1.17 Algebra esterna di uno spazio vettoriale di dimensione finita

Consideriamo lo spazio vettoriale

$$\Lambda(\mathbf{E}) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} A_k^0(\mathbf{E}) = \bigoplus_{k=0}^{n} A_k^0(\mathbf{E}) = \mathbb{K} \oplus \mathbf{E}^* \oplus A_2^0(\mathbf{E}) \oplus \ldots \oplus A_n^0(\mathbf{E})$$

dove $n = \dim(\mathbf{E})$. Lo spazio vettoriale $\Lambda(\mathbf{E})$ ha dimensione $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

L'operazione $\wedge$ si può estendere ad un'operazione binaria interna $\wedge : \Lambda(\mathbf{E}) \times \Lambda(\mathbf{E}) \longrightarrow \Lambda(\mathbf{E})$ definita da

$$(\underline{\boldsymbol{\alpha}}_0, \underline{\boldsymbol{\alpha}}_1, \underline{\boldsymbol{\alpha}}_2, \ldots, \underline{\boldsymbol{\alpha}}_n) \wedge (\underline{\boldsymbol{\beta}}_0, \underline{\boldsymbol{\beta}}_1, \underline{\boldsymbol{\beta}}_2, \ldots, \underline{\boldsymbol{\beta}}_n) =$$
$$(\underline{\boldsymbol{\alpha}}_0 \wedge \underline{\boldsymbol{\beta}}_0, \underline{\boldsymbol{\alpha}}_0 \wedge \underline{\boldsymbol{\beta}}_1 + \underline{\boldsymbol{\alpha}}_1 \wedge \underline{\boldsymbol{\beta}}_0, \underline{\boldsymbol{\alpha}}_0 \wedge \underline{\boldsymbol{\beta}}_2 + \underline{\boldsymbol{\alpha}}_1 \wedge \underline{\boldsymbol{\beta}}_1 + \underline{\boldsymbol{\alpha}}_2 \wedge \underline{\boldsymbol{\beta}}_0, \ldots, \textstyle\sum_{r+s=n} \underline{\boldsymbol{\alpha}}_r \wedge \underline{\boldsymbol{\beta}}_s)$$

o, equivalentemente,

$$\left(\bigoplus_{p=0}^{n} \underline{\boldsymbol{\alpha}}_p\right) \wedge \left(\bigoplus_{q=0}^{n} \underline{\boldsymbol{\beta}}_q\right) = \bigoplus_{r=0}^{n} \left(\sum_{p+q=r} \underline{\boldsymbol{\alpha}}_p \wedge \underline{\boldsymbol{\beta}}_q\right)$$

che chiameremo ancora prodotto esterno. Il prodotto esterno, oltre ad essere bilineare, è anche associativo. Con questa operazione, lo spazio vettoriale $\Lambda(\mathbf{E})$ viene detto *algebra esterna* dello spazio vettoriale $\mathbf{E}$. L'algebra esterna $\Lambda(\mathbf{E})$ è un'algebra gradata, associativa e con elemento unità.

L'operazione di prodotto interno con un vettore $\vec{\boldsymbol{x}}$ si può estendere ad una funzione lineare $\iota_{\vec{\boldsymbol{x}}} : \Lambda(\mathbf{E}) \longrightarrow \Lambda(\mathbf{E})$ definita da:

$$\iota_{\vec{\boldsymbol{x}}}\left((\underline{\boldsymbol{\beta}}_0, \underline{\boldsymbol{\beta}}_1, \underline{\boldsymbol{\beta}}_2, \ldots, \underline{\boldsymbol{\beta}}_n)\right) = (\iota_{\vec{\boldsymbol{x}}}(\underline{\boldsymbol{\beta}}_1), \iota_{\vec{\boldsymbol{x}}}(\underline{\boldsymbol{\beta}}_2), \ldots, \iota_{\vec{\boldsymbol{x}}}(\underline{\boldsymbol{\beta}}_n), 0)$$

Se consideriamo anche un prodotto scalare $\mathbf{g} \in S^0_2(\mathbf{E})$, possiamo considerare la funzione lineare $\vec{\boldsymbol{x}}^\flat \wedge (\cdot) : \Lambda(\mathbf{E}) \longrightarrow \Lambda(\mathbf{E})$ definita da:

$$\vec{\boldsymbol{x}}^\flat \wedge \Big((\underline{\boldsymbol{\beta}}_0, \underline{\boldsymbol{\beta}}_1, \underline{\boldsymbol{\beta}}_2, \dots, \underline{\boldsymbol{\beta}}_n) \Big) = (0, \vec{\boldsymbol{x}}^\flat \wedge \underline{\boldsymbol{\beta}}_0, \vec{\boldsymbol{x}}^\flat \wedge \underline{\boldsymbol{\beta}}_1, \dots, \vec{\boldsymbol{x}}^\flat \wedge \underline{\boldsymbol{\beta}}_{n-1})$$

Queste due operazioni ci permettono di definire un operatore lineare $\gamma(\vec{\boldsymbol{x}}) : \Lambda(\mathbf{E}) \longrightarrow \Lambda(\mathbf{E})$

$$\gamma(\vec{\boldsymbol{x}})(\cdot) = \iota_{\vec{\boldsymbol{x}}}(\cdot) + \vec{\boldsymbol{x}}^\flat \wedge (\cdot)$$

che ha la seguente proprietà

$$\gamma(\vec{\boldsymbol{x}}) \circ \gamma(\vec{\boldsymbol{y}}) + \gamma(\vec{\boldsymbol{y}}) \circ \gamma(\vec{\boldsymbol{x}}) = 2\, \mathbf{g}(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}})\, \mathrm{id}_{\Lambda(\mathbf{E})}\,.$$

1.18 Algebre di Lie di dimensione finita

Un'algebra di Lie di dimensione finita è uno spazio vettoriale di dimensione finita $\mathbf{E}$ sul quale è definita un'operazione bilineare antisimmetrica

$$\begin{array}{rcccc} [\cdot,\cdot] & : & \mathbf{E} \times \mathbf{E} & \longrightarrow & \mathbf{E} \\ & & (\vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\boldsymbol{w}}) & \longmapsto & [\vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\boldsymbol{w}}] \end{array}$$

che soddisfa anche all'*identità di Jacobi*

$$[\vec{\boldsymbol{u}}, [\vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\boldsymbol{w}}]] + [\vec{\boldsymbol{w}}, [\vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{v}}]] + [\vec{\boldsymbol{v}}, [\vec{\boldsymbol{w}}, \vec{\boldsymbol{u}}]] = \vec{0} \qquad \forall\, \vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\boldsymbol{w}} \in \mathbf{E}$$

o, equivalentemente,

$$[\vec{\boldsymbol{x}}, [\vec{\boldsymbol{y}}, \vec{\boldsymbol{z}}]] - [\vec{\boldsymbol{y}}, [\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{z}}]] = [[\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}}], \vec{\boldsymbol{z}}] \qquad \forall\, \vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}}, \vec{\boldsymbol{z}} \in \mathbf{E} \tag{2}$$

L'operazione $[\cdot,\cdot]$, che viene detta *commutatore*, definisce un tensore $[\cdot,\cdot] \in \mathbf{E} \otimes A_2^0(\mathbf{E}) = A_2^1(\mathbf{E}) \subset T_2^1(\mathbf{E})$. Se non è banale ($[\vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\boldsymbol{w}}] = \vec{0}\ \forall\, \vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\boldsymbol{w}} \in \mathbf{E}$), il commutatore $[\cdot,\cdot]$ è un'operazione di prodotto non associativo sullo spazio vettoriale $\mathbf{E}$.

L'identità di Jacobi (2) permette di dimostrare che la funzione

$$\begin{array}{rcccc} \mathrm{ad} & : & \mathbf{E} & \longrightarrow & L(\mathbf{E};\mathbf{E}) \\ & & \vec{\boldsymbol{v}} & \longmapsto & [\vec{\boldsymbol{v}}, \cdot] \end{array}$$

è un morfismo di algebre di Lie perché

$$\mathrm{ad}(\vec{\boldsymbol{x}}) \circ \mathrm{ad}(\vec{\boldsymbol{y}}) - \mathrm{ad}(\vec{\boldsymbol{y}}) \circ \mathrm{ad}(\vec{\boldsymbol{x}}) = \mathrm{ad}([\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}}])$$

Nello spazio $L(\mathbf{E};\mathbf{E})$ c'è un prodotto scalare naturale definito da $(A,B) \longmapsto \mathrm{tr}(A \circ B)$. Tale prodotto scalare induce un campo di tensori $K \in S_2^0(\mathbf{E})$, la forma di Killing, che è un prodotto scalare se e solo se l'algebra di Lie $(\mathbf{E}, [\cdot,\cdot])$ è semisemplice (in particolare se l'algebra di Lie è semplice).

Esempio 1.2. [Algebre di Lie da algebre associative]

Se in uno spazio vettoriale $\mathbf{E}$ è definito un prodotto bilineare ed associativo

$$\begin{array}{rcccc} m & : & \mathbf{E} \times \mathbf{E} & \longrightarrow & \mathbf{E} \\ & & (\vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\boldsymbol{w}}) & \longmapsto & m(\vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\boldsymbol{w}}) \end{array}$$

(cioè se $(\mathbf{E}, +, m)$ è un'algebra associativa) si può definire una struttura di algebra di Lie definendo

$$[\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}}] := m(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}}) - m(\vec{\boldsymbol{y}}, \vec{\boldsymbol{x}})$$

Infatti si ha

$$\begin{aligned}
[\vec{\boldsymbol{x}}, [\vec{\boldsymbol{y}}, \vec{\boldsymbol{z}}]] &= m(\vec{\boldsymbol{x}}, [\vec{\boldsymbol{y}}, \vec{\boldsymbol{z}}]) - m([\vec{\boldsymbol{y}}, \vec{\boldsymbol{z}}], \vec{\boldsymbol{x}}) \\
&= m(\vec{\boldsymbol{x}}, m(\vec{\boldsymbol{y}}, \vec{\boldsymbol{z}}) - m(\vec{\boldsymbol{z}}, \vec{\boldsymbol{y}})) - m(m(\vec{\boldsymbol{y}}, \vec{\boldsymbol{z}}) - m(\vec{\boldsymbol{z}}, \vec{\boldsymbol{y}}), \vec{\boldsymbol{x}}) \\
&= m(\vec{\boldsymbol{x}}, m(\vec{\boldsymbol{y}}, \vec{\boldsymbol{z}})) - m(\vec{\boldsymbol{x}}, m(\vec{\boldsymbol{z}}, \vec{\boldsymbol{y}})) - m(m(\vec{\boldsymbol{y}}, \vec{\boldsymbol{z}}), \vec{\boldsymbol{x}}) + m(m(\vec{\boldsymbol{z}}, \vec{\boldsymbol{y}}), \vec{\boldsymbol{x}}) \\
&= m(\vec{\boldsymbol{x}}, m(\vec{\boldsymbol{y}}, \vec{\boldsymbol{z}})) - m(\vec{\boldsymbol{x}}, m(\vec{\boldsymbol{z}}, \vec{\boldsymbol{y}})) - m(\vec{\boldsymbol{y}}, m(\vec{\boldsymbol{z}}, \vec{\boldsymbol{x}})) + m(\vec{\boldsymbol{z}}, m(\vec{\boldsymbol{y}}, \vec{\boldsymbol{x}}))
\end{aligned}$$

da cui si deduce che

$$[\vec{\boldsymbol{x}}, [\vec{\boldsymbol{y}}, \vec{\boldsymbol{z}}]] + [\vec{\boldsymbol{z}}, [\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}}]] + [\vec{\boldsymbol{y}}, [\vec{\boldsymbol{z}}, \vec{\boldsymbol{x}}]] \equiv 0$$

Se il prodotto è anche commutativo si ha una struttura di algebra di Lie banale.

Esempio 1.3. [Spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ col prodotto vettoriale]

Sullo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ col solito prodotto scalare euclideo e la solita orientazione si definisce il prodotto vettoriale $\vec{\boldsymbol{x}} \times \vec{\boldsymbol{y}}$ che non è una moltiplicazione associativa, ma definisce una struttura di algebra di Lie.

Si ha infatti

$$\vec{\boldsymbol{x}} \times (\vec{\boldsymbol{y}} \times \vec{\boldsymbol{z}}) = -(\vec{\boldsymbol{x}} \cdot \vec{\boldsymbol{y}})\vec{\boldsymbol{z}} + \vec{\boldsymbol{y}}(\vec{\boldsymbol{x}} \cdot \vec{\boldsymbol{z}})$$

da cui si deduce che

$$\vec{\boldsymbol{x}} \times (\vec{\boldsymbol{y}} \times \vec{\boldsymbol{z}}) + \vec{\boldsymbol{z}} \times (\vec{\boldsymbol{x}} \times \vec{\boldsymbol{y}}) + \vec{\boldsymbol{y}} \times (\vec{\boldsymbol{z}} \times \vec{\boldsymbol{x}}) \equiv 0$$

o, equivalentemente,

$$\vec{\boldsymbol{x}} \times (\vec{\boldsymbol{y}} \times \vec{\boldsymbol{z}}) - \vec{\boldsymbol{y}} \times (\vec{\boldsymbol{x}} \times \vec{\boldsymbol{z}}) = (\vec{\boldsymbol{x}} \times \vec{\boldsymbol{y}}) \times \vec{\boldsymbol{z}}$$

1.18.1 Costanti di struttura

Scelta una base $(\vec{\boldsymbol{e}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{e}}_n) \in \mathcal{B}(\mathbf{E})$ il commutatore viene individuato univocamente dalle componenti c^i_{jk} del tensore $[\cdot,\cdot] \in A^1_2(\mathbf{E}) \subset T^1_2(\mathbf{E})$. Infatti si ha

$$[\vec{\boldsymbol{e}}_j, \vec{\boldsymbol{e}}_k] = \vec{\boldsymbol{e}}_i \, c^i_{jk}$$

e, quindi,

$$\begin{aligned}
[\cdot,\cdot] &= \vec{\boldsymbol{e}}_i \otimes c^i_{jk} \otimes \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^j \otimes \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^k \\
&= \vec{\boldsymbol{e}}_i \otimes \frac{1}{2} c^i_{jk} \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^j \wedge \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^k \\
[\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}}] &= [x^j \vec{\boldsymbol{e}}_j, y^k \vec{\boldsymbol{e}}_k] \\
&= \vec{\boldsymbol{e}}_i \, c^i_{jk} x^j y^k
\end{aligned}$$

Le componenti c^i_{jk} vengono dette costanti di struttura dell'algebra di Lie rispetto alla base $(\vec{\boldsymbol{e}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{e}}_n)$ e, oltre ad essere antisimmetriche rispetto agli indici covarianti, devono anche soddisfare all'identità

$$3\, c^k_{a[i} c^a_{rs]} = c^k_{ai} c^a_{rs} + c^k_{as} c^a_{ir} + c^k_{ar} c^a_{si} = 0 \tag{3}$$

che è l'equivalente dell'identità di Jacobi.

Rappresentando le funzioni lineari $\mathrm{ad}(\vec{\boldsymbol{x}}) : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{E}$ attraverso le componenti rispetto ad una base $(\vec{\boldsymbol{e}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{e}}_n) \in \mathcal{B}(\mathbf{E})$, si ottiene

$$\mathrm{ad}(\vec{\boldsymbol{x}}) = \vec{\boldsymbol{e}}_i \otimes c^i_{jk} x^j \otimes \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^k$$

Il prodotto $\mathrm{ad}(\vec{\boldsymbol{x}}) \circ \mathrm{ad}(\vec{\boldsymbol{y}})$ è

$$\begin{aligned}
\mathrm{ad}(\vec{\boldsymbol{x}}) \circ \mathrm{ad}(\vec{\boldsymbol{y}}) &= (\vec{\boldsymbol{e}}_i \otimes c^i_{jk} x^j \otimes \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^k) \circ (\vec{\boldsymbol{e}}_a \otimes c^a_{rs} y^r \otimes \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^s) \\
&= (\vec{\boldsymbol{e}}_i \otimes c^i_{jk} x^j) \otimes \delta^k_a \otimes (c^a_{rs} y^r \otimes \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^s) \\
&= \vec{\boldsymbol{e}}_i \otimes (c^i_{jk} x^j \delta^k_a c^a_{rs} y^r) \otimes \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^s \\
&= \vec{\boldsymbol{e}}_i \otimes ((c^i_{jk}\, c^k_{rs})\, x^j\, y^r) \otimes \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^s
\end{aligned}$$

e la forma di Killing è

$$K(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}}) = K_{sr}\, x^s\, y^r = (c^a_{sk}\, c^k_{ra})\, x^s\, y^r = (c^a_{ks}\, c^k_{ar})\, x^s\, y^r$$

Calcolando la traccia della (3) si ottiene

$$c^k_{ai} c^a_{ks} + c^k_{as} c^a_{ik} + c^k_{ak} c^a_{si} = K_{is} - K_{si} + c^k_{ak} c^a_{si} = c^k_{ak} c^a_{si} = 0$$

La forma di Killing e le costanti di struttura sono legate anche dalla relazione

$$K_{ir}\, c^r_{hj} + K_{jr}\, c^r_{hi} \equiv 0 \tag{4}$$

che vale indipendentemente dal valore del determinante $\det(K_{rs})$.

Dimostrazione.

Infatti si ha:

$$\begin{aligned}
K_{ir}\, c^r_{hj} + K_{jr}\, c^r_{hi} &= (c^a_{ib}\, c^b_{ra})\, c^r_{hj} + (i \leftrightarrow j) \\
&= c^a_{ib}\, \left(c^b_{ra}\, c^r_{hj}\right) + (i \leftrightarrow j) \\
&= c^a_{ib}\, (-c^b_{jr}\, c^r_{ha} - c^b_{rh}\, c^r_{ja}) + (i \leftrightarrow j) \\
&= -c^a_{ib}\, c^b_{jr}\, c^r_{ha} + c^a_{ib}\, c^b_{hr}\, c^r_{ja} + (i \leftrightarrow j) \\
&= -c^a_{ib}\, c^b_{jr}\, c^r_{ha} + c^a_{jb}\, c^b_{hr}\, c^r_{ia} + \left(c^a_{ib}\, c^b_{hr}\, c^r_{ja} - c^a_{jb}\, c^b_{hr}\, c^r_{ia}\right) + (i \leftrightarrow j) \\
&= -\mathrm{tr}\left[\mathrm{ad}(\vec{\boldsymbol{e}}_i) \circ \mathrm{ad}(\vec{\boldsymbol{e}}_j) \circ \mathrm{ad}(\vec{\boldsymbol{e}}_h)\right] + \mathrm{tr}\left[\mathrm{ad}(\vec{\boldsymbol{e}}_j) \circ \mathrm{ad}(\vec{\boldsymbol{e}}_h) \circ \mathrm{ad}(\vec{\boldsymbol{e}}_i)\right] + (i \leftrightarrow j) \\
&= 0 + (i \leftrightarrow j) \\
&= 0
\end{aligned}$$

■

La (4) equivale a verificare che vale l'identità

$$K([\vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\boldsymbol{x}}], \vec{\boldsymbol{y}}) + K(\vec{\boldsymbol{x}}, [\vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\boldsymbol{y}}]) = 0 \qquad \forall\, \vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}} \in \mathbf{E}$$

che è una conseguenza dell'identità più generale

$$\mathrm{tr}\left([V, A] \circ B\right) + \mathrm{tr}\left(A \circ [V, B]\right) = 0 \qquad \forall\, V, A, B \in L(\mathbf{E}; \mathbf{E})$$

Esempio 1.4. [Algebre di Lie di dimensione $= 1$]

Sullo spazio vettoriale $\mathbb{R}$ c'è una sola struttura di algebra di Lie banale $[\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}}] = 0$ per ogni $\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}} \in \mathbb{R}$.

Esempio 1.5. [Algebre di Lie di dimensione $= 2$]

Sullo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ ci sono essenzialmente due strutture:

- la struttura di algebra di Lie banale $[\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}}] = 0$ per ogni $\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}} \in \mathbb{R}^2$,
- le strutture di algebra di Lie non banali: $c^i_{rs} = \hat{c}^i\, \varepsilon_{rs}$ con

$$\hat{c}^i = \frac{1}{2} c^i_{rs} \varepsilon^{rs} = c^i_{12} \neq 0.$$

L'identità di Jacobi è banale perché $A^0_3(\mathbb{R}^2) = \{0\}$.

Per quanto riguarda la forma di Killing si ha

$$K_{ij} = c^a_{ib}\, c^b_{ja} = \hat{c}^a\, \varepsilon_{ib}\, \hat{c}^b\, \varepsilon_{ja} = \omega_j\, \omega_i$$

e, quindi, $\det(K_{ij}) = 0$.

Con un cambiamento di base possiamo ridurci al caso in cui $\hat{c}$, che è una densità vettoriale di peso 1, ha componenti $\hat{c}^1 = 0$ e $\hat{c}^2 = -1$. In questo caso si ha $\omega_1 = 1$ e $\omega_2 = 0$ e

$$(K_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esempio 1.6. [Algebre di Lie di dimensione $= 3$]

Sullo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$, oltre alla struttura di algebra di Lie banale, ci sono altre strutture di algebra di Lie non banali e con forma di Killing non degenere. Le costanti di struttura sono esprimibili come segue

$$c^i_{rs} = \hat{c}^{ik}\,\varepsilon_{krs}$$

dove i coefficienti $\hat{c}^{ij}$ sono definiti da

$$\hat{c}^{ij} = \frac{1}{2}c^i_{rs}\varepsilon^{jrs} = \frac{1}{2}c^i_{rs}\varepsilon^{rsj}$$

e sono le componenti di una densità tensoriale di peso 1.

L'identità di Jacobi diventa:

$$c^i_{k[a}c^k_{rs]} = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad c^i_{ka}c^k_{rs}\varepsilon^{ars} = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \hat{c}^{iu}\,\varepsilon_{uka}\hat{c}^{kv}\,\varepsilon_{vrs}\varepsilon^{ars} = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \hat{c}^{iu}\,\varepsilon_{uka}\hat{c}^{ka} = 0$$

Posto

$$\hat{c}^{ab} = \hat{\sigma}^{ab} + \alpha_i\varepsilon^{iab}$$

dove i coefficienti $\hat{\sigma}^{ab}$ sono le componenti di una densità tensoriale simmetrica di peso 1, mentre i coefficienti α_i sono le componenti si un covettore. Per l'identità di Jacobi deve essere

$$\hat{c}^{iu}\,\varepsilon_{uka}\hat{c}^{ka} = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad (\hat{\sigma}^{iu} + \alpha_r\varepsilon^{riu})\alpha_u = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \hat{\sigma}^{iu}\alpha_u = 0$$

- Se $\hat{\sigma}^{iu} = 0$ allora α_u è arbitrario.

- Se $\mathrm{rg}(\hat{\sigma}^{iu}) = 1$ allora α_u è un autovettore corrispondente all'autovalore 0 (l'autospazio ha dimensione 2).
- Se $\mathrm{rg}(\hat{\sigma}^{iu}) = 2$ allora α_u è un autovettore corrispondente all'autovalore 0 (l'autospazio ha dimensione 1).
- Se $\det(\hat{\sigma}^{iu}) \neq 0$ allora deve essere $\alpha_u = 0$ ed esiste una metrica g_{rs} tale che

$$\hat{\sigma}^{iu} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{|\det(g_{rs})|}\, g^{iu} \, .$$

Calcolando la forma di Killing si ottiene

$$K_{rs} = -s(g)\, g_{rs} \qquad \text{dove} \qquad s(g) = \mathrm{segno}(\det(g_{rs})) \, .$$

In particolare si ha $\det(K_{rs}) = -s(g)\, \det(g_{rs}) < 0$.

1.19 Quaternioni

I quaternioni sono i numeri di un corpo $\mathbb{H}$ che estende il campo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi in modo tale che si possano risolvere in modo unico equazioni del tipo

$$a\, x + b = 0 \quad , \qquad x\, a + b = 0$$

per ogni $a \in \mathbb{H}^* = \mathbb{H} \setminus \{0\}$, da cui si deduce che $\mathbb{H}^*$ è un gruppo.

1.19.1 Quaternioni come $\mathbb{R}^4$ con moltiplicazione

Il corpo $\mathbb{H}$ può essere visto come lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ con l'aggiunta di un'operazione di prodotto $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ definita da

$$\begin{aligned}(a_0\mathbf{1}_{\mathbb{H}} + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k})(b_0\mathbf{1}_{\mathbb{H}} + b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k}) \;=\;& (a_0{\cdot}b_0 - a_1{\cdot}b_1 - a_2{\cdot}b_2 - a_3{\cdot}b_3)\mathbf{1}_{\mathbb{H}} + \\ & (a_0{\cdot}b_1 + a_1{\cdot}b_0 + a_2{\cdot}b_3 - a_3{\cdot}b_2)\boldsymbol{i} + \\ & (a_0{\cdot}b_2 - a_1{\cdot}b_3 + a_2{\cdot}b_0 + a_3{\cdot}b_1)\boldsymbol{j} + \\ & (a_0{\cdot}b_3 + a_1{\cdot}b_2 - a_2{\cdot}b_1 + a_3{\cdot}b_0)\boldsymbol{k} \end{aligned} \tag{5}$$

dove abbiamo indicato con

$$\mathbf{1}_{\mathbb{H}} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{i} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{j} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{k} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \tag{6}$$

i 4 vettori della base canonica di $\mathbb{R}^4$.

L'operazione di prodotto così definita è bilineare, associativa, non commutativa e tale che ogni elemento non nullo sia invertibile. Il quaternione $\mathbf{1}_{\mathbb{H}}$ è l'elemento neutro della moltiplicazione che soddisfa alle seguenti identità: $\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = -\mathbf{1}_{\mathbb{H}}$, $\boldsymbol{ij} = \boldsymbol{k} = -\boldsymbol{ji}$, $\boldsymbol{jk} = \boldsymbol{i} = -\boldsymbol{kj}$, $\boldsymbol{ki} = \boldsymbol{j} = -\boldsymbol{ik}$.

Per ogni quaternione $A = a_0\mathbf{1}_{\mathbb{H}} + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}$ possiamo definire il quaternione coniugato

$$\bar{A} = a_0\mathbf{1}_{\mathbb{H}} - a_1\boldsymbol{i} - a_2\boldsymbol{j} - a_3\boldsymbol{k}\,, \tag{7}$$

che soddisfa all'identità $\overline{AB} = \overline{B}\,\overline{A}$, e possiamo definire il modulo $|A|$ del un quaternione A

$$\overline{A}A \;=\; A\overline{A} \;=\; \left(a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right)\mathbf{1}_{\mathbb{H}} \;=\; |A|^2\,\mathbf{1}_{\mathbb{H}}\,. \tag{8}$$

L'operazione modulo ha le seguenti proprietà:

$$|A+B| \leq |A| + |B| \qquad , \qquad |A\,B| = |A|\,|B| \tag{9}$$

e dalla formula (8) possiamo dedurre che ogni quaternione A non nullo si ha

$$A^{-1} = \frac{\overline{A}}{|A|^2}\,. \tag{10}$$

La sfera $S^3 = \{W \in \mathbb{H} \,|\, |W| = 1\}$ è un sottogruppo del gruppo $\mathbb{H}^*$.

Analogamente a quanto si fa per i numeri complessi, possiamo definire la *parte reale* $\mathrm{Re}(A)$ e la *parte vettoriale* $\mathrm{Im}(A)$ attraverso le formule

$$\mathrm{Re}(A) \;=\; \frac{1}{2}\left(A + \overline{A}\right) \;=\; a_0\mathbf{1}_{\mathbb{H}} \tag{11}$$

$$\mathrm{Im}(A) \;=\; \frac{1}{2}\left(A - \overline{A}\right) \;=\; a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k} \tag{12}$$

Un quaternione A è *reale* se $\mathrm{Re}(A) = A$ o, equivalentemente, $\mathrm{Im}(A) = 0$; il quaternione A è *immaginario* se $\mathrm{Im}(A) = A$ o, equivalentemente, $\mathrm{Re}(A) = 0$.

Il corpo $\mathbb{H}$ contiene il sottocampo $\mathbb{R}\cdot\mathbf{1}_{\mathbb{H}}$ dei quaternioni reali, che è isomorfo al campo $\mathbb{R}$ dei numeri reali e che commuta con ogni quaternione. Il corpo $\mathbb{H}$ contiene anche infiniti sottocampi isomorfi al campo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi: basta, infatti, considerare i quaternioni del tipo $Q = a\,\mathbf{1}_{\mathbb{H}} + b\,\boldsymbol{u}$, con $a, b \in \mathbb{R}$, dove $\boldsymbol{u}$ è un quaternione immaginario tale che $\boldsymbol{u}^2 = -\mathbf{1}_{\mathbb{H}}$.

1.19.2 Quaternioni come $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ con moltiplicazione

Invece di dire che un quaternione A è un elemento di $\mathbb{R}^4$ possiamo sfruttare la scomposizione $A = \mathrm{Re}(A) + \mathrm{Im}(A)$ per dire che il quaternione A può essere visto cme un elemento di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ con l'operazione di moltiplicazione definita da

$$\Big(\alpha, \vec{a}\Big)\Big(\beta, \vec{b}\Big) = \Big(\alpha\,\beta - \vec{a} \bullet \vec{b}, \alpha\,\vec{b} + \beta\,\vec{a} + \vec{a} \times \vec{b}\Big) \tag{13}$$

dove $\bullet$ e $\times$ indicano i soliti prodotti scalare e vettoriale[11] su $\mathbb{R}^3$. Il quaternione coniugato è $\overline{\big(\alpha, \vec{a}\,\big)} = \big(\alpha, -\vec{a}\,\big)$ ed il modulo del quaternione è $|\big(\alpha, \vec{a}\,\big)|^2 = \alpha^2 + \vec{a} \bullet \vec{a}\,$.

1.19.3 Quaternioni come $\mathbb{C}^2$ con moltiplicazione

Per rappresentare i quaternioni come coppie di numeri complessi osserviamo che un quaternione $A = (a_0\mathbf{1}_{\mathbb{H}} + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k})$ può essere riscritto nel seguente modo:

$$A = (a_0\,\mathbf{1}_{\mathbb{H}} + a_1\,\boldsymbol{i}) + (a_2\,\mathbf{1}_{\mathbb{H}} + a_3\,\boldsymbol{i})\,\boldsymbol{j} \tag{14}$$

[11] Per definire il prodotto vettoriale $\times$ si presuppone che su $\mathbb{R}^3$ si scelga la base ortonormale orientata canonica $\big(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\big) = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$.

I quaternioni del tipo $a\,\mathbf{1}_{\mathbb{H}} + b\,\boldsymbol{i}$ formano un sottocampo di $\mathbb{H}$ che è isomorfo al campo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi $a\,\mathbf{1}_{\mathbb{H}} + b\,\boldsymbol{i} \leftrightarrow a + b\,i$. Le proprietà della moltiplicazione (5) ci dicono che $z\,\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}\,\bar{z}$ e, quindi, la moltiplicazione (5) diventa

$$\begin{aligned}(z_1\,\mathbf{1}_{\mathbb{H}} + z_2\,\boldsymbol{j})(w_1\,\mathbf{1}_{\mathbb{H}} + w_2\,\boldsymbol{j}) &= z_1\,w_1\,\mathbf{1}_{\mathbb{H}} + z_2\,\boldsymbol{j}\,w_1 + z_1\,w_2\,\boldsymbol{j} + z_2\,\boldsymbol{j}\,w_2\,\boldsymbol{j} \\ &= z_1\,w_1\,\mathbf{1}_{\mathbb{H}} + z_2\,\bar{w}_1\,\boldsymbol{j} + z_1\,w_2\,\boldsymbol{j} - z_2\,\bar{w}_2\,\mathbf{1}_{\mathbb{H}} \\ &= (z_1\,w_1 - z_2\,\bar{w}_2)\,\mathbf{1}_{\mathbb{H}} + (z_2\,\bar{w}_1 + z_1\,w_2)\,\boldsymbol{j} \qquad (15)\end{aligned}$$

Siccome il prodotto di numeri complessi è commutativo, il prodotto (15) può essere scritto in 16 modi diversi; per il momento, utilizzeremo quello che compare nella formula (15) e scriveremo che il prodotto $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ è

$$(z_1, z_2)\,(w_1, w_2) = (z_1\,w_1 - z_2\,\bar{w}_2, z_2\,\bar{w}_1 + z_1\,w_2) \qquad (16)$$

Il coniugato di un quaternione (z_1, z_2) è $\overline{(z_1, z_2)} = (\bar{z}_1, -z_2)$ mentre per il quadrato del modulo si ha $|(z_1, z_2)|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2$.

1.19.4 Quaternioni come matrici 2×2 complesse

La moltiplicazione (16) si può riscrivere in due modi come prodotto di matrici. Il primo modo è

$$(z_1\,w_1 - z_2\,\bar{w}_2, z_2\,\bar{w}_1 + z_1\,w_2) = (z_1, z_2)\begin{pmatrix} w_1 & w_2 \\ -\bar{w}_2 & \bar{w}_1 \end{pmatrix} \qquad (17)$$

mentre il secondo è

$$\begin{pmatrix} z_1\, w_1 - z_2\, \bar{w}_2 \\ z_2\, \bar{w}_1 + z_1\, w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 & -\bar{w}_2 \\ w_2 & \bar{w}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \tag{18}$$

Se un quaternione $W = w_1\, \mathbf{1} + w_2\, \boldsymbol{j}$ viene rappresentato dalla matrice 2×2 complessa

$$R_{_W} = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \\ -\bar{w}_2 & \bar{w}_1 \end{pmatrix} \tag{19}$$

allora la funzione $W \longmapsto R_{_W}$ è un omomorfismo di anelli, cioè: $R_{_{Z+W}} = R_{_Z} + R_{_W}$ e $R_{_{Z \cdot W}} = R_{_Z} \circ R_{_W}$. Si ha inoltre che $\det(R_{_W}) = |W|^2$, $R_{_{\overline{W}}} = {}^t(\overline{R_{_W}}) = \overline{{}^t(R_{_W})}$ e $R_{_W} \circ R_{_{\overline{W}}} = |W|^2\, \mathrm{id}_{\mathbb{C}^2}$. In particolare, la funzione $S^3 \longrightarrow SU(2) : W \longmapsto R_{_W}$ è un isomorfismo di gruppi.

1.20 Ottonioni

Gli ottonioni sono i numeri di un'algebra di divisione normata $\mathbb{O}$, non commutativa e non associativa, che estende il corpo dei quternioni $\mathbb{H}$ in modo analogo a quello in cui $\mathbb{H}$ estende il campo $\mathbb{C}$. Le equazioni del tipo

$$a\, x + b = 0 \qquad , \qquad x\, a + b = 0 \tag{20}$$

si possono risolvere in modo unico per ogni $a \in \mathbb{O}^* = \mathbb{O} \setminus \{0\}$.

1.20.1 Ottonioni come $\mathbb{H}^2$ con moltiplicazione (metodo di Cayley–Dickson)

Definiamo nello spazio vettoriale reale $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ il prodotto attraverso la formula di Cayley–Dickson

$$(z_1, z_2)\,(w_1, w_2) = (z_1\, w_1 - \bar{w}_2\, z_2, w_2\, z_1 + z_2\, \bar{w}_1) \tag{21}$$

che generalizza la formula (16) dedotta per i quaternioni[12].

Con questa operazione di prodotto, lo spazio vettoriale $\mathbb{H}^2$ diventa l'algebra *non associativa* $\mathbb{O}$ degli ottonioni; l'ottonione $\mathbf{1}_{\mathbb{O}} = (\mathbf{1}_{\mathbb{H}}, \mathbf{0}_{\mathbb{H}})$ è l'identità del prodotto (21).

Il coniugato di un ottonione (z_1, z_2) è definito da $\overline{(z_1, z_2)} = (\bar{z}_1, -z_2)$ e per ogni $A, B \in \mathbb{O}$ si ha $\overline{A\,B} = \overline{B}\,\overline{A}$. Il quadrato del modulo di un ottonione $A = (z_1, z_2)$ è definito da $|(z_1, z_2)|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2$. L'operazione modulo ha le seguenti proprietà:

$$|A + B| \leq |A| + |B| \qquad , \qquad |A\,B| = |A|\,|B| \tag{22}$$

e possiamo dedurre che ogni ottonione non nullo A ammette l'inverso

$$A^{-1} = \frac{\overline{A}}{|A|^2}\,. \tag{23}$$

rispetto alla moltiplicazione. L'insieme $\mathbb{O}^*$ e la sfera $S^7 = \{W \in \mathbb{H} \,|\, |W| = 1\}$ non sono gruppi perché l'operazione di prodotto non è associativa.

[12] Nella (21) bisogna fare attenzione all'ordine dei fattori nei 4 monomi perché il prodotto dei quaternioni non è commutativo.

Analogamente a quanto è stato fatto per i quaternioni, possiamo definire la *parte reale* $\mathrm{Re}(A)$ e la *parte vettoriale* $\mathrm{Im}(A)$ di un ottonione A attraverso le formule

$$\mathrm{Re}(A) = \frac{1}{2}\left(A + \bar{A}\right) \tag{24}$$

$$\mathrm{Im}(A) = \frac{1}{2}\left(A - \bar{A}\right) \tag{25}$$

Un ottonione A è *reale* se $\mathrm{Re}(A) = A$ o, equivalentemente, $\mathrm{Im}(A) = 0$; l'ottonione A è *immaginario* se $\mathrm{Im}(A) = A$ o, equivalentemente, $\mathrm{Re}(A) = 0$.

L'algebra $\mathbb{O}$ contiene il sottocampo $\mathbb{R}\cdot\mathbf{1}_{\mathbb{O}}$ degli ottonioni reali, che è isomorfo al campo $\mathbb{R}$ dei numeri reali e che commuta con ogni ottonione. L'algebra $\mathbb{O}$ contiene infiniti sottocampi isomorfi al campo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi che si possono costruire considerando gli ottonioni del tipo $Q = a\,\mathbf{1}_{\mathbb{O}} + b\,\boldsymbol{u}$, con $a, b \in \mathbb{R}$, dove $\boldsymbol{u}$ è un ottonione immaginario tale che $\boldsymbol{u}^2 = -\mathbf{1}_{\mathbb{O}}$. L'algebra $\mathbb{O}$ contiene anche infiniti sottocorpi isomorfi al corpo $\mathbb{H}$ dei quaternioni costruiti considerando gli ottonioni del tipo $Q = a\,\mathbf{1}_{\mathbb{O}} + b\,\boldsymbol{u} + c\,\boldsymbol{v} + d\,\boldsymbol{w}$, con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, dove $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ sono tre ottonioni immaginari tali che $\boldsymbol{u}^2 = \boldsymbol{v}^2 = \boldsymbol{w}^2 = -\mathbf{1}_{\mathbb{O}}$, $\boldsymbol{uv} = \boldsymbol{w} = -\boldsymbol{vu}$, $\boldsymbol{vw} = \boldsymbol{u} = -\boldsymbol{wv}$ e $\boldsymbol{wu} = \boldsymbol{v} = -\boldsymbol{uw}$.

Pur non essendo associativa, per ogni coppia di ottonioni $A, B \in \mathbb{O}$ la moltiplicazione soddisfa alle seguenti identità

$$A(AB) = (AA)B \quad , \quad (BA)A = B(AA) \tag{26}$$

$$\bar{A}(AB) = (\bar{A}A)B \quad , \quad (BA)\bar{A} = B(A\bar{A}) \tag{27}$$

$$(AB)A = A(BA) \quad , \quad (AB)\bar{A} = A(B\bar{A}) \tag{28}$$

Le identità (27) e (23) ci dicono che gli ottonioni sono un'algebra di divisione. Cioè: le equazioni (20) ammettono soluzione

$$x = -a^{-1}\, b \qquad\qquad , \qquad\qquad x = -b\, a^{-1} \tag{29}$$

FINE LEZIONE 5 MMdFC (2023-03-09 ore 16:00 – 18:00)

Riferimenti bibliografici

[1] G. C. Shephard: *Spazi vettoriali di dimensioni finite*; Collana Poliedro, Edizioni Cremonese, Roma, 1969.

[2] S. Mac Lane, G. Birkhoff: *Algèbre, Tome 1, Structures fondamentales*; Gauthier–Villars, Paris, 1970.

[3] S. Mac Lane, G. Birkhoff: *Algèbre, Tome 2, Les grands théorèmes*; Gauthier–Villars, Paris, 1970.

[4] W. Gröbner: *Gruppi, anelli e algebre di Lie*; Collana Poliedro, Edizioni Cremonese, Roma, 1975.