z}_{i\alpha} = \vec{\boldsymbol{e}}_i \otimes \vec{\boldsymbol{f}}_\alpha \,|\, i = 1 \ldots n, \alpha = 1, \ldots m\}$ è una base non ordinata dello spazio vettoriale $\mathbf{E} \otimes \mathbf{F}$ ed ogni lemento $\boldsymbol{t} \in \mathbf{E} \otimes \mathbf{F}$ si può scrivere im maniera unica come combinazione lineare $\boldsymbol{t} = t^{i\alpha} \vec{\boldsymbol{e}}_i \otimes \vec{\boldsymbol{f}}_\alpha$. Le componenti $t^{j\beta}$ sono definite da:

$$t^{j\beta} = \boldsymbol{t}(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^j, \underline{\boldsymbol{\varphi}}^\beta) = (\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^j \otimes \underline{\boldsymbol{\varphi}}^\beta)(\boldsymbol{t})$$

Analogamente, ogni $\boldsymbol{\zeta} \in \mathbf{E}^* \otimes \mathbf{F}^*$ si può scrivere im maniera unica come combinazione lineare $\boldsymbol{\zeta} = \zeta_{i\alpha} \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^i \otimes \underline{\boldsymbol{\varphi}}^\alpha$. Le componenti $\zeta_{j\beta}$ sono definite da:

$$\zeta_{j\beta} = \boldsymbol{\zeta}(\vec{\boldsymbol{e}}_j, \vec{\boldsymbol{f}}_\beta) = (\vec{\boldsymbol{e}}_j \otimes \vec{\boldsymbol{f}}_\beta)(\boldsymbol{\zeta}) \equiv \Big(\iota_{\mathbf{E}}(\vec{\boldsymbol{e}}_j) \otimes \iota_{\mathbf{F}}(\vec{\boldsymbol{f}}_\beta)\Big)(\boldsymbol{\zeta})$$

1.8 Tensori su uno spazio vettoriale

Dato uno spazio vettoriale $\mathbf{E}$, la potenza tensoriale k-esima $\mathbf{E} \otimes \cdots \otimes \mathbf{E}$ verrà indicata con $\mathbf{E}^{\otimes k}$; quando $\dim(\mathbf{E}) > 0$ definiamo $\mathbf{E}^{\otimes 0} = \mathbb{K}$. Esiste un isomorfismo canonico

$$(\mathbf{E}^{\otimes k})^* \longleftrightarrow (\mathbf{E}^*)^{\otimes k}$$

Lo spazio vettoriale $T^k_0(\mathbf{E}) = \mathbf{E}^{\otimes k}$ viene detto spazio dei *tensori k volte controvarianti* sullo spazio vettoriale $\mathbf{E}$. Lo spazio $T^k_0(\mathbf{E})$ è generato da tutti i prodotti tensoriali $\vec{\boldsymbol{x}}_1 \otimes \cdots \otimes \vec{\boldsymbol{x}}_k$ con $\vec{\boldsymbol{x}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{x}}_k \in \mathbf{E}$.

Lo spazio vettoriale $T^0_k(\mathbf{E}) = (\mathbf{E}^*)^{\otimes k}$ viene detto spazio dei *tensori k volte covarianti* sullo spazio vettoriale $\mathbf{E}$. Lo spazio $T^0_k(\mathbf{E})$ è generato da tutti i prodotti tensoriali $\underline{\boldsymbol{\omega}}^1 \otimes \cdots \otimes \underline{\boldsymbol{\omega}}^k$ con $\underline{\boldsymbol{\omega}}^1, \ldots, \underline{\boldsymbol{\omega}}^k \in \mathbf{E}^*$ ed è isomorfo a $\big(T^k_0(\mathbf{E})\big)^*$.

Lo spazio $T^r_s(\mathbf{E}) = T^r_0(\mathbf{E}) \otimes T^0_s(\mathbf{E}) = \mathbf{E}^{\otimes r} \otimes (\mathbf{E}^*)^{\otimes s}$ viene detto spazio dei *tensori k volte controvarianti ed s volte covarianti* sullo spazio vettoriale $\mathbf{E}$. Esso è generato da tutti i prodotti tensoriali del tipo $(\vec{\boldsymbol{x}}_1 \otimes \cdots \otimes \vec{\boldsymbol{x}}_r) \otimes (\underline{\boldsymbol{\omega}}^1 \otimes \cdots \otimes \underline{\boldsymbol{\omega}}^s)$ con $\vec{\boldsymbol{x}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{x}}_r \in \mathbf{E}$ e con $\underline{\boldsymbol{\omega}}^1, \ldots, \underline{\boldsymbol{\omega}}^s \in \mathbf{E}^*$. Esistono alcuni isomorfismi canonici tra cui: $T^r_s(\mathbf{E}) \longleftrightarrow (T^s_r(\mathbf{E}))^*$, $T^r_s(\mathbf{E}) \longleftrightarrow \mathbf{L}(T^s_0(\mathbf{E}); T^r_0(\mathbf{E}))$.

Si possono definire operazioni di prodotto tensoriale fra tensori controvarianti, fra tensori covarianti e fra tensori misti

$$\otimes : T_0^p(\mathbf{E}) \times T_0^r(\mathbf{E}) \longrightarrow T_0^{p+r}(\mathbf{E})$$

$$\otimes : T_q^0(\mathbf{E}) \times T_s^0(\mathbf{E}) \longrightarrow T_{q+s}^0(\mathbf{E})$$

$$\otimes : T_q^p(\mathbf{E}) \times T_s^r(\mathbf{E}) \longrightarrow T_{q+s}^{p+r}(\mathbf{E})$$

Il prodotto tensoriale viene definito estendendo per bilinearità la funzione

$$((\vec{\boldsymbol{x}}_1 \otimes \cdots \otimes \vec{\boldsymbol{x}}_p) \otimes (\underline{\boldsymbol{\omega}}^1 \otimes \cdots \otimes \underline{\boldsymbol{\omega}}^q), (\vec{\boldsymbol{y}}_1 \otimes \cdots \otimes \vec{\boldsymbol{y}}_r) \otimes (\underline{\boldsymbol{\sigma}}^1 \otimes \cdots \otimes \underline{\boldsymbol{\sigma}}^s))$$

$$\longmapsto$$

$$(\vec{\boldsymbol{x}}_1 \otimes \cdots \otimes \vec{\boldsymbol{x}}_p \otimes \vec{\boldsymbol{y}}_1 \otimes \cdots \otimes \vec{\boldsymbol{y}}_r) \otimes (\underline{\boldsymbol{\omega}}^1 \otimes \cdots \otimes \underline{\boldsymbol{\omega}}^q \otimes \underline{\boldsymbol{\sigma}}^1 \otimes \cdots \otimes \underline{\boldsymbol{\sigma}}^s)$$

Sfruttando alcuni degli isomorfismi visti nei paragrafi precedenti, gli spazi di tensori sullo spazio vettoriale $\mathbf{E}$ possono essere rappresentati da spazi di applicazioni multilineari:

$$\begin{aligned} T_0^r(\mathbf{E}) &= \mathbf{L}_r(\mathbf{E}^*; \mathbb{K}) \\ T_s^0(\mathbf{E}) &= \mathbf{L}_s(\mathbf{E}; \mathbb{K}) \\ T_s^r(\mathbf{E}) &= \mathbf{L}_{r,s}(\mathbf{E}^*, \mathbf{E}; \mathbb{K}) \end{aligned}$$

dove $\mathbf{L}_{r,s}(\mathbf{E}, \mathbf{F}; \mathbf{G})$ indica lo spazio delle applicazioni multilineari di $r+s$ variabili in cui le prime r variabili stanno in $\mathbf{E}$ e le ultime s variabili stanno in $\mathbf{F}$.

Il prodotto tensoriale di una funzione multilineare $\underline{\boldsymbol{\alpha}} \in \mathbf{L}_{p,q}(\mathbf{E}^*, \mathbf{E}; \mathbb{K})$ e di una funzione multilineare $\underline{\boldsymbol{\beta}} \in \mathbf{L}_{r,s}(\mathbf{E}^*, \mathbf{E}; \mathbb{K})$ è la funzione multilineare di $p+r+q+s$ variabili definita da

$$(\underline{\boldsymbol{\alpha}} \otimes \underline{\boldsymbol{\beta}})(\underline{\boldsymbol{\omega}}^1, \dots, \underline{\boldsymbol{\omega}}^{p+r}, \vec{\boldsymbol{x}}_1, \dots, \vec{\boldsymbol{x}}_{q+s}) = \underline{\boldsymbol{\alpha}}(\underline{\boldsymbol{\omega}}^1, \dots, \underline{\boldsymbol{\omega}}^p, \vec{\boldsymbol{x}}_1, \dots, \vec{\boldsymbol{x}}_q)\, \underline{\boldsymbol{\beta}}(\underline{\boldsymbol{\omega}}^{p+1}, \dots, \underline{\boldsymbol{\omega}}^{p+r}, \vec{\boldsymbol{x}}_{q+1}, \dots, \vec{\boldsymbol{x}}_{q+s})$$

Le componenti di un tensore $\underline{\boldsymbol{\alpha}} \in \mathbf{L}_{p,q}(\mathbf{E}^*, \mathbf{E}; \mathbb{K})$ rispetto ad una base $\mathfrak{b} = (\vec{\boldsymbol{e}}_1, \dots, \vec{\boldsymbol{e}}_n) \in \mathcal{B}(\mathbf{E})$ sono i numeri definiti da:

$$\alpha^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = \underline{\boldsymbol{\alpha}}(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{i_1}, \dots, \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{i_p}, \vec{\boldsymbol{e}}_{j_1}, \dots, \vec{\boldsymbol{e}}_{j_q})$$

Per ricostruire il tensore a partire dalle sue componenti rispetto alla base $\mathfrak{b}$ basta verificare che

$$\underline{\boldsymbol{\alpha}} = \alpha^{a_1 \dots a_p}_{c_1 \dots c_q}\, \vec{\boldsymbol{e}}_{a_1} \otimes \cdots \otimes \vec{\boldsymbol{e}}_{a_p} \otimes \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{c_1} \otimes \cdots \otimes \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{c_q}$$

Le componenti del prodotto tensoriale $\underline{\boldsymbol{\alpha}} \otimes \underline{\boldsymbol{\beta}}$ sono allora definite da:

$$(\underline{\boldsymbol{\alpha}} \otimes \underline{\boldsymbol{\beta}})^{i_1 \dots i_p h_1 \dots h_r}_{j_1 \dots j_q k_1 \dots k_s} = \alpha^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}\, \beta^{h_1 \dots h_r}_{k_1 \dots k_s}$$

Se consideriamo una seconda base $\mathfrak{b}' = (\vec{\boldsymbol{e}}'_1, \dots, \vec{\boldsymbol{e}}'_n) \in \mathcal{B}(\mathbf{E})$, le componenti ${\alpha'}^{i'_1 \dots i'_p}_{j'_1 \dots j'_q}$ del tensore $\underline{\boldsymbol{\alpha}} \in T^p_q(\mathbf{E})$ rispetto alla base $\mathfrak{b}'$ sono legate alle conponenti $\alpha^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ del tensore $\underline{\boldsymbol{\alpha}}$ rispetto alla prima base $\mathfrak{b}$ dalle seguenti formule

$${\alpha'}^{i'_1 \dots i'_p}_{j'_1 \dots j'_q} = \bar{A}^{i'_1}_{i_1} \cdots \bar{A}^{i'_p}_{i_p}\, \alpha^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}\, A^{j_1}_{j'_1} \cdots A^{j_q}_{j'_q}$$

1.9 Applicazioni multilineari simmetriche o antisimmetriche

In questa sezione definiremo i concetti e le funzioni per tensori covarianti. Con le opportune modifiche, si possono definire gli stessi concetti e le stesse funzioni per i tensori controvarianti e per quelli misti.

Indicheremo con $\mathfrak{S}_k$ il gruppo delle permutazioni dell'intervallo $[1, \ldots, k]$ di numeri naturali. Le permutazioni sono funzioni biiettive $\sigma : [1, \ldots, k] \longrightarrow [1, \ldots, k]$, l'operazione di prodotto è la composizione di funzioni, l'identità è la funzione identità e l'inversa è la funzione inversa. Il gruppo $\mathfrak{S}_k$ è un gruppo finito con $k!$ elementi[5].

Esiste un omomorfismo di gruppi $\operatorname{sgn} : \mathfrak{S}_k \longrightarrow \{-1, 1\}$ detto *segno* della permutazione. Per calcolare il segno di una permutazione bisogna calcolare quanti scambi di elementi occorrono per riordinare i numeri $[\sigma(1), \ldots, \sigma(k)]$ in ordine strettamente crescente (e non importa che sia il numero minimo possibile). Per ogni permutazione $\sigma \in \mathfrak{S}_k$, il numero di scambi necessario sarà sempre un numero pari oppure un numero dispari. Se il numero di scambi è pari diremo che σ è una permutazione *pari* e che $\operatorname{sgn}(\sigma) = 1$, altrimenti diremo che σ è una permutazione *dispari* e che $\operatorname{sgn}(\sigma) = -1$.

FINE LEZIONE 2 MMdFC (2023-03-02 ore 14:00 – 16:00)

[5] Ricordiamo che quando $k > 1$, il numero $k!$ è un numero pari.

Riferimenti bibliografici

[1] G. C. Shephard: *Spazi vettoriali di dimensioni finite*; Collana Poliedro, Edizioni Cremonese, Roma, 1969.

[2] S. Mac Lane, G. Birkhoff: *Algèbre, Tome 1, Structures fondamentales*; Gauthier–Villars, Paris, 1970.

[3] S. Mac Lane, G. Birkhoff: *Algèbre, Tome 2, Les grands théorèmes*; Gauthier–Villars, Paris, 1970.

[4] W. Gröbner: *Gruppi, anelli e algebre di Lie*; Collana Poliedro, Edizioni Cremonese, Roma, 1975.