1.13 Determinanti, simboli di Levi–Civita e delta di Kronecker generalizzate

Dalle formule per calcolare i determinanti di matrici quadrate possiamo definire i determinanti di tensori che stanno in uno dei tre spazi $T^1_1(\mathbf{E})$, $T^0_2(\mathbf{E})$ e $T^2_0(\mathbf{E})$. Fissiamo, per il momento, una base $\mathfrak{b} = (\vec{\boldsymbol{e}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{e}}_n) \in \mathcal{B}(\mathbf{E})$ nello spazio vettoriale $\mathbf{E}$.

Prima di cominciare, definiamo i simboli di Levi–Civita covarianti $\varepsilon_{i_1\ldots i_n}$ e controvarianti $\varepsilon^{i_1\ldots i_n}$ dicendo che sono antisimmetrici e che, quando gli indici sono tutti distinti, il loro valore è il segno della permutazione $(1, \ldots, n) \mapsto (i_1, \ldots, i_n)$. In particolare, vale l'identità: $\varepsilon^{i_1\cdots i_n}\varepsilon_{i_1\ldots i_n} = n!$. Definendo la delta di Kronecker generalizzata con k indici come il tensore $\delta \in A^k_0(\mathbf{E}) \otimes A^0_k(\mathbf{E}) = A^k_k(\mathbf{E})$ di componenti

$$\delta^{i_1\ldots i_k}_{j_1\ldots j_k} = k!\,\delta^{[i_1}_{j_1}\cdots\delta^{i_k]}_{j_k} = k!\,\delta^{i_1}_{[j_1}\cdots\delta^{i_k}_{j_k]} = k!\,\delta^{[i_1}_{[j_1}\cdots\delta^{i_k]}_{j_k]},$$

deduciamo che

$$\delta^{i_1\ldots i_k}_{j_1\ldots j_k} = \det\begin{pmatrix} \delta^{i_1}_{j_1} & \cdots & \delta^{i_1}_{j_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta^{i_k}_{j_1} & \cdots & \delta^{i_k}_{j_k} \end{pmatrix}$$

In particolare, valgono le seguenti identità

1. se $k > n$, si ha $\delta^{i_1\ldots i_k}_{j_1\ldots j_k} \equiv 0$

2. se $k = n$ si ha $\delta^{i_1\ldots i_n}_{j_1\ldots j_n} \equiv \varepsilon^{i_1\ldots i_n}\,\varepsilon_{j_1\ldots j_n}$

3. se $k < n$ si ha $\delta^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots j_k} \equiv \frac{1}{(n-k)!} \varepsilon^{i_1 \dots i_k a_{k+1} \dots a_n} \, \varepsilon_{j_1 \dots j_k a_{k+1} \dots a_n} \equiv \frac{1}{(n-k)!} \delta^{i_1 \dots i_k a_{k+1} \dots a_n}_{j_1 \dots j_k a_{k+1} \dots a_n}$

Dato un tensore $\boldsymbol{t} \in T^1_1(\mathbf{E})$, consideriamo le sue componenti t^i_j rispetto alla base $\mathfrak{b}$. Il determinante della matrice delle componenti di $\boldsymbol{t}$ si può scrivere in due modi:

$$\det(t^a_b) = \varepsilon_{i_1 \dots i_n} \, t^{i_1}_1 \cdots t^{i_n}_n \qquad \text{oppure} \qquad \det(t^a_b) = t^1_{j_1} \cdots t^n_{j_n} \, \varepsilon^{j_1 \dots j_n}$$

Dalle proprietà dei determinanti di matrici rispetto allo scambio di righe o di colonne deduciamo che

$$\varepsilon_{i_1 \dots i_n} \, t^{i_1}_{j_1} \cdots t^{i_n}_{j_n} = \det(t^a_b) \, \varepsilon_{j_1 \dots j_n} \qquad \text{oppure} \qquad t^{i_1}_{j_1} \cdots t^{i_n}_{j_n} \, \varepsilon^{j_1 \dots j_n} = \det(t^a_b) \, \varepsilon^{i_1 \dots i_n}$$

e, quindi, il determinante si può scrivere come segue

$$\det(t^a_b) = \frac{1}{n!} \varepsilon_{i_1 \dots i_n} \, t^{i_1}_{j_1} \cdots t^{i_n}_{j_n} \, \varepsilon^{j_1 \dots j_n}$$

Si dimostra facilmente che il risultato non dipende dalla base scelta in $\mathbf{E}$. Infatti si ha:

$$\det(t'^{a'}_{b'}) = \det(\bar{A}^{a'}_a t^a_b A^b_{b'}) = \det(t^a_b) \det(\bar{A}^{s'}_s) \det(A^r_{r'}) = \det(t^a_b) \, .$$

Diremo che lo scalare che abbiamo ottenuto è il determinante $\det(\boldsymbol{t})$ del tensore $\boldsymbol{t} \in T^1_1(\mathbf{E}) \equiv \mathbf{E} \otimes \mathbf{E}^* \equiv \mathbf{L}(\mathbf{E}; \mathbf{E})$. Il determinante ha le seguenti proprietà: $\det(\boldsymbol{t}_1 \circ \boldsymbol{t}_2) = \det(\boldsymbol{t}_1) \det(\boldsymbol{t}_2)$ e $\det(\mathrm{id}_{\mathbf{E}}) = 1$. Quando $\det(\boldsymbol{t}) \neq 0$ possiamo definire il tensore inverso $\boldsymbol{t}^{-1}$ di $\boldsymbol{t}$. Definendo il tensore aggiunto $\mathrm{adj}(\boldsymbol{t}) \in T^1_1(\mathbf{E})$ come il tensore di componenti

$$\tilde{t}^a_b = \frac{1}{(n-1)!} \varepsilon_{b i_2 \dots i_n} \, t^{i_2}_{j_2} \cdots t^{i_n}_{j_n} \, \varepsilon^{a j_2 \dots j_n}$$

deduciamo che

$$\boldsymbol{t} \circ \mathrm{adj}(\boldsymbol{t}) = \det(\boldsymbol{t})\, \mathrm{id}_{\mathbf{E}} = \mathrm{adj}(\boldsymbol{t}) \circ \boldsymbol{t} \Longrightarrow \boldsymbol{t}^{-1} = \frac{1}{\det(\boldsymbol{t})} \mathrm{adj}(\boldsymbol{t})$$

Dimostrazione. Considerando il prodotto $\boldsymbol{t} \circ \mathrm{adj}(\boldsymbol{t})$ si ha

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{t} \circ \mathrm{adj}(\boldsymbol{t}))^c_b &= t^c_a \tilde{t}^a_b \\
&= t^c_a \left(\tfrac{1}{(n-1)!} \varepsilon_{b i_2 \dots i_n}\, t^{i_2}_{j_2} \cdots t^{i_n}_{j_n}\, \varepsilon^{a j_2 \dots j_n} \right) \\
&= \tfrac{1}{(n-1)!} \varepsilon_{b\, i_2 \dots i_n} \left(t^c_a\, t^{i_2}_{j_2} \cdots t^{i_n}_{j_n}\, \varepsilon^{a j_2 \dots j_n} \right) \\
&= \tfrac{1}{(n-1)!} \varepsilon_{b\, i_2 \dots i_n} \left(\det(t^r_s)\, \varepsilon^{c\, i_2 \dots i_n} \right) \\
&= \det(t^r_s) \left(\tfrac{1}{(n-1)!} \varepsilon_{b\, i_2 \dots i_n}\, \varepsilon^{c\, i_2 \dots i_n} \right) \\
&= \det(t^r_s)\, \delta^c_b
\end{aligned}$$

Analogamente, per il prodotto $\mathrm{adj}(\boldsymbol{t}) \circ \boldsymbol{t}$ si ha

$$\begin{aligned}
(\mathrm{adj}(\boldsymbol{t}) \circ \boldsymbol{t})^a_c &= \tilde{t}^a_b\, t^b_c \\
&= \left(\tfrac{1}{(n-1)!} \varepsilon_{b i_2 \dots i_n}\, t^{i_2}_{j_2} \cdots t^{i_n}_{j_n}\, \varepsilon^{a j_2 \dots j_n} \right) t^b_c \\
&= \tfrac{1}{(n-1)!} \left(\varepsilon_{b i_2 \dots i_n}\, t^b_c\, t^{i_2}_{j_2} \cdots t^{i_n}_{j_n} \right) \varepsilon^{a j_2 \dots j_n} \\
&= \tfrac{1}{(n-1)!} \left(\varepsilon_{c j_2 \dots j_n}\, \det(t^r_s) \right) \varepsilon^{a j_2 \dots j_n} \\
&= \det(t^r_s) \left(\tfrac{1}{(n-1)!} \varepsilon_{c j_2 \dots j_n}\, \varepsilon^{a j_2 \dots j_n} \right) \\
&= \det(t^r_s)\, \delta^a_c
\end{aligned}$$

■

Dato un tensore $\boldsymbol{t} \in T^0_2(\mathbf{E})$ valgono delle formule analoghe:

$$\varepsilon^{i_1\dots i_n}\, t_{i_1j_1}\cdots t_{i_nj_n} = \det(t_{ab})\,\varepsilon_{j_1\dots j_n} \qquad \text{oppure} \qquad t_{i_1j_1}\cdots t_{i_nj_n}\,\varepsilon^{j_1\dots j_n} = \det(t_{ab})\,\varepsilon_{i_1\dots i_n}$$

$$\det(t_{ab}) = \tfrac{1}{n!}\varepsilon^{i_1\dots i_n}\, t_{i_1j_1}\cdots t_{i_nj_n}\,\varepsilon^{j_1\dots j_n}\ ,\ \tilde{t}^{ab} = \tfrac{1}{(n-1)!}\varepsilon^{bi_2\dots i_n}\, t_{i_2j_2}\cdots t_{i_nj_n}\,\varepsilon^{aj_2\dots j_n}\ ,\ \boldsymbol{t}^{-1} = \frac{1}{\det(\boldsymbol{t})}\mathrm{adj}(\boldsymbol{t})$$

La differenza consiste nel fatto che il determinante $\det(\boldsymbol{t})$ non è invariante per trasformazione di base, ma si trasforma come un oggetto che chiameremo densità scalare di peso 2

$$\det(t'_{a'b'}) = \det(t_{ab}A^a_{a'}A^b_{b'}) = \det(t_{ab})\det(A^r_{r'})^2.$$

Il segno del determinante è determinato, ma il valore no. L'oggetto $\mathrm{adj}(\boldsymbol{t})$ è una densità tensoriale di peso 2:

$$\tilde{t}'^{a'b'}A^a_{a'}A^b_{b'} = \det(A^r_{r'})^2\tilde{t}^{ab} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \tilde{t}'^{a'b'} = \det(A^r_{r'})^2\tilde{t}^{ab}\bar{A}^{a'}_a\bar{A}^{b'}_b.$$

Quando esiste, l'inverso è un tensore $\boldsymbol{t}^{-1} \in T^2_0(\mathbf{E})$.

Dimostrazione. Considerando il prodotto $\boldsymbol{t}\circ\mathrm{adj}(\boldsymbol{t})$ si ha

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{t}\circ\mathrm{adj}(\boldsymbol{t}))^b_c &= t_{ca}\tilde{t}^{ab}\\
&= t_{ca}\left(\tfrac{1}{(n-1)!}\varepsilon^{bi_2\dots i_n}\, t_{i_2j_2}\cdots t_{i_nj_n}\,\varepsilon^{aj_2\dots j_n}\right)\\
&= \tfrac{1}{(n-1)!}\varepsilon^{b\,i_2\dots i_n}\left(t_{ca}\, t_{i_2j_2}\cdots t_{i_nj_n}\,\varepsilon^{aj_2\dots j_n}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \tfrac{1}{(n-1)!}\varepsilon^{b\,i_2\dots i_n}\left(\det(t_{rs})\,\varepsilon_{c\,i_2\dots i_n}\right)\\
&= \det(t_{rs})\,\left(\tfrac{1}{(n-1)!}\varepsilon^{b\,i_2\dots i_n}\,\varepsilon_{c\,i_2\dots i_n}\right)\\
&= \det(t_{rs})\,\delta^b_c
\end{aligned}
$$

Analogamente, per il prodotto $\mathrm{adj}(\boldsymbol{t})\circ\boldsymbol{t}$ si ha

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{adj}(\boldsymbol{t})\circ\boldsymbol{t})^a_c &= \tilde{t}^{ab}\,t_{bc}\\
&= \left(\tfrac{1}{(n-1)!}\varepsilon^{bi_2\dots i_n}\,t_{i_2j_2}\cdots t_{i_nj_n}\,\varepsilon^{aj_2\dots j_n}\right)\,t_{bc}\\
&= \tfrac{1}{(n-1)!}\left(\varepsilon^{bi_2\dots i_n}\,t_{bc}\,t_{i_2j_2}\cdots t_{i_nj_n}\right)\,\varepsilon^{aj_2\dots j_n}\\
&= \tfrac{1}{(n-1)!}\left(\varepsilon_{cj_2\dots j_n}\,\det(t_{rs})\right)\,\varepsilon^{aj_2\dots j_n}\\
&= \det(t_{rs})\,\left(\tfrac{1}{(n-1)!}\varepsilon_{cj_2\dots j_n}\,\varepsilon^{aj_2\dots j_n}\right)\\
&= \det(t_{rs})\,\delta^a_c
\end{aligned}
$$

■

Dato un tensore $\boldsymbol{t}\in T^2_0(\mathbf{E})$ valgono delle formule analoghe.

$$
\varepsilon_{i_1\dots i_n}\,t^{i_1j_1}\cdots t^{i_nj_n} = \det(t^{ab})\,\varepsilon^{j_1\dots j_n} \qquad \text{oppure} \qquad t^{i_1j_1}\cdots t^{i_nj_n}\,\varepsilon_{j_1\dots j_n} = \det(t^{ab})\,\varepsilon^{i_1\dots i_n}
$$

$$
\det(t^{ab}) = \tfrac{1}{n!}\varepsilon_{i_1\dots i_n}\,t^{i_1j_1}\cdots t^{i_nj_n}\,\varepsilon_{j_1\dots j_n}\ ,\quad \tilde{t}_{ab} = \tfrac{1}{(n-1)!}\varepsilon_{bi_2\dots i_n}\,t^{i_2j_2}\cdots t^{i_nj_n}\,\varepsilon_{aj_2\dots j_n}\ ,\quad \boldsymbol{t}^{-1} = \frac{1}{\det(\boldsymbol{t})}\mathrm{adj}(\boldsymbol{t})
$$

La differenza consiste nel fatto che il determinante $\det(\boldsymbol{t})$ non è invariante per trasformazione di base, ma si trasforma come un oggetto che chiameremo densità scalare di peso -2:

$$\det(t'^{a'b'}) = \det(\bar{A}^{a'}_a \bar{A}^{b'}_b t^{ab}) = \det(t^{ab}) \det(\bar{A}^{r'}_r)^2 = \det(t^{ab}) \det(A^r_{r'})^{-2}.$$

Il segno del determinante è determinato, ma il valore no. L'oggetto $\mathrm{adj}(\boldsymbol{t})$ sarà una densità tensoriale di peso -2:

$$\tilde{t}'_{a'b'} \bar{A}^{a'}_a \bar{A}^{b'}_b = \det(\bar{A}^{r'}_r)^2 \tilde{t}_{ab} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \tilde{t}'_{a'b'} = \det(A^r_{r'})^{-2} \tilde{t}_{ab} A^a_{a'} A^b_{b'}.$$

Quando esiste, l'inverso è un tensore $\boldsymbol{t}^{-1} \in T^0_2(\mathbf{E})$.

Dimostrazione. Considerando il prodotto $\boldsymbol{t} \circ \mathrm{adj}(\boldsymbol{t})$ si ha

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{t} \circ \mathrm{adj}(\boldsymbol{t}))^c_b &= t^{ca} \tilde{t}_{ab} \\
&= t^{ca} \left(\tfrac{1}{(n-1)!} \varepsilon_{b i_2 \ldots i_n} t^{i_2 j_2} \cdots t^{i_n j_n} \varepsilon_{a j_2 \ldots j_n} \right) \\
&= \tfrac{1}{(n-1)!} \varepsilon_{b\, i_2 \ldots i_n} \left(t^{ca} t^{i_2 j_2} \cdots t^{i_n j_n} \varepsilon_{a j_2 \ldots j_n} \right) \\
&= \tfrac{1}{(n-1)!} \varepsilon_{b\, i_2 \ldots i_n} \left(\det(t^{rs}) \varepsilon^{c\, i_2 \ldots i_n} \right) \\
&= \det(t^{rs}) \left(\tfrac{1}{(n-1)!} \varepsilon_{b\, i_2 \ldots i_n} \varepsilon^{c\, i_2 \ldots i_n} \right) \\
&= \det(t^{rs})\, \delta^c_b
\end{aligned}$$

Analogamente, per il prodotto $\mathrm{adj}(\boldsymbol{t}) \circ \boldsymbol{t}$ si ha

$$(\mathrm{adj}(\boldsymbol{t}) \circ \boldsymbol{t})^c_a = \tilde{t}_{ab}\, t^{bc}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\tfrac{1}{(n-1)!}\varepsilon_{bi_2\dots i_n}\, t^{i_2j_2}\cdots t^{i_nj_n}\, \varepsilon_{aj_2\dots j_n}\right) t^{bc} \\
&= \tfrac{1}{(n-1)!}\left(\varepsilon_{bi_2\dots i_n}\, t^{bc}\, t^{i_2j_2}\cdots t^{i_nj_n}\right) \varepsilon_{aj_2\dots j_n} \\
&= \tfrac{1}{(n-1)!}\left(\varepsilon^{cj_2\dots j_n}\ \det(t^{rs})\right) \varepsilon_{aj_2\dots j_n} \\
&= \det(t^{rs}) \left(\tfrac{1}{(n-1)!}\varepsilon^{cj_2\dots j_n}\, \varepsilon_{aj_2\dots j_n}\right) \\
&= \det(t^{rs})\, \delta^c_a
\end{aligned}
$$

■

1.14 Invarianti fondamentali per tensori di tipo $(1,1)$.

In questa sezione ricorderemo alcune semplici nozioni riguardanti gli invarianti dei tensori $\boldsymbol{t} \in T^1_1(\mathbf{E})$ su uno spazio vettoriale $\mathbf{E}$ di dimensione $n > 1$. La proprietà fondamentale è il teorema Hamilton–Cayley.

Teorema 1.1 (Hamilton–Cayley)**.** *Dato un tensore $\boldsymbol{A} = A^j_i \vec{\boldsymbol{e}}_j \otimes \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^i \in T^1_1(\mathbf{E})$ allora vale la seguente identità:*

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\tau_k(\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}^{n-k} = (-1)^n\boldsymbol{A}^n + (-1)^{n-1}\tau_1(\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}^{n-1} + \cdots + \tau_n(\boldsymbol{A})\boldsymbol{I} = 0$$

dove $\boldsymbol{I} = id_{\mathbf{E}}$ e gli invarianti $\tau_i(\boldsymbol{A})$ sono i coefficienti del polinomio caratteristico:

$$\det(\boldsymbol{A} + \lambda\boldsymbol{I}) = \sum_{k=0}^{n} \tau_k(\boldsymbol{A})\lambda^{n-k}$$

Osservazione 1.1. Gli invarianti $\tau_i(\boldsymbol{A})$ si possono definire nel seguente modo:

$$
\begin{aligned}
\tau_0(\boldsymbol{A}) &= 1 \\
\tau_1(\boldsymbol{A}) &= \delta^r_s A^s_r = \langle \boldsymbol{A} \rangle \\
\tau_2(\boldsymbol{A}) &= \frac{1}{2!}\delta^{r_1 r_2}_{s_1 s_2} A^{s_1}_{r_1} A^{s_2}_{r_2} = \frac{1}{2}\left(\langle \boldsymbol{A}\rangle^2 - \langle \boldsymbol{A}^2\rangle\right) \\
\tau_3(\boldsymbol{A}) &= \frac{1}{3!}\delta^{r_1 r_2 r_3}_{s_1 s_2 s_3} A^{s_1}_{r_1} A^{s_2}_{r_2} A^{s_3}_{r_3} = \frac{1}{6}\left(\langle \boldsymbol{A}\rangle^3 - 3\langle \boldsymbol{A}^2\rangle\langle \boldsymbol{A}\rangle + 2\langle \boldsymbol{A}^3\rangle\right) \\
\tau_4(\boldsymbol{A}) &= \frac{1}{4!}\delta^{r_1 r_2 r_3 r_4}_{s_1 s_2 s_3 s_4} A^{s_1}_{r_1} A^{s_2}_{r_2} A^{s_3}_{r_3} A^{s_4}_{r_4} = \frac{1}{24}\left(\langle \boldsymbol{A}\rangle^4 + 3\langle \boldsymbol{A}^2\rangle^2 - 6\langle \boldsymbol{A}^2\rangle\langle \boldsymbol{A}\rangle^2 + 8\langle \boldsymbol{A}^3\rangle\langle \boldsymbol{A}\rangle - 6\langle \boldsymbol{A}^4\rangle\right) \\
&\dots \\
\tau_n(\boldsymbol{A}) &= \frac{1}{n!}\delta^{r_1 \dots r_n}_{s_1 \dots s_n} A^{s_1}_{r_1} \dots A^{s_n}_{r_n} = \det(\boldsymbol{A})
\end{aligned}
$$

dove $\langle \boldsymbol{M} \rangle := \mathrm{tr}(\boldsymbol{M})$ indica la traccia del tensore $\boldsymbol{M} \in T^1_1(\mathbf{E})$

Osservazione 1.2. Le quantità da calcolare sono gli scalari

$$\tau_0(\boldsymbol{A}) := 1, \quad \tau_k(\boldsymbol{A}) := \frac{1}{k!}\delta^{r_1 \dots r_k}_{s_1 \dots s_k} A^{s_1}_{r_1} \cdot \dots \cdot A^{s_k}_{r_k}$$

ed i tensori di tipo $(1,1)$ di componenti

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_0(\boldsymbol{A})^a_c := \delta^a_c, \quad \hat{\boldsymbol{\alpha}}_k(\boldsymbol{A})^a_c := \frac{1}{k!}\delta^{a r_1 \dots r_k}_{c s_1 \dots s_k} A^{s_1}_{r_1} \cdot \dots \cdot A^{s_k}_{r_k}$$

Se $n = \dim(\mathbf{E})$ è la dimensione dello spazio vettoriale, per gli scalari τ valgono le identità:

$$\tau_1(\boldsymbol{A}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}), \quad \tau_n(\boldsymbol{A}) = \det(\boldsymbol{A}) \qquad \text{e} \qquad \tau_k(\boldsymbol{A}) = 0 \quad \forall k > n$$

mentre per i tensori $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ valgono le identità:

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_n(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{0} \quad \text{(Hamilton–Cayley)} \qquad \text{e} \qquad \hat{\boldsymbol{\alpha}}_k(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{0} \quad \forall k > n$$

Si verifica facilmente che vale l'identità

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A} \circ \hat{\boldsymbol{\alpha}}_k(\boldsymbol{A})) = (k+1)\tau_{k+1}(\boldsymbol{A})$$

Sviluppando le delta di Kronecker generalizzate rispetto alla prima riga, o colonna, si dimostra che

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{k+1}(\boldsymbol{A}) = \tau_{k+1}(\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} \circ \hat{\boldsymbol{\alpha}}_k(\boldsymbol{A})$$

Ricordando che $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{n-1}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{adj}(\boldsymbol{A})$, si riottiene l'identità

$$\boldsymbol{A} \circ \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{n-1}(\boldsymbol{A}) = \det(\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{I}$$

che è semplicemente l'identità di Hamilton–Cayley. Per ricorrenza, si dimostra che

$$\tau_k(\boldsymbol{A}) = -\frac{1}{k}\sum_{s=0}^{k-1}\left[(-1)^{k-s}\tau_s(\boldsymbol{A})\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^{k-s})\right]$$

Per calcolare praticamente le espressioni dei tensori $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_k$ e degli scalari τ_k ho usato le due procedure

```
Tau := proc (k, x)

local r;

option remember;
```

```
if k < 0 then RETURN(0) fi;
if k = 0 then RETURN(1) fi;
- sum('Tau(r,x)*(-1)^(k-r)*Tr(x^(k-r))','r'=0..k-1)/k;
expand(%);
end;

Alpha := proc (k, x)
option remember;
if k < 0 then RETURN(0) fi;
if k = 0 then RETURN(1) fi;
- x * Alpha(k-1,x) + Tau(k,x);
expand(%);
end;
```

definite con Maple.

1.15 Prodotti scalari

Un prodotto scalare $\mathbf{g}$ su uno spazio vettoriale $\mathbf{E}$ è un tensore doppio simmetrico non degenere; cioè: $\mathbf{g} \in S^0_2(\mathbf{E})$ è tale che per le componenti g_{rs} di $\mathbf{g}$ rispetto ad una base di $\mathbf{E}$ sia $\det(g_{rs}) \neq 0$. In questo caso, il tensore inverso $\mathbf{g}^{-1}$ avrà componenti simmetriche che indicheremo con g^{rs}. Le componenti g^{rs} sono definite implicitamente dall'identità[9]

$$g_{ik}\, g^{ks} = \delta_i^s = g^{sk}\, g_{ki}$$

Quando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$,

- un prodotto scalare è detto *euclideo* se per ogni $\vec{\boldsymbol{x}} \in \mathbf{E} \setminus \{\vec{0}\}$ si ha $\mathbf{g}(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{x}}) > 0$ (definito positivo), oppure $\mathbf{g}(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{x}}) < 0$ (definito negativo);
- il prodotto scalare è detto *pseudoeuclideo* se esistono vettori di *genere luce*, cioè vettori $\vec{\boldsymbol{x}} \in \mathbf{E} \setminus \{\vec{0}\}$ tali che $\mathbf{g}(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{x}}) = 0$.

Per i prodotti scalari si possono definire le *basi ortonormali*: una base $(\vec{\boldsymbol{e}}_1, \dots, \vec{\boldsymbol{e}}_n)$ di $\mathbf{E}$ viene detta *ortonormale* se la matrice delle componenti g_{rs} è diagonale e tutte le componenti sulla diagonale valgono 1 o -1:

$$(g_{rs})^2 = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad r \neq s \\ 1 & \text{se} \quad r = s \end{cases}$$

La segnatura di un prodotto scalare verrà indicata con una coppia (p, q), con $p + q = n$, dove p indica il numero dei vettori della base ortonormale che hanno quadrato 1 e q indica il numero dei vettori della base ortonormale che hanno quadrato -1.

[9] Più tutte le altre identità che si deducono da fatto che le componenti g_{ik} e g^{ks} sono simmetriche.

Osserviamo che quando $n = 4$ le segnature possibili sono $(4,0)$, $(3,1)$, $(2,2)$, $(1,3)$ e $(0,4)$. Se il prodotto scalare $\mathbf{g}$ ha segnatura $(4,0)$ o $(0,4)$ allora è un prodotto scalare euclideo. Se la segnatura è $(3,1)$ o $(1,3)$ il prodotto scalare viene detto *lorentziano*[10]. Infine i prodotti scalari *kleiniani* sono quelli con segnatura $(2,2)$.

Dato un prodotto scalare $\mathbf{g}$ su uno spazio vettoriale $\mathbf{E}$, si definisce una funzione lineare invertibile $(\cdot)^\flat : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{E}^*$:

$$(\vec{\boldsymbol{x}})^\flat = \mathbf{g}(\vec{\boldsymbol{x}}, \cdot) \equiv \iota_{\vec{\boldsymbol{x}}}(\mathbf{g})$$

In componenti si ha:

$$\vec{\boldsymbol{x}} = x^i \vec{\boldsymbol{e}}_i \quad \wedge \quad \mathbf{g} = g_{ij} \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^i \otimes \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^j \qquad \Longrightarrow \qquad (\vec{\boldsymbol{x}})^\flat = g_{ij} x^i \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^j = x^*_j \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^j$$

Siccome esiste il tensore inverso $\mathbf{g}^{-1} = g^{rs} \vec{\boldsymbol{e}}_r \otimes \vec{\boldsymbol{e}}_s \in S^2_0(\mathbf{E})$, la funzione inversa di $(\cdot)^\flat$ è la funzione $(\cdot)^\sharp : \mathbf{E}^* \longrightarrow \mathbf{E}$:

$$(\underline{\boldsymbol{\omega}})^\sharp = \mathbf{g}^{-1}(\underline{\boldsymbol{\omega}}, \cdot) \equiv \iota_{\underline{\boldsymbol{\omega}}}(\mathbf{g}^{-1})$$

In componenti si ha:

$$\underline{\boldsymbol{\omega}} = \omega_i \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^i \quad \wedge \quad \mathbf{g}^{-1} = g^{ij} \vec{\boldsymbol{e}}_i \otimes \vec{\boldsymbol{e}}_j \qquad \Longrightarrow \qquad (\underline{\boldsymbol{\omega}})^\sharp = g^{ij} \omega_i \vec{\boldsymbol{e}}_j = \omega^j_* \vec{\boldsymbol{e}}_j$$

Un prodotto scalare $\mathbf{g} \in S^0_2(\mathbf{E})$ permette di definire un prodotto degli isomorfismi lineari $(\cdot)^\flat : T^p_q(\mathbf{E}) \longrightarrow T^0_{p+q}(\mathbf{E})$ e $(\cdot)^\sharp : T^p_q(\mathbf{E}) \longrightarrow T^{p+q}_0(\mathbf{E})$ ed un prodotto scalare $T^p_q(\mathbf{E}) \times T^p_q(\mathbf{E}) \longrightarrow \mathbb{K}$.

[10]Ricordando che $\det(g_{rs})$ ha un segno ben definito, basta verificare che sia $\det(g_{rs}) < 0$.

La funzione $(\cdot)^\flat$ è definita da

$$(\underline{\boldsymbol{\alpha}})^\flat(\vec{\boldsymbol{x}}_1,\ldots,\vec{\boldsymbol{x}}_p,\vec{\boldsymbol{y}}_1,\ldots,\vec{\boldsymbol{y}}_q) := \underline{\boldsymbol{\alpha}}((\vec{\boldsymbol{x}}_1)^\flat,\ldots,(\vec{\boldsymbol{x}}_p)^\flat,\vec{\boldsymbol{y}}_1,\ldots,\vec{\boldsymbol{y}}_q)$$

ed in componenti si ha

$$\underline{\boldsymbol{\alpha}} = \alpha^{a_1\ldots a_p}_{c_1\ldots c_q}\,\vec{\boldsymbol{e}}_{a_1}\otimes\cdots\otimes\vec{\boldsymbol{e}}_{a_p}\,\otimes\,\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{c_1}\otimes\cdots\otimes\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{c_q} \quad\Longrightarrow\quad \underline{\boldsymbol{\alpha}}^\flat = \alpha^{*\ \ldots *}_{r_1\ldots r_p c_1\ldots c_q}\,\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{r_1}\otimes\cdots\otimes\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{r_p}\,\otimes\,\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{c_1}\otimes\cdots\otimes\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{c_q}$$

dove si è posto

$$\alpha^{*\ \ldots *}_{r_1\ldots r_p c_1\ldots c_q} = g_{r_1a_1}\cdots g_{r_pa_p}\alpha^{a_1\ldots a_p}_{c_1\ldots c_q}$$

La funzione $(\cdot)^\sharp$ è definita da

$$(\underline{\boldsymbol{\alpha}})^\sharp(\underline{\boldsymbol{\omega}}_1,\ldots,\underline{\boldsymbol{\omega}}_p,\underline{\boldsymbol{\sigma}}_1,\ldots,\underline{\boldsymbol{\sigma}}_q) := \underline{\boldsymbol{\alpha}}(\underline{\boldsymbol{\omega}}_1,\ldots,\underline{\boldsymbol{\omega}}_p,(\underline{\boldsymbol{\sigma}}_1)^\sharp,\ldots,(\underline{\boldsymbol{\sigma}}_q)^\sharp)$$

ed in componenti si ha

$$\underline{\boldsymbol{\alpha}} = \alpha^{a_1\ldots a_p}_{c_1\ldots c_q}\,\vec{\boldsymbol{e}}_{a_1}\otimes\cdots\otimes\vec{\boldsymbol{e}}_{a_p}\,\otimes\,\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{c_1}\otimes\cdots\otimes\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{c_q} \quad\Longrightarrow\quad \underline{\boldsymbol{\alpha}}^\sharp = \alpha^{a_1\ldots a_p s_1\ldots s_q}{}_{*\ \ldots *}\,\vec{\boldsymbol{e}}_{a_1}\otimes\cdots\otimes\vec{\boldsymbol{e}}_{a_p}\,\otimes\,\vec{\boldsymbol{e}}_{s_1}\otimes\cdots\otimes\vec{\boldsymbol{e}}_{s_q}$$

dove si è posto

$$\alpha^{a_1\ldots a_p s_1\ldots s_q}{}_{*\ \ldots *} = \alpha^{a_1\ldots a_p}_{c_1\ldots c_q}g^{c_1s_1}\cdots g^{c_ps_p}$$

Ricordando che $(T^{p+q}_0(\mathbf{E}))^* = T^0_{p+q}(\mathbf{E})$, il prodotto scalare è definito da

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}(\underline{\boldsymbol{\alpha}},\underline{\boldsymbol{\beta}}) &= \underline{\boldsymbol{\alpha}}^\flat(\underline{\boldsymbol{\beta}}^\sharp) &&= \alpha^{r_1\ldots r_p s_1\ldots s_q}{}_{*\ \ldots *}\,\beta^{*\ \ldots *}_{r_1\ldots r_p s_1\ldots s_q} \\
&= \underline{\boldsymbol{\beta}}^\flat(\underline{\boldsymbol{\alpha}}^\sharp) &&= \beta^{r_1\ldots r_p s_1\ldots s_q}{}_{*\ \ldots *}\,\alpha^{*\ \ldots *}_{r_1\ldots r_p s_1\ldots s_q}
\end{aligned}$$

o, equivalentemente, da

$$\mathbf{g}(\underline{\boldsymbol{\alpha}}, \underline{\boldsymbol{\beta}}) = \underline{\boldsymbol{\alpha}}^{\sharp}(\underline{\boldsymbol{\beta}}^{\flat}) = \underline{\boldsymbol{\beta}}^{\sharp}(\underline{\boldsymbol{\alpha}}^{\flat})\,.$$

1.16 Dualità di Hodge

Su uno spazio vettoriale reale $\mathbf{E}$ di dimensione n, orientato e dotato di un prodotto scalare $\mathbf{g}$, possiamo definire una funzione lineare invertibile $*_p : A^0_p(\mathbf{E}) \longrightarrow A^0_{n-p}(\mathbf{E})$ con la seguente formula

$$\forall \underline{\boldsymbol{\alpha}}, \underline{\boldsymbol{\beta}} \in A^0_p(\mathbf{E}) \qquad \underline{\boldsymbol{\alpha}} \wedge *_p(\underline{\boldsymbol{\beta}}) = \frac{1}{p!}\mathbf{g}(\underline{\boldsymbol{\alpha}}, \underline{\boldsymbol{\beta}})\underline{\boldsymbol{\omega}}_{\mathbf{g}}$$

dove si è posto

$$\underline{\boldsymbol{\omega}}_{\mathbf{g}} = \sqrt{|g|}\,\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^1 \wedge \cdots \wedge \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^n = \sqrt{|g|}\,\left(\frac{1}{n!}\varepsilon_{i_1\ldots i_n}\,\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{i_1} \wedge \cdots \wedge \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{i_n}\right) = \sqrt{|g|}\,\left(\varepsilon_{i_1\ldots i_n}\,\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{i_1} \otimes \cdots \otimes \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{i_n}\right)$$

e $g = \det(g_{ac})$. La funzione multilineare antisimmetrica $\underline{\boldsymbol{\omega}}_{\mathbf{g}} \in A^0_n(\mathbf{E}) \setminus \{0\}$ è indipendente dalla base $(\vec{\boldsymbol{e}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{e}}_n)$ orientata positivamente. Fissata una base orientata positivamente $(\vec{\boldsymbol{e}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{e}}_n)$, definiamo

$$\begin{array}{lllll}
\underline{\boldsymbol{\sigma}} & = \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^1 \wedge \cdots \wedge \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^n & = \dfrac{1}{n!}\varepsilon_{i_1\dots i_n}\,\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{i_1} \wedge \cdots \wedge \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{i_n} & = \varepsilon_{i_1\dots i_n}\,\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{i_1} \otimes \cdots \otimes \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{i_n} \\
\underline{\boldsymbol{\sigma}}_j & = \iota_{\vec{e}_j}(\underline{\boldsymbol{\sigma}}) & = \dfrac{1}{(n-1)!}\varepsilon_{ji_2\dots i_n}\,\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{i_2} \wedge \cdots \wedge \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{i_n} & = \varepsilon_{ji_2\dots i_n}\,\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{i_2} \otimes \cdots \otimes \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{i_n} \\
\underline{\boldsymbol{\sigma}}_{jk} & = \iota_{\vec{e}_k}(\underline{\boldsymbol{\sigma}}_j) & = \dfrac{1}{(n-2)!}\varepsilon_{jki_3\dots i_n}\,\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{i_3} \wedge \cdots \wedge \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{i_n} & = \varepsilon_{jki_3\dots i_n}\,\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{i_3} \otimes \cdots \otimes \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{i_n} \\
\vdots & & & \\
\underline{\boldsymbol{\sigma}}_{j_1\dots j_p} & = \iota_{\vec{e}_{j_p}}(\underline{\boldsymbol{\sigma}}_{j_1\dots j_{p-1}}) & = \dfrac{1}{(n-p)!}\varepsilon_{j_1\dots j_p i_{p+1}\dots i_n}\,\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{i_{p+1}} \wedge \cdots \wedge \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{i_n} & = \varepsilon_{j_1\dots j_p i_{p+1}\dots i_n}\,\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{i_{p+1}} \otimes \cdots \otimes \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{i_n} \\
\vdots & & & \\
\underline{\boldsymbol{\sigma}}_{j_1\dots j_n} & & & = \varepsilon_{j_1\dots j_n}\,1
\end{array}$$

Osserviamo che $\underline{\boldsymbol{\sigma}}$ è una base di $A^0_n(\mathbf{E})$, $(\underline{\boldsymbol{\sigma}}_i)$ è una base di $A^0_{n-1}(\mathbf{E})$ mentre i $\underline{\boldsymbol{\sigma}}_{i_1\dots i_p}$ generano gli spazi $A^0_{n-p}(\mathbf{E})$. Si dimostra facilmente che $\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^i \wedge \underline{\boldsymbol{\sigma}}_j = \delta^i_j\,\underline{\boldsymbol{\sigma}}$ e che, in generale, si ha

$$\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{i_1\dots i_p} \wedge \underline{\boldsymbol{\sigma}}_{j_1\dots j_p} = \delta^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_p}\,\underline{\boldsymbol{\sigma}}$$

dove si è posto

$$\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{i_1\dots i_p} = \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{i_1} \wedge \cdots \wedge \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{i_p}$$

Siamo adesso in grado di dimostrare che

$$*_p(\underline{\boldsymbol{\beta}}) = *_p\left(\frac{1}{p!}\,\beta_{j_1\dots j_p}\,\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{j_1} \wedge \cdots \wedge \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{j_p}\right) = \frac{1}{p!}\,\sqrt{|g|}\,\beta_{*\ \ \dots *}^{i_1\dots i_p}\ \underline{\boldsymbol{\sigma}}_{i_1\dots i_p} \tag{1}$$

Infatti si ha

$$\begin{aligned}
\underline{\boldsymbol{\alpha}} \wedge *_p(\underline{\boldsymbol{\beta}}) &= \left(\frac{1}{p!}\,\alpha_{i_1\ldots i_p}\,\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{i_1}\wedge\cdots\wedge\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{i_p}\right)\wedge *_p\left(\frac{1}{p!}\,\beta_{j_1\ldots j_p}\,\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{j_1}\wedge\cdots\wedge\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{j_p}\right)\\
&= \left(\frac{1}{p!}\,\alpha_{i_1\ldots i_p}\,\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{i_1\cdots i_p}\right)\wedge\left(\frac{1}{p!}\sqrt{|g|}\,\beta_{*\ \ldots *}^{j_1\ldots j_p}\ \underline{\boldsymbol{\sigma}}_{j_1\ldots j_p}\right)\\
&= \frac{1}{p!}\,\frac{1}{p!}\,\alpha_{i_1\ldots i_p}\,\beta_{*\ \ldots *}^{j_1\ldots j_p}\ \sqrt{|g|}\,\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{i_1\cdots i_p}\wedge\underline{\boldsymbol{\sigma}}_{j_1\ldots j_p}\\
&= \frac{1}{p!}\,\frac{1}{p!}\,\alpha_{i_1\ldots i_p}\,\beta_{*\ \ldots *}^{j_1\ldots j_p}\ \sqrt{|g|}\,\delta^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_p}\,\underline{\boldsymbol{\sigma}}\\
&= \frac{1}{p!}\,\alpha_{i_1\ldots i_p}\,\beta_{*\ \ldots *}^{i_1\ldots i_p}\ \sqrt{|g|}\,\underline{\boldsymbol{\sigma}}\\
&= \frac{1}{p!}\mathbf{g}(\underline{\boldsymbol{\alpha}},\underline{\boldsymbol{\beta}})\underline{\boldsymbol{\omega}}_{\mathbf{g}}
\end{aligned}$$

Dal'equazione (1) si deduce che la funzione inversa di $*_p$ è

$$(*_p)^{-1} = \operatorname{sgn}(g)\,(-1)^{p(n-p)}\ *_{n-p}\ .$$

Infatti si ha

$$\begin{aligned}
*_{n-p}\left(*_p\left(\underline{\boldsymbol{\beta}}\right)\right) &= *_{n-p}\left(*_p\left(\underline{\boldsymbol{\beta}}\right)\right)\\
&= *_{n-p}\left(*_p\left(\frac{1}{p!}\,\beta_{j_1\ldots j_p}\,\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{j_1}\wedge\cdots\wedge\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{j_p}\right)\right)\\
&= *_{n-p}\left(\frac{1}{p!}\sqrt{|g|}\,\beta_{*\ \ldots *}^{i_1\ldots i_p}\ \underline{\boldsymbol{\sigma}}_{i_1\ldots i_p}\right)\\
&= *_{n-p}\left(\frac{1}{p!}\sqrt{|g|}\,\beta_{*\ \ldots *}^{i_1\ldots i_p}\ \frac{1}{(n-p)!}\varepsilon_{i_1\ldots i_p j_{p+1}\ldots j_n}\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{j_{p+1}}\wedge\cdots\wedge\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{j_n}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{(n-p)!}\sqrt{|g|}\left(\frac{1}{p!}\sqrt{|g|}\,\beta^{i_1\dots i_p}_{*\ \dots *}\,\varepsilon_{i_1\dots i_p *\ \dots *}^{\qquad\ \ j_{p+1}\dots j_n}\right)\underline{\boldsymbol{\sigma}}_{j_{p+1}\dots j_n}\\
&= \frac{|g|}{(n-p)!}\left(\frac{1}{p!}\,\beta_{i_1\dots i_p}\varepsilon^{i_1\dots i_p j_{p+1}\dots j_n}_{*\ \dots *\ \ *\ \ \dots *}\right)\frac{1}{p!}\varepsilon_{j_{p+1}\dots j_n k_1\dots k_p}\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{k_1}\wedge\dots\wedge\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{k_p}\\
&= (-1)^{p(n-p)}\frac{|g|}{(n-p)!}\left(\frac{1}{p!}\,\beta_{i_1\dots i_p}\varepsilon^{i_1\dots i_p j_{p+1}\dots j_n}_{*\ \dots *\ \ *\ \ \dots *}\right)\frac{1}{p!}\varepsilon_{k_1\dots k_p j_{p+1}\dots j_n}\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{k_1}\wedge\dots\wedge\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{k_p}\\
&= (-1)^{p(n-p)}\frac{|g|/g}{(n-p)!}\left(\frac{1}{p!}\,\beta_{i_1\dots i_p}\varepsilon^{i_1\dots i_p j_{p+1}\dots j_n}\right)\frac{1}{p!}\varepsilon_{k_1\dots k_p j_{p+1}\dots j_n}\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{k_1}\wedge\dots\wedge\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{k_p}\\
&= (-1)^{p(n-p)}\frac{|g|}{g}\frac{1}{p!}\frac{1}{p!}\,\beta_{i_1\dots i_p}\left(\frac{1}{(n-p)!}\varepsilon^{i_1\dots i_p j_{p+1}\dots j_n}\varepsilon_{k_1\dots k_p j_{p+1}\dots j_n}\right)\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{k_1}\wedge\dots\wedge\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{k_p}\\
&= (-1)^{p(n-p)}\frac{|g|}{g}\frac{1}{p!}\frac{1}{p!}\,\beta_{i_1\dots i_p}\delta^{i_1\dots i_p}_{k_1\dots k_p}\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{k_1}\wedge\dots\wedge\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{k_p}\\
&= (-1)^{p(n-p)}\frac{|g|}{g}\frac{1}{p!}\,\beta_{k_1\dots k_p}\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{k_1}\wedge\dots\wedge\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{k_p}\\
&= (-1)^{p(n-p)}\frac{|g|}{g}\underline{\boldsymbol{\beta}}
\end{aligned}
$$

FINE LEZIONE 4 MMdFC (2023-03-07 ore 16:00 – 18:00)

Riferimenti bibliografici

[1] G. C. Shephard: *Spazi vettoriali di dimensioni finite*; Collana Poliedro, Edizioni Cremonese, Roma, 1969.

[2] S. Mac Lane, G. Birkhoff: *Algèbre, Tome 1, Structures fondamentales*; Gauthier–Villars, Paris, 1970.

[3] S. Mac Lane, G. Birkhoff: *Algèbre, Tome 2, Les grands théorèmes*; Gauthier–Villars, Paris, 1970.

[4] W. Gröbner: *Gruppi, anelli e algebre di Lie*; Collana Poliedro, Edizioni Cremonese, Roma, 1975.