2.2 Teorema della funzione implicita

La versione del teorema della funzione implicita che considereremo è una versione speciale del teorema del rango e riguarda la possibilità di risolvere (sistemi di) equazioni del tipo $f(x, y) = z$ ottenendo una soluzione unica del tipo $y = g(x, z)$. Cioè: esiste un unica funzione $g(x, z)$ tale che $f(x, g(x, z)) = z$:

Supponiamo che $A \subseteq \mathbf{E} \times \mathbf{F}$ e che $B \subseteq \mathbf{F}$. Per ogni funzione $f \in \mathcal{C}^k(A; B)$, con $k > 0$ o $k = \infty$ o $k = \omega$, possiamo definire le due derivate parziali $D_1(f)(x, y) \in \mathbf{L}(\mathbf{E}; \mathbf{F})$ e $D_2(f)(x, y) \in \mathbf{L}(\mathbf{F}; \mathbf{F})$.

Il teorema della funzione implicita afferma che, se in un punto $(x_0, y_0) \in A$ la seconda derivata parziale $D_2(f)(x_0, y_0) \in \mathbf{L}(\mathbf{F}; \mathbf{F})$ è invertibile allora esistono intorni aperti U, V, W dei punti $x_0 \in \mathbf{E}$, $y_0 \in \mathbf{F}$, $z_0 = f(x_0, y_0) \in \mathbf{F}$ ed una sola funzione $g \in \mathcal{C}^k(U \times W; V)$ tale che $f(x, g(x, z)) = z$. Il "vero" teorema della funzione implicita si ottiene quando si fissa $z = z_0$.

Noi utilizzeremo il teorema in un modo leggermente diverso che ha a che fare coi sistemi di coordinate. Più precisamente, se $A \subseteq \mathbf{E}$ ed $f : A \to \mathbb{R}^m$, con $m < \dim(\mathbf{E}) = m + n$ è una funzione di classe $\mathcal{C}^k$ e di rango $\mathrm{rg}_p(f) = m$ in un punto $p \in A \subseteq \mathbf{E}$, allora esistono un sistema di coordinate $\psi : U \longrightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ attorno al punto $p \in A$ ed un sistema di coordinate $\varphi : V \longrightarrow \mathbb{R}^m$ attorno al punto $f(p) \in \mathbb{R}^m$ tali che il seguente diagramma sia commutativo

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "f"'] & \psi(U) \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \arrow[d, "\pi_1"] \\ V \arrow[r, "\varphi"'] & \varphi(V) \subseteq \mathbb{R}^m \end{tikzcd}$$

dove $\pi_1 : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ indica la prima proiezione del prodotto cartesiano. I sistemi di coordinate ψ e φ sono di classe $\mathcal{C}^k$. La condizione di commutatività del diagramma è equivalente a dire che $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} = \pi_1$ (bisognerebbe scrivere $\pi_1|_{\psi(U)}$).

Un altro modo di utilizzare il teorema è il seguente. Dati un aperto $A \subseteq \mathbf{E}$ ed una funzione $\alpha \in \mathcal{C}^k(A, \mathbb{R}^m)$, con $m < \dim(\mathbf{E}) = m + n$, di rango $\mathrm{rg}_p(\alpha) = m$ in un punto $p \in A \subseteq \mathbf{E}$, allora esistono un intorno aperto $U \subseteq A$ del punto p ed una funzione $\beta \in \mathcal{C}^k(A, \mathbb{R}^n)$ di rango $\mathrm{rg}_p(\beta) = n$ tali che il prodotto diagonale $(\alpha, \beta) : U \longrightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, che è definito da $(\alpha, \beta)(x) = (\alpha(x), \beta(x))$, sia un sistema di coordinate di classe $\mathcal{C}^k$ attorno al punto $p \in A$

2.3 Teorema del rango

Consideriamo due spazi vettoriali $\mathbf{E}$ ed $\mathbf{F}$ di dimesioni $\dim(\mathbf{E}) = n$ e $\dim(\mathbf{F}) = m$. Il teorema del rango afferma che dati un aperto $A \subseteq \mathbf{E}$ ed una funzione $f \in \mathcal{C}^k(A, \mathbf{F})$ di rango costante

$r \leq \min(m, n)$, allora per ogni punto $p \in A$ esistono un sistema di coordinate $\psi : U \longrightarrow \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{n-r}$ attorno al punto p ed un sistema di coordinate $\varphi : V \longrightarrow \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{m-r}$ attorno al punto $f(p) \in \mathbf{F}$ tali che il seguente diagramma sia commutativo

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "f"'] & \psi(U) \subseteq \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{n-r} \arrow[d, "(\pi_1, 0)"] \\ V \arrow[r, "\varphi"'] & \varphi(V) \subseteq \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{m-r} \end{tikzcd}$$

Cioè, si ha: $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} = (\pi_1, 0) : (x, y) \mapsto (x, 0)$. I sistemi di coordinate ψ e φ sono di classe $\mathcal{C}^k$.

Abbiamo già considerato i casi in cui $r = m < n$ (teorema della funzione implicita) e $r = m = n$ (teorema della funzione inversa).

3 Spazi tangenti, mappe tangenti, fibrati tangenti

Per poter estendere il calcolo differenziale alle varietà conviene introdurre il concetto di mappa tangente di una funzione differenziabile fra aperti di spazi affini di dimensione finita.

3.1 Spazi tangenti

Dato uno spazio affine $\mathbf{A}$ modellato su uno spazio vettoriale $\mathbf{E}$ possiamo definire lo *spazio tangente* $T_p(\mathbf{A})$ allo spazio affine $\mathbf{A}$ in un suo punto $p \in \mathbf{A}$ ponendo $T_p(\mathbf{A}) = \{p\} \times \mathbf{E}$. Lo spazio tangente ad $\mathbf{A}$ in un punto $p \in \mathbf{A}$ ha una struttura naturale di spazio vettoriale isomorfa a quella dello spazio vettoriale $\mathbf{E}$ che viene indotta dalla biiezione $\pi_2 : \{p\} \times \mathbf{E} \to \mathbf{E}$. Le operazioni di somma $T_p(\mathbf{A}) \times T_p(\mathbf{A}) \longrightarrow T_p(\mathbf{A})$ e di prodotto per uno scalare $\mathbb{K} \times T_p(\mathbf{A}) \longrightarrow T_p(\mathbf{A})$ sono definite da: $(p, \vec{\boldsymbol{x}}) + (p, \vec{\boldsymbol{y}}) = (p, \vec{\boldsymbol{x}} + \vec{\boldsymbol{y}})$ e $\lambda\, (p, \vec{\boldsymbol{x}}) = (p, \lambda\, \vec{\boldsymbol{x}})$. Il vettore $\vec{0}_p \in T_p(\mathbf{A})$ è il vettore $(p, \vec{0}_{\mathbf{E}})$; l'opposto di un vettore $(p, \vec{\boldsymbol{x}})$ è $-(p, \vec{\boldsymbol{x}}) = (p, -\vec{\boldsymbol{x}})$. Se $p_1 \neq p_2$ allora $T_{p_1}(\mathbf{A}) \cap T_{p_2}(\mathbf{A}) = \emptyset$ e non è definita la nozione di somma $(p_1, \vec{\boldsymbol{x}}) + (p_2, \vec{\boldsymbol{y}})$. La biiezione $\pi_2 : \{p\} \times \mathbf{E} \to \mathbf{E}$ permette di trasportare su $T_p(\mathbf{A})$ ogni altra struttura presente su $\mathbf{E}$ (topologia, distanze, ...); la biiezione π_2 diventa allora un isomorfismo fra $T_p(\mathbf{A})$ con le strutture trasportate ed $\mathbf{E}$ con le proprie strutture.

3.2 Fibrati tangenti

Definiamo il *fibrato tangente* $T(\mathbf{A})$ di uno spazio affine $\mathbf{A}$ come l'unione di tutti gli spazi tangenti ad $\mathbf{A}$ nei suoi punti:

$$T(\mathbf{A}) = \bigcup_{p \in \mathbf{A}} T_p(\mathbf{A}) \equiv \mathbf{A} \times \mathbf{E},$$

Sullo spazio affine $\mathbf{A}$ esiste una topologia naturale che lo rende omeomorfo all spazio topologico $\mathbf{E}$. Sul fibrato tangente $T(\mathbf{A}) \equiv \mathbf{A} \times \mathbf{E}$ consideriamo la topologia prodotto e, per il momento, non ci interessano possibili strutture come quella di spazio affine.

Se $U \subseteq \mathbf{A}$ è un sottoinsieme aperto di $\mathbf{A}$, possiamo definire

$$T_p(U) = T_p(\mathbf{A}) \qquad , \qquad T(U) = \bigcup_{p \in U} T_p(U) \equiv U \times \mathbf{E}$$

L'insieme $T(U)$ è il fibrato tangente dell'aperto $U \subseteq \mathbf{A}$.

La proiezione naturale $\tau_{\mathbf{A}} : T(\mathbf{A}) \longrightarrow \mathbf{A}$ definita da $\vec{\boldsymbol{v}} \in T_p(\mathbf{A}) \Longrightarrow \tau_{\mathbf{A}}(\vec{\boldsymbol{v}}) = p$ è una funzione suriettiva, continua e aperta. Ovviamente, per le fibre $(\tau_{\mathbf{A}})^{-1}(p)$ della proiezione $\tau_{\mathbf{A}}$ si ha $(\tau_{\mathbf{A}})^{-1}(p) = T_p(\mathbf{A})$. Inoltre si ha $(\tau_{\mathbf{A}})^{-1}(U) = \mathrm{T(U)}$ e $\tau_U = (\tau_{\mathbf{A}})|_{T(U)}$.

Se $V \subseteq \mathbf{B}$ è un sottoinsieme aperto di uno spazio affine $\mathbf{B}$ modellato su uno spazio vettoriale $\mathbf{F}$, esiste un isomorfismo di spazi vettoriali fra $T_{(p,q)}(U \times V)$ e $T_p(U) \times T_q(V)$ che induce un omeomorfismo fra $T(U \times V)$ e $T(U) \times T(V)$ e fra le proiezioni $\tau_{U \times V}$ e $\tau_U \times \tau_V$.

3.3 Mappe tangenti

Per ogni funzione $f : U \longrightarrow V$ che sia differenziabile in un punto $p \in U$ possiamo definire la *mappa tangente ad f nel punto p* come la funzione $T_p(f) : T_p(U) \longrightarrow T_{f(p)}(V)$ definita da:

$$T_p(f)(p, \vec{\boldsymbol{x}}) := (f(p), D(f)(p)(\vec{\boldsymbol{x}}))$$

La funzione così definita è lineare, cioè: $T_p(f) \in \mathbf{L}\left(T_p(U); T_{f(p)}(V)\right)$. Una funzione f differenziabile in ogni punto $p \in A$ è di classe $\mathcal{C}^1$ se e solo se la funzione $T(f) : T(U) \longrightarrow T(V)$ definita

$$T(f)(p, \vec{\boldsymbol{x}}) := (f(p), D(f)(p)(\vec{\boldsymbol{x}}))$$

è continua. Osserviamo che in pratica $T_p(f) = T(f)|_{T_p(U)}$.

Dalla regola di derivazione di funzioni composte si deducono facilmente le seguenti identità

$$T_p(g \circ f) = T_{f(p)}(g) \circ T_p(f) \qquad , \qquad T(g \circ f) = T(g) \circ T(f)$$

Si dimostra facilmente che per ogni aperto A di uno spazio affine $\mathbf{A}$ si ha $T(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{T(A)}$. Se una funzione $f \in \mathcal{C}^1(A; B)$ è un diffeomorfismo di classe $\mathcal{C}^1$ allora si ha $T(f^{-1}) = (T(f))^{-1}$.

Per ogni funzione $f \in \mathcal{C}^k(A; B)$ si ha il seguente diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
T(A) \arrow[r, "T(f)"] \arrow[d, "\tau_A"'] & T(B) \arrow[d, "\tau_B"] \\
A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

dove la mappa tangente $T(f)$ è una funzione di classe $\mathcal{C}^{k-1}$. Se $f \in \mathcal{C}^\infty(A; B)$ allora si ha $T(f) \in \mathcal{C}^\infty(T(A); T(B))$. Analogamente, per le funzioni analitiche $f \in \mathcal{C}^\omega(A; B)$, si ha che $T(f) \in \mathcal{C}^\omega(T(A); T(B))$.

Esempio 3.1. Ricordiamo che una funzione $f : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ fra due spazi affini $\mathbf{A}$, modellato su uno spazio vettoriale $\mathbf{E}$, e $\mathbf{B}$, modellato su uno spazio vettoriale $\mathbf{F}$, è una funzione affine se e solo se esiste una funzione lineare $\varphi \in \mathbf{L}(\mathbf{E};\mathbf{F})$ tale che per ogni coppia di punti $p, q \in \mathbf{A}$ si abbia $f(p) - f(q) = \varphi(p - q)$. La funzione f è allora derivabile in ogni punto $p \in \mathbf{A}$ e $D(f)(p) = \varphi$. In questo caso, per ogni punto $p \in \mathbf{A}$ e per ogni vettore $\vec{\boldsymbol{x}} \in \mathbf{E}$ si ha $T_p(f)(\vec{\boldsymbol{x}}) = (f(p), \varphi(\vec{\boldsymbol{x}}))$

3.4 Mappe tangenti di ordine superiore

Per le funzioni di classe $\mathcal{C}^2(A; B)$ possiamo considerare la funzione continua $T(T(f)) : T(T(A)) \longrightarrow T(T(B))$ che è definita da

$$T_{(p,\vec{\boldsymbol{v}})}(T(f)) : (\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}}) \longmapsto \big(f(p),\ D(f)(p)(\vec{\boldsymbol{v}}),\ D(f)(p)(\vec{\boldsymbol{x}}),\ D^2(f)(p)(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{v}}) + D(f)(p)(\vec{\boldsymbol{y}})\big)$$

Sappiamo che $T(f) \in \mathcal{C}^1(T(A); T(B))$ e che il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd} T(T(A)) \arrow[r, "T(T(f))"] \arrow[d, "\tau_{T(A)}"'] & T(T(B)) \arrow[d, "\tau_{T(B)}"] \\ T(A) \arrow[r, "T(f)"'] & T(B) \end{tikzcd}$$

è commutativo.

Le due funzioni $\tau_{T(A)} : T(T(A)) \longrightarrow T(A)$ e $T(\tau_A) : T(T(A)) \longrightarrow T(A)$ sono definite da

$$\tau_{T(A)}(p, \vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}}) = (p, \vec{\boldsymbol{v}}) \qquad , \qquad T(\tau_A)(p, \vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}}) = (p, \vec{\boldsymbol{x}})$$

e rendono commutativo il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd} T(T(A)) \arrow[r, "T(\tau_A)"] \arrow[d, "\tau_{T(A)}"'] & T(A) \arrow[d, "\tau_A"] \\ T(A) \arrow[r, "\tau_A"'] & A \end{tikzcd}$$

All'interno di $T(T(A)) = (A \times \mathbf{E}) \times (\mathbf{E} \times \mathbf{E})$ c'è il sottoinsieme $T^2(A)$ dove le due funzioni $\tau_{T(A)}$ e $T(\tau_A)$ coincidono. L'insieme $T^2(A)$ è definito implicitamente dall'equazione $\vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{x}}$ ed è omeomorfo al prodotto cartesiano $A \times \mathbf{E} \times \mathbf{E}$. La restrizione di $T(T(f))$ a $T^2(A)$ ha come codominio il sottoinsieme $T^2(B) \subset T(T(B))$. La funzione $T^2(f) : T^2(A) \longrightarrow T^2(B)$ è definita da

$$T^2(f) : (p, \vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\boldsymbol{a}}) \longmapsto \big(f(p), D(f)(p)(\vec{\boldsymbol{v}}), D(f)(p)(\vec{\boldsymbol{a}}) + D^2(f)(p)(\vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\boldsymbol{v}})\big)$$

ed dalla proprietà $T(T(g \circ f)) = T(T(g)) \circ T(T(f))$ si deduce che $T^2(g \circ f) = T^2(g) \circ T^2(f)$.

Analogamente, per le funzioni di classe $\mathcal{C}^k(A; B)$ si possono definire $T^{(k)}(A) = T(T^{(k-1)}(A))$, con $k > 1$ e $T^{(1)} = T$. Ovviamente si ha $T^{(k)}(A) = T^{(r)}(T^{(s)}(A))$, con $r, s > 0$ e $r + s = k$. All'interno di $T^{(k)}(A)$ c'è un sottoinsieme che indicheremo $T^k(A)$, definito in maniera analoga a $T^2(A)$, che è isomorfo ad $A \times \mathbf{E}^k$ e sul quale possiamo definire la funzione $T^k(f) : T^k(A) \longrightarrow T^k(B)$. Ci sono anche dei sottoinsiemi che sono isomorfi a $T^r(T^s(A))$, ognuno dei quali contiene $T^k(A)$, con relative funzioni $T^r(T^s(f)) : T^r(T^s(A)) \longrightarrow T^r(T^s(B))$.

3.5 Campi di vettori

Dato un sottoinsieme aperto A di uno spazio affine $\mathbf{A}$ modellato su uno spazio vettoriale $\mathbf{E}$, un campo di vettori su A è una funzione $\vec{X} : A \longrightarrow \mathbf{E}$. Un modo alternativo che potrà essere esteso anche alle varietà differenziabili è quello di dire che un campo di vettori $\vec{X}$ è una sezione del fibrato tangente $T(A)$, cioè: una funzione $\vec{X} : A \longrightarrow T(A)$ tale che $\tau_A \circ \vec{X} = \mathrm{id}_A$ o, equivalentemente, tale che $\vec{X}(p) \in T_p(A), \forall p \in A$.

L'insieme dei campi di vettori di classe $\mathcal{C}^\infty$ su A verrà indicato con $\mathfrak{X}(A)$ e, oltre alla struttura di spazio vettoriale di dimensione infinita su $\mathbb{R}$, ha una struttura naturale di modulo sull'anello delle funzioni $\mathcal{C}^\infty(A; \mathbb{R})$.

FINE LEZIONE 7 MMdFC (2023-03-16 ore 11:00 – 13:00)

Riferimenti bibliografici

[1] N. Bourbaki, *Espaces vectoriels topologiques, Chapitres 1 et 2*; Hermann, Paris, 1966.

[2] J. Dieudonné: *Éléments d'analyse 1 / Fondements de l'analyse moderne*; Gauthier–Villars, Paris, 1969.

[3] J. E. Marsden, T. Ratiu, R. Abraham: *Manifolds, tensor analysis and applications, Third Edition*; Springer–Verlag, 2001.

[4] M. Ferraris: *A New Approach to Differential Calculus in Locally Convex Spaces*; Atti Accad. Sci. Torino, Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., 113, 1979, 77-83.

[5] M. Ferraris: *Appunti di algebra lineare, multilineare e tensori*; 2023.