Per ogni funzione $F \in \mathbf{\Omega}^0(A)$ possiamo definire il *differenziale (esterno)* come la 1–forma $dF \in \mathbf{\Omega}^1(A)$ ottenuta dalla mappa tangente $T(F)$ ricordando che $T(\mathbb{R}) \equiv \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Basta richiedere che la funzione $dF$ sia definita da:

$$dF : p \longmapsto d_pF = \mathrm{pr}_2 \circ T_p(F) \in T^*_p(A)$$

Si verifica facilmente che il differenziale esterno gode delle seguenti proprietà:

1. $d(F_1 + F_2) = dF_1 + dF_2$ per ogni $F_1, F_2 \in \mathbf{\Omega}^0(A)$;
2. $d(F_1\, F_2) = F_2\, dF_1 + F_1\, dF_2$ per ogni $F_1, F_2 \in \mathbf{\Omega}^0(A)$;
3. $dF = 0$ se e solo se $F \in \mathbf{\Omega}^0(A)$ è costante su ogni componente connessa di $A$;
4. per ogni funzione $f \in \mathcal{C}^\infty(A; B)$ e per ogni funzione $G \in \mathbf{\Omega}^0(B)$ si ha $f^*(dG) = d(f^*(G))$.

### 4.3 Fibrati di tensori covarianti

Lo *spazio dei tensori $k$–volte covarianti in un punto $p$* di uno spazio affine $\mathbf{A}$ è lo spazio

$$T^0_k(T_p(\mathbf{A})) = \{p\} \times T^0_k(\mathbf{E}) \equiv \{p\} \times (\mathbf{E}^*)^{\otimes k} \equiv \{p\} \times (\mathbf{E}^{\otimes k})^*.$$

Il *fibrato dei tensori $k$–volte covarianti* sullo spazio affine $\mathbf{A}$ è l'unione di tutti gli spazi dei tensori $k$–volte covarianti

$$T^0_k(\mathbf{A}) = \bigcup_{p \in \mathbf{A}} T^0_k(T_p(\mathbf{A})) \equiv \mathbf{A} \times (\mathbf{E}^*)^{\otimes k} \equiv \mathbf{A} \times (\mathbf{E}^{\otimes k})^*,$$

nei vari punti di $\mathbf{A}$.

Sul fibrato $T_k^0(\mathbf{A}) \equiv \mathbf{A} \times (\mathbf{E}^*)^{\otimes k} \equiv \mathbf{A} \times (\mathbf{E}^{\otimes k})^*$ consideriamo la topologia prodotto e, per il momento, non ci interessano possibili strutture come quella di spazio affine.

Se $U \subseteq \mathbf{A}$ è un sottoinsieme aperto di $\mathbf{A}$, possiamo definire

$$T_k^0(T_p(U)) = T_k^0(T_p(\mathbf{A})) \equiv \{p\}\times(\mathbf{E}^*)^{\otimes k} \equiv \{p\}\times(\mathbf{E}^{\otimes k})^* \, , \; T_k^0(U) = \bigcup_{p\in U} T_k^0(T_p(\mathbf{A})) \equiv U\times(\mathbf{E}^*)^{\otimes k} \equiv U\times(\mathbf{E}^{\otimes k})^*$$

L'insieme $T_k^0(U)$ è il fibrato dei tensori $k$–volte covarianti sull'aperto $U \subseteq \mathbf{A}$.

La proiezione naturale $\pi_{\mathbf{A}} : T_k^0(\mathbf{A}) \longrightarrow \mathbf{A}$ definita da $\underline{\boldsymbol{\omega}} \in T_k^0(T_p(\mathbf{A})) \Longrightarrow \pi_{\mathbf{A}}(\underline{\boldsymbol{\omega}}) = p$ è una funzione suriettiva, continua e aperta. Ovviamente, per le fibre $(\pi_{\mathbf{A}})^{-1}(p)$ della proiezione $\pi_{\mathbf{A}}$ si ha $(\pi_{\mathbf{A}})^{-1}(p) = T_k^0(T_p(\mathbf{A}))$. Inoltre si ha $(\pi_{\mathbf{A}})^{-1}(U) = T_k^0(U)$ e $\pi_U = (\pi_{\mathbf{A}})|_{T_k^0(U)}$.

Se $V \subseteq \mathbf{B}$ è un sottoinsieme aperto di uno spazio affine $\mathbf{B}$ modellato su uno spazio vettoriale $\mathbf{F}$, esiste un isomorfismo di spazi vettoriali fra $T_k^0(T_{(p,q)}(U \times V))$ e $T_k^0(T_p(U)) \times T_k^0(T_q(V))$ che induce un omeomorfismo fra $T_k^0(U \times V)$ e $T_k^0(U) \times T_k^0(V)$ e fra le proiezioni $\pi_{U\times V}$ e $\pi_U \times \pi_V$.

Data una funzione $f \in \mathcal{C}^\infty(A; B)$, possiamo considerare i prodotti cartesiani

$$[{}^t(T_p(f))]^k : [T^*_{f(p)}(B)]^k \longrightarrow [T^*_p(A)]^k,$$

ed i prodotti tensoriali

$$[{}^t(T_p(f))]^{\otimes k} : [T^*_{f(p)}(B)]^{\otimes k} \longrightarrow [T^*_p(A)]^{\otimes k} \, ,$$

ma si può definire una funzione $T^0_k(T_p(f)) : T^0_k(T_p(A)) \longrightarrow T^0_k(T_{f(p)}(B))$ con proprietà analoghe a quelle della mappa tangente $T_p(f)$ se solo se $T_p(f) : T_p(A) \longrightarrow T_{f(p)}(B)$ è invertibile. Se $f \in \mathcal{C}^\infty(A; B)$ è un diffeomorfismo possiamo definire la mappa $T^0_k(f) : T^0_k(A) \longrightarrow T^0_k(B)$, che è a sua volta un diffeomorfismo, che rende commutativo il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd} T^0_k(A) \arrow[r, "T^0_k(f)"] \arrow[d, "\pi_A"] & T^0_k(B) \arrow[d, "\pi_B"'] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

e tale che: $T^0_k(g \circ f) = T^0_k(g) \circ T^0_k(f)$, $T^0_k(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{T^0_k(A)}$ e $T^0_k(f^{-1}) = (T^0_k(f))^{-1}$.

### 4.4 Campi di tensori covarianti

I *campi di tensori k–volte covarianti* su un aperto $A$ di uno spazio affine $\mathbf{A}$ sono le sezioni del fibrato $T^0_k(A)$, cioè: le funzioni $\underline{\boldsymbol{\sigma}} : A \longrightarrow T^0_k(A)$ tali che $\pi_A \circ \underline{\boldsymbol{\sigma}} = \mathrm{id}_A$. Ricordiamo che, per come è definito $T^0_k(A)$, le sue sezioni sono in corrispondenza biunivoca con le funzioni $\underline{\hat{\boldsymbol{\sigma}}} : A \longrightarrow (\mathbf{E}^*)^{\otimes k}$. La corrispondenza biunivoca è data da $\underline{\boldsymbol{\sigma}} \longmapsto \underline{\hat{\boldsymbol{\sigma}}} = \mathrm{pr}_2 \circ \underline{\boldsymbol{\sigma}}$, con funzione inversa $\underline{\hat{\boldsymbol{\sigma}}} \longmapsto \underline{\boldsymbol{\sigma}} = (\mathrm{id}_A, \underline{\hat{\boldsymbol{\sigma}}})$.

L'insieme delle sezioni di classe $\mathcal{C}^\infty$ di $T^0_k(A)$ verrà indicato con $\boldsymbol{\mathcal{T}}^0_k(A)$ e, per convenzione, definiamo $\boldsymbol{\mathcal{T}}^0_0(A) = \boldsymbol{\Omega}^0(A)$ e $\boldsymbol{\mathcal{T}}^0_1(A) = \boldsymbol{\Omega}^1(A)$. Gli insiemi $\boldsymbol{\mathcal{T}}^0_k(A)$ sono spazi vettoriali reali di dimensione infinita che hanno anche una struttura di modulo (libero di dimensione $\dim(A)^k$) sull'anello commutativo $\mathcal{C}^\infty(A;\mathbb{R})$.

Il *prodotto tensoriale* di due campi di tensori covarianti $\underline{\boldsymbol{\alpha}}_r \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^0_r(A)$ e $\underline{\boldsymbol{\beta}}_s \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^0_s(A)$ è il campo di tensori $\underline{\boldsymbol{\alpha}}_r \otimes \underline{\boldsymbol{\beta}}_s \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^0_{r+s}(A)$ definito da:

$$\underline{\boldsymbol{\alpha}}_r \otimes \underline{\boldsymbol{\beta}}_s : p \longmapsto \underline{\boldsymbol{\alpha}}_r(p) \otimes \underline{\boldsymbol{\beta}}_s(p)$$

Il prodotto tensoriale risulta essere una funzione bilineare per le strutture di moduli sull'anello commutativo $\mathcal{C}^\infty(A;\mathbb{R})$ e, quindi, anche per le strutture di spazi vettoriali di dimensione infinita su $\mathbb{R}$.

I moduli $\boldsymbol{\mathcal{T}}^0_k(A)$, con $k > 1$, sono isomorfi alle potenze tensoriali $k$–esime di $\mathcal{C}^\infty(A;\mathbb{R})$–moduli

$$(\boldsymbol{\Omega}^1(A))^{\otimes k} \equiv (\mathfrak{X}(A)^*)^{\otimes k} \equiv (\mathfrak{X}(A)^{\otimes k})^*.$$

L'operazione $\underline{\boldsymbol{\alpha}}_r \otimes \underline{\boldsymbol{\beta}}_s$ coincide col prodotto tensoriale $\otimes : (\mathfrak{X}(A)^*)^{\otimes r} \times (\mathfrak{X}(A)^*)^{\otimes s} \longrightarrow (\mathfrak{X}(A)^*)^{\otimes (r+s)}$.

Data una funzione $f \in \mathcal{C}^\infty(A,B)$ possiamo estendere le definizioni di $f^* : \boldsymbol{\Omega}^0(B) \longrightarrow \boldsymbol{\Omega}^0(A)$ e $f^* : \boldsymbol{\Omega}^1(B) \longrightarrow \boldsymbol{\Omega}^1(A)$ ad una funzione $f^* : \boldsymbol{\mathcal{T}}^0_k(B) \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{T}}^0_k(A)$, con $k > 1$. Per ogni $\underline{\boldsymbol{\sigma}} \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^0_k(B)$ definiamo la controimmagine $f^*(\underline{\boldsymbol{\sigma}})$ imponendo che

$$(f^*(\underline{\boldsymbol{\sigma}}))(p) : (\vec{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_k) \longmapsto \underline{\boldsymbol{\sigma}}(f(p))(T_p(f)(\vec{\boldsymbol{v}}_1), \ldots, T_p(f)(\vec{\boldsymbol{v}}_k)) \quad \forall p \in A \wedge \forall (\vec{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_k) \in (T_p(A))^k$$

o, equivalentemente,

$$(f^*(\underline{\boldsymbol{\sigma}}))(p) = \underline{\boldsymbol{\sigma}}(f(p)) \circ (T_p(f))^k$$

Si dimostra facilmente che per ogni $f \in \mathcal{C}^\infty(A, B)$ valgono le seguenti proprietà:

- $f^*(F_1\, \underline{\boldsymbol{\sigma}}_1 + F_2\, \underline{\boldsymbol{\sigma}}_2) = f^*(F_1)\, f^*(\underline{\boldsymbol{\sigma}}_1) + f^*(F_2)\, f^*(\underline{\boldsymbol{\sigma}}_2)$ per ogni $F_1, F_2 \in \mathcal{C}^\infty(B; \mathbb{R})$ e per ogni $\underline{\boldsymbol{\sigma}}_1, \underline{\boldsymbol{\sigma}}_2 \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^0_k(B)$;

- $f^*(\underline{\boldsymbol{\alpha}}_r \otimes \underline{\boldsymbol{\beta}}_s) = f^*(\underline{\boldsymbol{\alpha}}_r) \otimes f^*(\underline{\boldsymbol{\beta}}_s)$ per ogni $\underline{\boldsymbol{\alpha}}_r \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^0_r(B)$ e per ogni $\underline{\boldsymbol{\beta}}_s \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^0_s(B)$.

Quando $f \in \mathcal{C}^\infty(A; B)$ è un diffeomorfismo, il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd}
T^0_k(A) \arrow[r, "T^0_k(f)"] \arrow[d, "\pi_A"] & T^0_k(B) \arrow[d, "\pi_B"'] \\
A \arrow[r, "f"'] \arrow[u, bend left, "f^*(\underline{\boldsymbol{\sigma}})"] & B \arrow[u, bend right, "\underline{\boldsymbol{\sigma}}"']
\end{tikzcd}$$

è commutativo e le due frecce orizzontali sono dei diffeomorfismi. Possiamo costruire la funzione $f_* : \boldsymbol{\mathcal{T}}^0_k(A) \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{T}}^0_k(B)$ definendo l'immagine $f_*(\underline{\boldsymbol{\omega}})$ come $f_*(\underline{\boldsymbol{\omega}}) = T^0_k(f) \circ \underline{\boldsymbol{\omega}} \circ f^{-1}$ o, equivalentemente, definiamo $f_* = (f^{-1})^*$.

Quando $k > 1$ ci sono due sottomoduli molto importanti di $\boldsymbol{\mathcal{T}}^0_k(A)$: il sottomodulo dei campi di tensori simmetrici $\boldsymbol{\mathcal{S}}^0_k(A)$ ed il sottomodulo dei campi di tensori antisimmetrici $\boldsymbol{\Omega}^k(A)$.

### 4.4.1 Derivate di campi di tensori covarianti su spazi affini

Dato un campo di tensori covarianti $\underline{\boldsymbol{\sigma}}_k \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^0_k(A)$, consideriamo la funzione $\hat{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}_k : A \longrightarrow (\mathbf{E}^{\otimes k})^*$ ad esso associato. La derivata di $\hat{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}_k$ è una funzione $D(\hat{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}_k) : A \longrightarrow L(\mathbf{E}; (\mathbf{E}^{\otimes k})^*) \equiv (\mathbf{E}^{\otimes (k+1)})^*$ e ci permette di definire una sezione $\nabla(\underline{\boldsymbol{\sigma}}_k) \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^0_{k+1}(A) \equiv \boldsymbol{\mathcal{T}}^0_1(A) \otimes \boldsymbol{\mathcal{T}}^0_k(A)$:

$$\nabla(\underline{\boldsymbol{\sigma}}_k) : p \longmapsto (p, D(\hat{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}_k)(p))$$

La sezione $\nabla(\underline{\boldsymbol{\sigma}}_k)$ si può definire solo perché $A$ è un aperto di uno spazio affine $\mathbf{A}$ modellato su uno spazio vettoriale $\mathbf{E}$ (di dimensione finita).

Per quanto riguarda le controimmagini $f^*(\underline{\boldsymbol{\sigma}}_k)$ e $f^*(\nabla(\underline{\boldsymbol{\sigma}}_k))$ attraverso una funzione $f \in \mathcal{C}^\infty(B; A)$, si dimostra che:

- se $k = 0$ allora $\nabla(\underline{\boldsymbol{\sigma}}_0) \equiv d(\underline{\boldsymbol{\sigma}}_0)$ e per ogni $f$ si ha $f^*(\nabla(\underline{\boldsymbol{\sigma}}_0)) = \nabla(f^*(\underline{\boldsymbol{\sigma}}_0))$;
- quando $k > 0$ ed $f$ è una funzione affine, cioè $D^2(f) \equiv 0$, $\nabla(f^*(\underline{\boldsymbol{\sigma}}_k)) = f^*(\nabla(\underline{\boldsymbol{\sigma}}_k))$;
- quando $k > 0$ ed $f$ non è una funzione affine, in generale si ha $\nabla(f^*(\underline{\boldsymbol{\sigma}}_k)) \neq f^*(\nabla(\underline{\boldsymbol{\sigma}}_k))$.

### 4.4.2 Campi di tensori covarianti simmetrici

Diciamo che campo di tensori $\underline{\boldsymbol{\alpha}}_k \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^0_k(A)$ è simmetrico, e scriviamo $\underline{\boldsymbol{\alpha}}_k \in \boldsymbol{\mathcal{S}}^0_k(A)$, se e solo se per ogni punto $p \in A$ si ha $\underline{\boldsymbol{\alpha}}_k(p) \in S^0_k(T_p(A))$. Una definizione equivalente è che la funzione

$\underline{\boldsymbol{\alpha}}_k : \mathfrak{X}(A)^k \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(A;\mathbb{R})$, che è multilineare per le strutture di $\mathcal{C}^\infty(A;\mathbb{R})$–modulo, sia simmetrica. Se consideriamo due campi di tensori simmetrici $\underline{\boldsymbol{\alpha}}_r \in \boldsymbol{\mathcal{S}}^0_r(A)$ e $\underline{\boldsymbol{\beta}}_s \in \boldsymbol{\mathcal{S}}^0_s(A)$, in generale il campo di tensori $\underline{\boldsymbol{\alpha}}_r \otimes \underline{\boldsymbol{\beta}}_s$ non è simmetrico, ma possiamo simmetrizzarlo e definire il prodotto simmetrico

$$\underline{\boldsymbol{\alpha}}_r \odot \underline{\boldsymbol{\beta}}_s : p \longmapsto \underline{\boldsymbol{\alpha}}_r(p) \odot \underline{\boldsymbol{\beta}}_s(p)$$

L'operazione di prodotto simmetrico $\odot : \boldsymbol{\mathcal{S}}^0_r(A) \times \boldsymbol{\mathcal{S}}^0_s(A) \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{S}}^0_{r+s}(A)$ è associativa, commutativa e bilineare per le strutture di $\mathcal{C}^\infty(A;\mathbb{R})$–modulo. Si dimostra facilmente che per ogni $f \in \mathcal{C}^\infty(A,B)$ valgono le seguenti proprietà:

- $f^*(\underline{\boldsymbol{\sigma}}) \in \boldsymbol{\mathcal{S}}^0_k(A)$ per ogni $\underline{\boldsymbol{\sigma}} \in \boldsymbol{\mathcal{S}}^0_k(B)$;
- $f^*(F_1\,\underline{\boldsymbol{\sigma}}_1 + F_2\,\underline{\boldsymbol{\sigma}}_2) = f^*(F_1)\,f^*(\underline{\boldsymbol{\sigma}}_1) + f^*(F_2)\,f^*(\underline{\boldsymbol{\sigma}}_2)$ per ogni $F_1, F_2 \in \mathcal{C}^\infty(B;\mathbb{R})$ e per ogni $\underline{\boldsymbol{\sigma}}_1, \underline{\boldsymbol{\sigma}}_2 \in \boldsymbol{\mathcal{S}}^0_k(B)$;
- $f^*(\underline{\boldsymbol{\alpha}}_r \odot \underline{\boldsymbol{\beta}}_s) = f^*(\underline{\boldsymbol{\alpha}}_r) \odot f^*(\underline{\boldsymbol{\beta}}_s)$ per ogni $\underline{\boldsymbol{\alpha}}_r \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^0_r(B)$ e per ogni $\underline{\boldsymbol{\beta}}_s \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^0_s(B)$.

#### 4.4.3 Campi di tensori covarianti antisimmetrici (forme differenziali)

Diciamo che campo di tensori $\underline{\boldsymbol{\alpha}}_k \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^0_k(A)$ è antisimmetrico, e scriviamo $\underline{\boldsymbol{\alpha}}_k \in \boldsymbol{\Omega}^k(A)$, se e solo se per ogni punto $p \in A$ si ha $\underline{\boldsymbol{\alpha}}_k(p) \in A^0_k(T_p(A))$. Una definizione equivalente è che la funzione $\underline{\boldsymbol{\alpha}}_k : \mathfrak{X}(A)^k \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(A;\mathbb{R})$, che è multilineare per le strutture di $\mathcal{C}^\infty(A;\mathbb{R})$–modulo, sia antisimmetrica. I campi di tensori $\underline{\boldsymbol{\alpha}}_k \in \boldsymbol{\Omega}^k(A)$ vengono detti $k$-*forme differenziali* ed il numero $k$ viene detto *grado* della forma differenziale. Se consideriamo due forme differenziali $\underline{\boldsymbol{\alpha}}_r \in \boldsymbol{\Omega}^r(A)$ e $\underline{\boldsymbol{\beta}}_s \in \boldsymbol{\Omega}^s(A)$, in generale il campo di tensori $\underline{\boldsymbol{\alpha}}_r \otimes \underline{\boldsymbol{\beta}}_s$ non è antisimmetrico, ma possiamo antisimmetrizzarlo e definire il prodotto esterno

$$\underline{\boldsymbol{\alpha}}_r \wedge \underline{\boldsymbol{\beta}}_s : p \longmapsto \underline{\boldsymbol{\alpha}}_r(p) \wedge \underline{\boldsymbol{\beta}}_s(p)$$

L'operazione di prodotto esterno $\wedge : \boldsymbol{\Omega}^r(A) \times \boldsymbol{\Omega}^s(A) \longrightarrow \boldsymbol{\Omega}^{r+s}(A)$ è associativa e bilineare per le strutture di $\mathcal{C}^\infty(A;\mathbb{R})$–modulo. In generale, il prodotto esterno non è commutativo, ma $\underline{\boldsymbol{\beta}}_s \wedge \underline{\boldsymbol{\alpha}}_r = (-1)^{r\cdot s}\underline{\boldsymbol{\alpha}}_r \wedge \underline{\boldsymbol{\beta}}_s$. Si dimostra facilmente che per ogni $f \in \mathcal{C}^\infty(A,B)$ valgono le seguenti proprietà:

- se $\underline{\boldsymbol{\alpha}}_k \in \boldsymbol{\Omega}^k(B)$ allora $f^*(\underline{\boldsymbol{\alpha}}_k) \in \boldsymbol{\Omega}^k(A)$.
- $f^*(F_1\,\underline{\boldsymbol{\alpha}}_1 + F_2\,\underline{\boldsymbol{\alpha}}_2) = f^*(F_1)\,f^*(\underline{\boldsymbol{\alpha}}_1) + f^*(F_2)\,f^*(\underline{\boldsymbol{\alpha}}_2)$ per ogni $F_1, F_2 \in \mathcal{C}^\infty(B;\mathbb{R})$ e per ogni $\underline{\boldsymbol{\alpha}}_1, \underline{\boldsymbol{\alpha}}_2 \in \boldsymbol{\Omega}^k(B)$;
- $f^*(\underline{\boldsymbol{\alpha}}_r \wedge \underline{\boldsymbol{\beta}}_s) = f^*(\underline{\boldsymbol{\alpha}}_r) \wedge f^*(\underline{\boldsymbol{\beta}}_s)$ per ogni $\underline{\boldsymbol{\alpha}}_r \in \boldsymbol{\Omega}^r(B)$ e per ogni $\underline{\boldsymbol{\beta}}_s \in \boldsymbol{\Omega}^s(B)$.

Il *differenziale esterno* di una $k$–forma $\underline{\boldsymbol{\alpha}}_k \in \boldsymbol{\Omega}^k(B)$ viene definito come la $(k+1)$–forma

$$d(\underline{\boldsymbol{\alpha}}_k) = (k+1)A(\nabla(\underline{\boldsymbol{\alpha}}_k)) \in \boldsymbol{\Omega}^{k+1}(B)$$

Osserviamo che $\underline{\boldsymbol{\alpha}}_k : p \longmapsto (p, \underline{\hat{\boldsymbol{\alpha}}}_k(p))$, che $\nabla(\underline{\boldsymbol{\alpha}}_k) : p \longmapsto (p, D(\underline{\hat{\boldsymbol{\alpha}}}_k)(p))$, che $\nabla(\underline{\boldsymbol{\alpha}}_k) \in \boldsymbol{\Omega}^1(B)\otimes\boldsymbol{\Omega}^k(B)$ e che $d(\underline{\boldsymbol{\alpha}}_k) = p \longmapsto \Big(p, (k+1)A\big(\,D(\underline{\hat{\boldsymbol{\alpha}}}_k)(p)\,\big)\Big) \in \boldsymbol{\Omega}^{k+1}(B)$.

Si dimostra facilmente che:

- per ogni $\underline{\boldsymbol{\alpha}}_k \in \boldsymbol{\Omega}^k(B)$ si ha $d(d(\underline{\boldsymbol{\alpha}}_k)) \equiv \underline{\mathbf{0}}$;

- per ogni $\underline{\boldsymbol{\alpha}}_k, \underline{\boldsymbol{\beta}}_k \in \boldsymbol{\Omega}^k(B)$ si ha $d(\underline{\boldsymbol{\alpha}}_k + \underline{\boldsymbol{\beta}}_k) = d(\underline{\boldsymbol{\alpha}}_k) + d(\underline{\boldsymbol{\beta}}_k)$;

- per ogni $\underline{\boldsymbol{\alpha}}_r \in \boldsymbol{\Omega}^r(B)$ e per ogni $\underline{\boldsymbol{\beta}}_s \in \boldsymbol{\Omega}^s(B)$ si ha $d(\underline{\boldsymbol{\alpha}}_r \wedge \underline{\boldsymbol{\beta}}_s) = d(\underline{\boldsymbol{\alpha}}_r) \wedge \underline{\boldsymbol{\beta}}_s + (-1)^r \underline{\boldsymbol{\alpha}}_r \wedge d(\underline{\boldsymbol{\beta}}_s)$;

- per ogni $f \in \mathcal{C}^\infty(A; B)$ e per ogni $\underline{\boldsymbol{\beta}}_k \in \boldsymbol{\Omega}^k(B)$ si ha $f^*(d(\underline{\boldsymbol{\beta}}_k)) = d(f^*(\underline{\boldsymbol{\beta}}_k)) \in \boldsymbol{\Omega}^{k+1}(A)$.

Le $k$–forme $\underline{\boldsymbol{\alpha}}_k \in \boldsymbol{\Omega}^k(B)$ tali che $d(\underline{\boldsymbol{\alpha}}_k) = \underline{\mathbf{0}}$ vengono dette *$k$–forme chiuse*. Le *$k$–forme esatte* sono le $k$–forme $\underline{\boldsymbol{\alpha}}_k \in \boldsymbol{\Omega}^k(B)$ tali che esista una $(k-1)$–forma $\underline{\boldsymbol{\beta}}_{k-1} \in \boldsymbol{\Omega}^{k-1}(B)$ per cui $\underline{\boldsymbol{\alpha}}_k = d(\underline{\boldsymbol{\beta}}_{k-1})$. La $(k-1)$–forma $\underline{\boldsymbol{\beta}}_{k-1}$ non è unica perché per ogni forma chiusa $\underline{\boldsymbol{\sigma}}_{k-1} \in \boldsymbol{\Omega}^{k-1}(B)$ si ha $d(\underline{\boldsymbol{\beta}}_{k-1} + \underline{\boldsymbol{\sigma}}_{k-1}) = d(\underline{\boldsymbol{\beta}}_{k-1}) + d(\underline{\boldsymbol{\sigma}}_{k-1}) = d(\underline{\boldsymbol{\beta}}_{k-1}) = \underline{\boldsymbol{\alpha}}_k$.

Si dimostra che vale il *Lemma di Poincaré*: ogni forma chiusa è localmente esatta. Tradotto in un linguaggio più matematico: se $\underline{\boldsymbol{\alpha}}_k \in \boldsymbol{\Omega}^k(B)$ è chiusa allora per ogni punto $p \in B$ esistono un intorno aperto $U \subseteq B$ di $p$ ed una forma $\underline{\boldsymbol{\beta}}_{k-1} \in \boldsymbol{\Omega}^{k-1}(U)$ tale che[4] $d(\underline{\boldsymbol{\beta}}_{k-1}) = \underline{\boldsymbol{\alpha}}_k|_U$. Se l'aperto $B$ è semplicemente connesso allora si può supporre sempre che sia $U = B$. In caso contrario l'aperto $U \subseteq B$ più grande possibile dipende dalla topologia di $B$ (numero e dimensione dei buchi) e dalla forma $\underline{\boldsymbol{\alpha}}_k$.

[4] La dimostrazione la vedremo più avanti nel contesto più generale della *formula di omotopia*.

# 5 Sottovarietà di uno spazio affine

Dato uno spazio affine $\mathbf{A}$, modellato su di uno spazio vettoriale $\mathbf{E}$ di dimensione $n$, possiamo considerare alcuni sottoinsiemi speciali di $\mathbf{A}$ che chiameremo *sottovarietà differenziabili (di classe $\mathcal{C}^\infty$)* di $\mathbf{A}$. Le sottovarietà che studieremo sono le sottovarietà aperte, le sottovarietà chiuse, le sottovarietà con bordo e le sottovarietà di sottovarietà. Le sottovarietà sono oggetti che generalizzano le curve differenziabili in $\mathbb{R}^2$ che sono dotate in ogni punto di retta tangente, le superfici di $\mathbb{R}^3$ che sono dotate in ogni punto di piano tangente oppure le ipersuperfici di $\mathbb{R}^k$ che in ogni punto hanno iperpiano tangente.

Le sottovarietà aperte di $\mathbf{A}$ sono semplicemente i sottoinsiemi aperti di $U \subseteq \mathbf{A}$. Sulle sottovarietà aperte di $\mathbf{A}$ possiamo ripetere tutto quello che abbiamo visto fino ad ora.

## 5.1 Sistemi di coordinate cartesiane su uno spazio affine

Ricordiamo che un riferimento (orientato) in uno spazio affine $\mathbf{A}$ modellato su di uno spazio vettoriale reale $\mathbf{E}$, di dimensione $n$, è una coppia $(O, (\vec{\boldsymbol{e}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{e}}_n)) \in \mathbf{A} \times \mathcal{B}(\mathbf{E})$. Il punto $O \in \mathbf{A}$ viene detto *origine del riferimento* mentre la base $(\vec{\boldsymbol{e}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{e}}_n) \in \mathcal{B}(\mathbf{E})$ è la *base associata al riferimento*.

La funzione $\psi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbf{A}$ definita da $\psi(x^1, \ldots, x^n) = O + x^i\, \vec{\boldsymbol{e}}_i$ è una funzione affine e biiettiva. La funzione inversa $\varphi = \psi^{-1} : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ è definita da: $\varphi(P) = (\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^1(P - O), \ldots, \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^n(P - O))$ ed è anch'essa una funzione affine. Gli $n$ numeri reali $x^i = \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^i(P - O)$ sono le *coordinate cartesiane* del punto $P \in \mathbf{A}$ rispetto al riferimento $(O, (\vec{\boldsymbol{e}}_1, \dots, \vec{\boldsymbol{e}}_n))$ e la funzione $\varphi : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ viene detta *sistema di coordinate cartesiane* sullo spazio affine $\mathbf{A}$.

Dati due sistemi di coordinate cartesiane $(\mathbf{A}, \varphi_1)$ e $(\mathbf{A}, \varphi_2)$ su uno spazio affine $\mathbf{A}$, possiamo definire i due isomorfismi affini $\varphi_{21} = \varphi_2 \circ (\varphi_1)^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ e $\varphi_{12} = \varphi_1 \circ (\varphi_2)^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ che sono uno l'inverso dell'altro:

$$\varphi_{12} \circ \varphi_{21} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} \qquad \text{e} \qquad \varphi_{21} \circ \varphi_{12} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$$

Gli isomorfismi affini $\varphi_{21} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ e $\varphi_{12} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ vengono detti trasformazioni di coordinate cartesiane ed il diagramma

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{A} \arrow[dl, "\varphi_1"'] \arrow[dr, "\varphi_2"] & \\
\mathbb{R}^n \arrow[rr, bend right, "\varphi_{21}"'] & & \mathbb{R}^n \arrow[ll, bend right, "\varphi_{12}"']
\end{tikzcd}$$

è commutativo.

Le funzioni affini tra due spazi affini di dimensione finita sono funzioni polinomiali di primo grado: hanno derivata prima costante e tutte le derivate di ordine superiore si annullano. Possiamo, quindi, affermare che tutti gli isomorfismi affini considerati sono anche diffeomorfismi.

Se consideriamo un terzo sistema di coordiante cartesiane $(\mathbf{A}, \varphi_3)$ si ha:

$$\varphi_{32} \circ \varphi_{21} = \varphi_{31} \qquad \text{o equivalentemente} \qquad \varphi_{13} \circ \varphi_{32} \circ \varphi_{21} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$$

e tutte le altre identità che ne conseguono. Il diagramma

$$\begin{tikzcd}
& \mathbf{A} \arrow[dl, "\varphi_1"'] \arrow[d, "\varphi_2"] \arrow[dr, "\varphi_3"] & \\
\mathbb{R}^n \arrow[r, "\varphi_{21}"] \arrow[rr, bend right, "\varphi_{31}"'] & \mathbb{R}^n \arrow[r, "\varphi_{32}"] & \mathbb{R}^n
\end{tikzcd}$$

è commutativo.

Se consideriamo i sottoinsiemi di $\mathbf{A}$ definiti implicitamente da equazioni del tipo $x^1 = 0, \ldots, x^k = 0$, con $1 \leq k \leq n$, dove le funzioni $x^1, \ldots, x^k$ sono le prime $k$ coordinate di un sistema di coordinate cartesiane $(x^1, \ldots, x^n)$ otteniamo tutti i sottospazi affini di $\mathbf{A}$ di codimensione $k$ o dimensione $n-k$.

### 5.2 Sistemi di coordinate locali su aperti di spazi affini

Per definire le sottovarietà chiuse dobbiamo prima definire i sistemi di coordinate locali attorno ai punti di uno spazio affine.

Un sistema di coordinate locali attorno ad un punto $p \in \mathbf{A}$ è una coppia $(U, \varphi)$ dove $U \subseteq \mathbf{A}$ è un intorno aperto del punto $p \in \mathbf{A}$, $\varphi$ è una funzione di classe $\mathcal{C}^\infty$ a valori in $\mathbb{R}^n$ tale che $V = \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ sia un sottoinsieme aperto e che $\varphi : U \longrightarrow V$ sia un diffeomorfismo.

A volte si preferisce, o conviene, definire i sistemi di coordinate come le coppie $(V, \psi)$ dove $V \subseteq \mathbb{R}^n$ è un sottoinsieme aperto, $U = \psi(V)$ è un intorno aperto del punto $p \in \mathbf{A}$ e $\psi : V \longrightarrow U$ è un diffeomorfismo.

Le due definizioni sono equivalenti in quanto dato $(U, \varphi)$ basta considerare $V = \varphi(U)$ e $\psi = \varphi^{-1}$ o, equivalentemente, dato $(V, \psi)$ basta considerare $U = \psi(V)$ e $\varphi = \psi^{-1}$.

Dati due sistemi di coordinate locali $(U_1, \varphi_1)$ e $(U_2, \varphi_2)$ attorno ad un punto $p \in \mathbf{A}$, l'intersezione $U_{12} = U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ è un intorno aperto del punto $p$. Le due immagini $W_1 = \varphi_1(U_{12}) \subseteq V_1 = \varphi_1(U_1)$ e $W_2 = \varphi_2(U_{12}) \subseteq V_2 = \varphi_2(U_2)$ sono sottoinsiemi aperti di $\mathbb{R}^n$. Possiamo definire due diffeomorfismi $\varphi_{21} = \varphi_2 \circ (\varphi_1)^{-1} : W_1 \longrightarrow W_2$ e $\varphi_{12} = \varphi_1 \circ (\varphi_2)^{-1} : W_2 \longrightarrow W_1$ che sono uno l'inverso dell'altro:

$$\varphi_{12} \circ \varphi_{21} = \mathrm{id}_{W_1} \qquad \text{e} \qquad \varphi_{21} \circ \varphi_{12} = \mathrm{id}_{W_2}$$

I diffeomorfismi $\varphi_{21} : W_1 \longrightarrow W_2$ e $\varphi_{12} : W_2 \longrightarrow W_1$ vengono detti trasformazioni di coordinate ed il diagramma

$$
\begin{tikzcd}
& U_{12} \arrow[dl, "\varphi_1"'] \arrow[dr, "\varphi_2"] & \\
W_1 \arrow[rr, bend right, "\varphi_{21}"'] & & W_2 \arrow[ll, bend right, "\varphi_{12}"']
\end{tikzcd}
$$

è commutativo

Se consideriamo un terzo sistema di coordinate locali $(U_3, \varphi_3)$ attorno al punto $p \in \mathbf{A}$, l'intersezione $U_{123} = U_1 \cap U_2 \cap U_3 \neq \emptyset$ è un intorno aperto del punto $p$. Le tre immagini $W_1 = \varphi_1(U_{123}) \subseteq V_1 = \varphi_1(U_1)$, $W_2 = \varphi_2(U_{123}) \subseteq V_2 = \varphi_2(U_2)$ e $W_3 = \varphi_3(U_{123}) \subseteq V_3 = \varphi_3(U_3)$ sono sottoinsiemi aperti di $\mathbb{R}^n$. I diffeomorfismi $\varphi_{ji} = \varphi_j \circ (\varphi_i)^{-1} : W_i \longrightarrow W_j$ sono ben definiti e soddisfano alle identità

$$\varphi_{rj} \circ \varphi_{ji} = \varphi_{ri} \qquad \text{o, equivalentemente,} \qquad \varphi_{ir} \circ \varphi_{rj} \circ \varphi_{ji} = \mathrm{id}_{W_i} \equiv \varphi_{ii}.$$

Il diagramma

$$\begin{tikzcd}
& U_{123} \arrow[dl, "\varphi_1"'] \arrow[d, "\varphi_2"] \arrow[dr, "\varphi_3"] & \\
W_1 \arrow[r, "\varphi_{21}"] \arrow[rr, bend right, "\varphi_{31}"'] & W_2 \arrow[r, "\varphi_{32}"] & W_3
\end{tikzcd}$$

è commutativo.

Le coordinate associate ad un sistema di coordinate $(U, \varphi)$ sono le $n$ funzioni di classe $x^i \in \mathcal{C}^\infty(U; \mathbb{R})$ definite da $x^i = \mathrm{pr}_i \circ \varphi$. Molte volte il sistema di coordinate $(U, \varphi)$ verrà indicato con $(U, x^1, \ldots, x^n)$. Le $n$ funzioni $x^i : U \longrightarrow \mathbb{R}$ sono (funzionalmente) indipendenti nel senso che i loro differenziali sono linearmente indipendenti o, equivalentemente, la $n$–forma $d(x^1) \wedge \ldots \wedge d(x^n)$ è diversa da $\underline{\mathbf{0}}$ in tutti i punti dell'aperto $U$.

Il teorema del rango ci permette di costruire sistemi di coordinate a partire un numero minore di $n$ di funzioni indipendenti. Consideriamo $k$ funzioni $x^1, \ldots, x^k \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R})$, dove $U$ è un intorno aperto del punto $p$ e $1 \leq k < n$. Se le $k$ funzioni $x^1, \ldots, x^k$ sono indipendenti nel punto $p$, cioè se e solo se $\left(d(x^1) \wedge \ldots \wedge d(x^k)\right)\Big|_p \neq \underline{\mathbf{0}}$. Per continuità, esiste un intorno aperto $U'$ del punto $p$ tale che $U' \subseteq U$ e che le funzioni siano indipendenti in tutti i punti di $U'$. Quindi, la funzione

$f : U' \longrightarrow \mathbb{R}^k$ definita da $p \longmapsto (x^1(p), \ldots, x^k(p))$ ha rango costante $k$. Il teorema del rango ci permette di affermare che esistono un intorno aperto $U''$ del punto $p$, con $U'' \subseteq U'$, ed $n-k$ funzioni $x^{k+1}, \ldots, x^n \in \mathcal{C}^\infty(U'', \mathbb{R}^n)$ tali che $d(x^1) \wedge \ldots \wedge d(x^k) \wedge d(x^{k+1}) \wedge \ldots \wedge d(x^n) \neq \underline{\mathbf{0}}$ in tutti i punti di $U''$. Detto in un altro modo, $(U'', x^1, \ldots, x^k, x^{k+1}, \ldots, x^n)$ è un sistema di coordinate locali attorno al punto $p$. Indicando con $g : U'' \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ la funzione definita da $p \longmapsto (x^{k+1}(p), \ldots, x^n(p))$, che ha rango costante $n-k$, il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd} U'' \arrow[r, "(f,g)"] \arrow[dr, "f"'] & \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"] \\ & \mathbb{R}^k \end{tikzcd}$$

è commutativo

Ovviamente, assegnate le $k$ funzioni $x^1, \ldots, x^k$, esistono infinite scelte possibili per le funzioni $x^{k+1}, \ldots, x^n$.

### 5.3 Sottovarietà (di classe $\mathcal{C}^\infty$) di uno spazio affine

Diciamo che un sottoinsieme $S$ di uno spazio affine $\mathbf{A}$, di dimensione $n$, è una *sottovarietà di codimensione $k$, o di dimensione $n-k$,* se vale la seguente proprietà: per ogni punto $p \in S$ esiste un sistema di coordinate $(U, \varphi) = (U, x^1, \ldots, x^n)$, di classe $\mathcal{C}^\infty$, attorno a $p$ tale che l'intersezione

$\tilde{U} = S \cap U$ sia il sottoinsieme di $U$ in cui si annullano le prime $k$ coordinate. Questo vuole dire che $\tilde{U}$ è definito *implicitamente* dalle equazioni $x^1 = 0, \ldots, x^k = 0$. I sistemi di coordinate $(U, \varphi)$ di questo tipo saranno detti sistemi di coordinate *adattati alla sottovarietà* $S$.

Definendo $\tilde{\varphi} = \varphi|_{\tilde{U}}$ si ha che $\tilde{V} = \tilde{\varphi}(\tilde{U})$ può essere identificato in modo naturale con un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^{n-k}$ e la funzione $\tilde{\varphi} : \tilde{U} \longrightarrow \tilde{V}$ è un omeomorfismo fra il sottoinsieme aperto $\tilde{U} \subseteq S$ ed il sottoinsieme aperto $\tilde{V} \subseteq \mathbb{R}^{n-k}$. La funzione inversa $\tilde{\psi} = (\tilde{\varphi})^{-1} : \tilde{V} \longrightarrow \tilde{U}$ fornisce una *rappresentazione parametrica* dei punti $p$ di $\tilde{U}$ con le coordinate (cartesiane standard) $(x^{k+1}, \ldots, x^n)$ dei punti di $\tilde{V} \subseteq \mathbb{R}^{n-k}$.

Se consideriamo due sistemi di coordinate $(U_1, \varphi_1)$ e $(U_2, \varphi_2)$ adattati alla sottovarietà $S$ e tali che $\tilde{U}_{12} = \tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_2 \neq \emptyset$ allora:

1. gli insiemi $\tilde{W}_1 = \tilde{\varphi}_1(\tilde{U}_{12})$ e $\tilde{W}_2 = \tilde{\varphi}_2(\tilde{U}_{12})$ sono aperti di $\mathbb{R}^{n-k}$,

2. le due funzioni $\tilde{\varphi}_{21} = \tilde{\varphi}_2 \circ (\tilde{\varphi}_1)^{-1} : \tilde{W}_1 \longrightarrow \tilde{W}_2$ e $\tilde{\varphi}_{12} = \tilde{\varphi}_1 \circ (\tilde{\varphi}_2)^{-1} : \tilde{W}_2 \longrightarrow \tilde{W}_1$ sono diffeomorfismi.

Per definire le sottovarietà *analitiche reali* bisogna chiedere che i sistemi di coordinate $(U, \varphi)$ utilizzati siano analitici o, equivalentemente, che le coordinate $x^i : U \longrightarrow V$ siano funzioni analitiche. In questo caso le funzioni $\tilde{\varphi}_{21}$ e $\tilde{\varphi}_{12}$ sono diffeomorfismi analitici.

Se ora consideriamo un terzo sistema di coordinate $(U_3, \varphi_3)$ adattato alla sottovarietà $S$ e tale che

$$\tilde{U}_{123} = \tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_2 \cap \tilde{U}_3 = U_{123} \cap S \neq \emptyset$$

il diagramma

$$\begin{tikzcd}
 & & \tilde{U}_{123} \arrow[dll, "\tilde{\varphi}_1"'] \arrow[d, "\tilde{\varphi}_2"] \arrow[drr, "\tilde{\varphi}_3"] & & \\
\tilde{W}_1 \arrow[rr, "\tilde{\varphi}_{21}"] \arrow[rrrr, bend right, "\tilde{\varphi}_{31}"'] & & \tilde{W}_2 \arrow[rr, "\tilde{\varphi}_{32}"] & & \tilde{W}_3
\end{tikzcd}$$

è commutativo.

**FINE LEZIONE 9 MMdFC (2023-03-21 ore 11:00 – 13:00)**

## Riferimenti bibliografici

[1] N. Bourbaki, *Espaces vectoriels topologiques, Chapitres 1 et 2*; Hermann, Paris, 1966.

[2] J. Dieudonné: *Éléments d'analyse 1 / Fondements de l'analyse moderne*; Gauthier–Villars, Paris, 1969.

[3] J. E. Marsden, T. Ratiu, R. Abraham: *Manifolds, tensor analysis and applications, Third Edition*; Springer–Verlag, 2001.

[4] M. Ferraris: *A New Approach to Differential Calculus in Locally Convex Spaces*; Atti Accad. Sci. Torino, Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., 113, 1979, 77-83.

[5] M. Ferraris: *Appunti di algebra lineare, multilineare e tensori*; 2023.