1.3 Esempi di varietà.

Spazi vettoriali. Come primi esempi di varietà possiamo considerare gli spazi vettoriali di dimensione finita su $\mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$). In questi casi possiamo definire atlanti con una sola carta $\{(\mathbf{E}, \beta)\}$ dove $\beta : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ è la funzione lineare biiettiva associata ad una base $(\vec{\boldsymbol{e}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{e}}_n)$ dello spazio vettoriale $\mathbf{E}$. Possiamo considerare un atlante composto da tutte carte associate a basi di $\mathbf{E}$: $\mathcal{A} = \{(\mathbf{E}, \beta_{\mathfrak{b}}) \,|\, \mathfrak{b} = (\vec{\boldsymbol{e}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{e}}_n) \in \mathcal{B}(\mathbf{E})\}$. L'atlante massimale per la struttura naturale di varietà di classe $\mathcal{C}^\infty$ su $\mathbf{E}$ è costituito da tutte le coppie (U, φ) dove φ è un sistema di coordinate locali su un aperto $U \subseteq \mathbf{E}$ (diffeomorfismo fra l'aperto U di $\mathbf{E}$ e l'aperto $\varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$). Se ci limitiamo al caso in cui i diffeomorfismi φ sono funzioni analitiche reali otteniamo l'atlante massimale per la struttura naturale di varietà di classe $\mathcal{C}^\omega$ su $\mathbf{E}$.

Sottovarietà aperte di uno spazio vettoriale. Su ogni sottoinsieme aperto $A \subseteq \mathbf{E}$ possiamo definire l'atlante massimale naturale per una struttura di varietà di classe $\mathcal{C}^\infty$ o $\mathcal{C}^\omega$ prendendo solo le carte (U, φ) dell'atlante massimale naturale di $\mathbf{E}$ in cui il dominio U è contenuto in A.

Sottovarietà di codimensione k di uno spazio vettoriale. Le sottovarietà S di codimensione k di uno spazio vettoriale $\mathbf{E}$ o di uno spazio affine $\mathbf{A}$ sono un esempio di varietà differenziabili di classe $\mathcal{C}^k$ ($\mathcal{C}^\infty$, $\mathcal{C}^\omega$) dove le carte sono quelle costruite a partire da carte (U, φ) compatibili con la sottovarietà S e che abbiamo indicato con $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ nella Sezione 5.3 di [8].

Prodotto cartesiano di varietà differenziali. Il prodotto cartesiano di due varietà differenziabili di classe $\mathcal{C}^k$ ($k > 0$, $k = \infty$ e $k = \omega$) $(M, \mathfrak{A})$ ed $(N, \mathfrak{B})$ ha una struttura naturale di varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$ ($k > 0$, $k = \infty$ e $k = \omega$) dove lo spazio topologico sottostante è $M \times N$ e l'atlante non massimale è $\mathfrak{A} \boxtimes \mathfrak{B} := \{(U \times V, \varphi \times \psi) \mid (U, \varphi) \in \mathfrak{A} \wedge (V, \psi) \in \mathfrak{B}\}$. Si ha $\dim(M \times N) = \dim(M) + \dim(N)$.

1.4 Sottovarietà di codimensione s di una varietà.

Se $(M, \mathcal{A})$ è una varietà differenziabile di dimensione m e di classe $\mathcal{C}^k$ (risp. $\mathcal{C}^\infty$, $\mathcal{C}^\omega$), le sottovarietà di codimensione 0 (o dimensione m) sono i sottoinsiemi aperti S di M. L'atlante massimale $\mathcal{A}$ di M induce un atlante massimale $\mathcal{A}_S = \{(U, \varphi) \in \mathcal{A} \mid U \subseteq S\}$. Se si parte da un atlante non massimale $\mathfrak{A}$ allora l'atlante indotto su S è definito da $\mathfrak{A}_S = \{(U|_S, \varphi|_S) \mid (U, \varphi) \in \mathfrak{A}\}$.

Le sottovarietà di codimensione m (o dimensione 0) sono i punti di M, i sottoinsiemi finiti di punti di M o i sottoinsiemi numerabili di punti di M che non hanno punti di accumulazione (la topologia indotta è la topologia discreta).

Per le sottovarietà di codimensione s con $0 < s < m$ (o dimensione $m - s$ con $0 < m - s < m$) possiamo procedere come nella Sezione 5.3 di [8].

Definizione 1.5. *Diciamo che un sottoinsieme S di una varietà differenziabile M, di dimensione m, è una* sottovarietà di codimensione s, o di dimensione $m - s$, *se vale la seguente proprietà: per ogni punto $p \in S$ esiste un sistema di coordinate $(U, \varphi) = (U, x^1, \ldots, x^m)$, di classe $\mathcal{C}^k$ ($\mathcal{C}^\infty$, $\mathcal{C}^\omega$) attorno a*

p tale che l'intersezione $\tilde{U} = S \cap U$ sia il sottoinsieme di U in cui si annullano le prime s coordinate. Questo vuole dire che $\tilde{U}$ è definito implicitamente *dalle equazioni $x^1 = 0, \dots, x^s = 0$. I sistemi di coordinate (U, φ) di questo tipo saranno detti sistemi di coordinate* adattati alla sottovarietà *S.*

Definendo $\tilde{\varphi} = \varphi|_{\tilde{U}}$ si ha che $\tilde{V} = \tilde{\varphi}(\tilde{U})$ può essere identificato in modo naturale con un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^{m-s}$ e la funzione $\tilde{\varphi} : \tilde{U} \longrightarrow \tilde{V}$ è un omeomorfismo fra il sottoinsieme aperto $\tilde{U} \subseteq S$ ed il sottoinsieme aperto $\tilde{V} \subseteq \mathbb{R}^{m-s}$. La funzione inversa $\tilde{\psi} = (\tilde{\varphi})^{-1} : \tilde{V} \longrightarrow \tilde{U}$ fornisce una *rappresentazione parametrica* dei punti p di $\tilde{U}$ con le coordinate (cartesiane standard) $(x^{s+1}, \dots, x^m)$ dei punti di $\tilde{V} \subseteq \mathbb{R}^{m-s}$.

Se consideriamo due sistemi di coordinate (U_1, φ_1) e (U_2, φ_2) adattati alla sottovarietà S e tali che $\tilde{U}_{12} = \tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_2 \neq \emptyset$ allora:

1. gli insiemi $\tilde{W}_1 = \tilde{\varphi}_1(\tilde{U}_{12})$ e $\tilde{W}_2 = \tilde{\varphi}_2(\tilde{U}_{12})$ sono aperti di $\mathbb{R}^{m-s}$,

2. le due funzioni $\tilde{\varphi}_{21} = \tilde{\varphi}_2 \circ (\tilde{\varphi}_1)^{-1} : \tilde{W}_1 \longrightarrow \tilde{W}_2$ e $\tilde{\varphi}_{12} = \tilde{\varphi}_1 \circ (\tilde{\varphi}_2)^{-1} : \tilde{W}_2 \longrightarrow \tilde{W}_1$ sono diffeomorfismi.

Per definire le sottovarietà *analitiche reali* bisogna chiedere che i sistemi di coordinate (U, φ) utilizzati siano analitici o, equivalentemente, che le coordinate $x^i : U \longrightarrow V$ siano funzioni analitiche. In questo caso le funzioni $\tilde{\varphi}_{21}$ e $\tilde{\varphi}_{12}$ sono diffeomorfismi analitici.

Se ora consideriamo un terzo sistema di coordinate (U_3, φ_3) adattato alla sottovarietà S e tale che

$$\tilde{U}_{123} = \tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_2 \cap \tilde{U}_3 = U_{123} \cap S \neq \emptyset$$

il diagramma

$$\begin{tikzcd}
 & \tilde{U}_{123} \arrow[dl, "\tilde{\varphi}_1"'] \arrow[d, "\tilde{\varphi}_2"] \arrow[dr, "\tilde{\varphi}_3"] & \\
\tilde{W}_1 \arrow[r, "\tilde{\varphi}_{21}"] \arrow[rr, bend right, "\tilde{\varphi}_{31}"'] & \tilde{W}_2 \arrow[r, "\tilde{\varphi}_{32}"] & \tilde{W}_3
\end{tikzcd}$$

è commutativo.

Se facciamo variare la carta (U, φ) fra le carte dell'atlante massimale $\mathcal{A}$ di M che sono compatibili con la sottovarietà S, le carte $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ sono le carte dell'atlante massimale $\mathcal{A}_S$ per la struttura di varietà indotta da $(M, \mathcal{A})$ su S.

2 Funzioni differenziabili

Date due varietà differenziabili $(X, \mathcal{A})$ e $(Y, \mathcal{B})$ possiamo definire le funzioni di classe $\mathcal{C}^k$, $\mathcal{C}^\infty$ e, se le due varietà sono analitiche reali, le funzioni di classe $\mathcal{C}^\omega$ (analitiche reali). L'insieme delle funzioni continue $\mathcal{C}(X; Y)$ verrà indicato con $\mathcal{C}^0(X; Y)$.

Definizione 2.1. *Date due varietà differenziabili* $(X, \mathcal{A})$*, di dimensione* n*, e* $(Y, \mathcal{B})$*, di dimensione* m*, diciamo che una* funzione continua $f : X \longrightarrow Y$ è una funzione di classe $\mathcal{C}^k$ (risp. $\mathcal{C}^\infty$, $\mathcal{C}^\omega$) *se per ogni carta* $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ *e per ogni carta* $(V, \psi) \in \mathcal{B}$ *tali che, se esiste, la funzione* $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ *sia di classe* $\mathcal{C}^k$ *(risp.* $\mathcal{C}^\infty$, $\mathcal{C}^\omega$*). Quando esiste, la funzione* $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ *viene detta* rappresentazione della funzione f attraverso le due carte (U, φ) e (V, ψ)*. La definizione funziona anche se i due atlanti massimali* $\mathcal{A}$ *e* $\mathcal{B}$ *vengono sostituite da due atlanti più piccoli* $\mathfrak{A} \subseteq \mathcal{A}$ *e* $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{B}$*.*

Per ogni punto $x \in X$ indichiamo con $y = f(x) \in Y$. Possiamo affermare che per ogni carta $(V, \psi) \in \mathcal{B}$ tale che $y \in V$ esiste una carta $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ tale che $x \in U$ e che $f(U) \subseteq V$. Con queste carte possiamo considerare il diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f"'] & \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n \arrow[d, "\psi\circ f\circ\varphi^{-1}"] \\
V \arrow[r, "\psi"'] & \psi(V) \subseteq \mathbb{R}^m
\end{tikzcd}$$

Se consideriamo una carta $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ tale che $x \in U$ ma tale che $f(U) \nsubseteq V$ possiamo sostituire la carta (U, φ) con la carta (U', φ') dove $U' = U \cap f^{-1}(V)$ e $\varphi' = \varphi|_{U'}$.

L'insieme delle funzioni di classe $\mathcal{C}^k$ (risp. $\mathcal{C}^\infty$, $\mathcal{C}^\omega$) da $(X, \mathcal{A})$ in $(Y, \mathcal{B})$ verrà indicato con $\mathcal{C}^k(X;Y)$ (risp. $\mathcal{C}^\infty(X;Y)$, $\mathcal{C}^\omega(X;Y)$). Si dimostra facilmente che se $(Z, \mathcal{K})$ è una terza varietà allora per ogni funzione $f \in \mathcal{C}^k(X;Y)$ e per ogni funzione $g \in \mathcal{C}^k(Y;Z)$ si ha $g \circ f \in \mathcal{C}^k(X;Z)$ ($k \in \mathbb{N}$, $k = \infty$, $k = \omega$).

L'insieme $\mathcal{C}^k(X;\mathbb{K})$ ha una struttura naturale di anello commutativo con unità che contiene come sottoanello il campo $\mathbb{K}$ e che ha divisori dello zero. Quando X è una varietà analitica reale connessa, nell'anello $\mathcal{C}^\omega(X;\mathbb{K})$ non ci sono divisori dello zero[1].

Un *diffeomorfismo di class $\mathcal{C}^k$ (risp. $\mathcal{C}^\infty$, $\mathcal{C}^\omega$)* è un omeomorfismo $f \in \mathcal{C}^k(X;Y)$ tale che $f^{-1} \in \mathcal{C}^k(Y;X)$ (risp. $\mathcal{C}^\infty$, $\mathcal{C}^\omega$). Un diffeomorfismo viene anche detto *isomorfismo di varietà differenziabili.*

[1] L'insieme $\mathcal{C}^\omega(X;\mathbb{K})$ potrebbe essere ridotto alle sole funzioni costanti, cioè al campo $\mathbb{K}$.

Una funzione $f : M \longrightarrow N$ è di classe $\mathcal{C}^k$ (risp. $\mathcal{C}^\infty$, $\mathcal{C}^\omega$) se e solo se il grafico $G(f) = \{(p,q) \in M \times N \mid q = f(p)\}$ è una sottovarietà di classe $\mathcal{C}^k$ (risp. $\mathcal{C}^\infty$, $\mathcal{C}^\omega$) della varietà prodotto $M \times N$. Il grafico $G(f)$ è una sottovarietà di codimensione $\dim(N)$ ed è diffeomorfa ad M.

3 Vettori tangenti, spazi tangenti e mappe tangenti

Ci sono vari modi di definire cosa sono i vettori tangenti in un punto p di una varietà differenziabile M di dimensione m. Noi vedremo la definizione come classi di equivalenza di curve differenziabili che passano per il punto p. Le altre definizioni verranno dedotte in seguito.

Definizione 3.1 (Curve basate)**.** *Una curva differenziabile* basata *in un punto $p \in M$ è una funzione $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(I, M)$ dove $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo aperto tale che $0 \in I \subseteq \mathbb{R}$ e $\gamma(0) = p$.*

Per verificare se γ è una curva differenziabile *basata* in un punto $p \in M$ basta scegliere una carta (U, φ) attorno al punto p e verificare che la curva $\varphi \circ \gamma : I \longrightarrow \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^m$ sia una curva differenziabile basata nel punto $\varphi(p) \in \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^m$ (in generale l'intervallo aperto I deve essere ridotto in modo tale che sia $\gamma(I) \subset U$).

Definizione 3.2 (Vettori tangenti)**.** *Diremo che due curve differenziabili γ_1 e γ_2 basate in un punto $p \in M$* hanno lo stesso vettore tangente in p *se per una carta (U, φ) le due curve $\varphi \circ \gamma_1$ e $\varphi \circ \gamma_2$ (che sono basate in $\varphi(p)$), hanno lo stesso vettore tangente in $\varphi(p)$. Cioè, tali che $D(\varphi \circ \gamma_1)(0) = D(\varphi \circ \gamma_2)(0)$.*

La relazione così definita è una relazione di equivalenza e le classi di equivalenza $[\gamma]$ vengono dette vettori tangenti ad M nel punto p.

Definizione 3.3 (Spazi tangenti)**.** *L'insieme $T_p(M)$ dei vettori tangenti ad M in un suo punto p viene detto* spazio tangente ad M nel punto p. *Gli spazi tangenti $T_p(M)$ sono a due a due disgiunti.*

Dato un punto $p \in M$ ed una carta (U, φ) attorno al punto p la funzione $T_p(\varphi) : T_p(M) \longrightarrow T_{\varphi(p)}(\mathbb{R}^m)$ definita da

$$T_p(\varphi)([\gamma]) = (\varphi(p), D(\varphi \circ \gamma)(0))$$

è biiettiva.

L'iniettività della funzione $T_p(\varphi)$ deriva dalla definizione delle classi d'equivalenza $[\gamma] \in T_p(M)$. La suriettività viene invece dal fatto che per ogni $\vec{\boldsymbol{v}} \in \mathbb{R}^m$ la curva $\gamma_{p,\vec{\boldsymbol{v}}} : t \longmapsto \varphi^{-1}(\varphi(p) + t\vec{\boldsymbol{v}})$ ha una classe di equivalenza $[\gamma_{p,\vec{\boldsymbol{v}}}] \in T_p(M)$ tale che $T_p(\varphi)([\gamma_{p,\vec{\boldsymbol{v}}}]) = (\varphi(p), \vec{\boldsymbol{v}})$.

Con la funzione biiettiva $T_p(\varphi)$ possiamo trasportare su $T_p(M)$ la struttura di spazio vettoriale di

$$T_{\varphi(p)}(\mathbb{R}^m) := \{\varphi(p)\} \times \mathbb{R}^m \equiv \mathbb{R}^m$$

La commutatività del diagramma

$$\begin{tikzcd}
& T_p(M) \arrow[dl, "T_p(\varphi_1)"'] \arrow[dr, "T_p(\varphi_2)"] & \\
T_{\varphi_1(p)}(\mathbb{R}^m) \arrow[rr, bend right, "T_{\varphi_1(p)}(\varphi_{21})"'] & & T_{\varphi_2(p)}(\mathbb{R}^m) \arrow[ll, bend right, "T_{\varphi_2(p)}(\varphi_{12})"']
\end{tikzcd}$$

ci permette di dimostrare che la struttura di spazio vettoriale su $T_p(M)$ non dipende dalla carta scelta. Basta infatti osservare che le due funzioni lineari $T_{\varphi_1(p)}(\varphi_{21})$ e $T_{\varphi_2(p)}(\varphi_{12})$ sono una l'iversa dell'altra e sono, quindi, isomorfismi di spazi vettoriali. Con questa struttura di spazio vettoriale su $T_p(M)$ le funzioni $T_p(\varphi)$ diventano degli isomorfismi di spazi vettoriali con $\mathbb{R}^m$.

Data una funzione differenziabile $f : M \longrightarrow N$ di classe $\mathcal{C}^k$ ($\mathcal{C}^\infty$, $\mathcal{C}^\omega$) fra due varietà differenziabili M ed N possiamo definire la mappa tangente $T_p(f)$ osservando che

$$\gamma_1, \gamma_2 \in [\gamma] \in T_p(M) \quad \Longrightarrow \quad [f \circ \gamma_1] = [f \circ \gamma_2] \in T_{f(p)}(N)$$

Definizione 3.4 (Mappa tangente in un punto). *La* mappa tangente $T_p(f) : T_p(M) \longrightarrow T_{f(p)}(N)$ *di una funzione f in un punto p viene definita da* $T_p(f)([\gamma]) := [f \circ \gamma] \in T_{f(p)}(N)$.

La commutatività del diagramma

$$\begin{tikzcd} T_p(M) \arrow[r, "T_p(f)"] \arrow[d, "T_p(\varphi)"'] & T_{f(p)}(N) \arrow[d, "T_{f(p)}(\psi)"] \\ T_{\varphi(p)}(\mathbb{R}^m) \arrow[r, "T_{\varphi(p)}(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})"'] & T_{\psi(f(p))}(\mathbb{R}^n) \end{tikzcd}$$

ci permette di affermare che $T_p(f) : T_p(M) \longrightarrow T_{f(p)}(N)$ è una funzione lineare perché la freccia in basso è lineare e le due frecce verticali sono lineari ed invertibili.

Definizione 3.5 (Rango in un punto)**.** *Il rango $rg_p(f)$ di una funzione differenziabile $f : M \longrightarrow N$ di classe $\mathcal{C}^k$ ($\mathcal{C}^\infty$, $\mathcal{C}^\omega$) in un punto p è il rango della sua mappa tangente $T_p(f)$.*

La funzione $p \longmapsto \mathrm{rg}_p(f)$ ha le stesse proprietà della funzione rango per funzioni fra aperti di spazi vettoriali o affini. Siccome $\mathrm{rg}_p(f) = \mathrm{rg}_{\varphi(p)}(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})$ e, quando $m = n$

$$\det(T_p(f)) = \det(T_{f(p)}(\psi))^{-1} \det(T_{\varphi(p)}(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})) \det(T_p(\varphi)),$$

possiamo dimostrare la validità di teoremi come il teorema dalla funzione inversa, il teorema della funzione implicita ed il teorema del rango deducendoli dagli stessi teoremi dimostrabili per le funzioni del tipo $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$.

4 Fibrato tangente e mappe tangenti

In analogia con quanto fatto nella Sezione 3.2 di [8] possiamo definire il fibrato tangente di una varietà $(X, \mathcal{A})$ di classe $\mathcal{C}^\infty$, o $\mathcal{C}^\omega$, come l'unione (che è disgiunta per costruzione)

$$T(M) = \bigcup_{p \in M} T_p(M)$$

di tutti gli spazi tangenti nei punti di M. Se $U \subset M$ è un sottoinsieme aperto non vuoto allora $T_p(U) = T_p(M)$ e, quindi, $T(U) \subset T(M)$. La proiezione naturale $\tau_M : T(M) \longrightarrow M$ definita da $\vec{\boldsymbol{v}} \in T_p(M) \Longrightarrow \tau_M(\vec{\boldsymbol{v}}) = p$ è una funzione suriettiva e per ogni punto $p \in M$ si ha $(\tau_M)^{-1}(p) = T_p(M)$. Inoltre, per ogni aperto non vuoto $U \subset M$ si ha: $T(U) = (\tau_M)^{-1}(U)$ e $\tau_U = \tau_M|_{T(U)}$.

Date due varietà differenziabili M, N ed una funzione differenziabile $f : M \longrightarrow N$ possiamo definire la mappa tangente $T(f)$ di f come l'unica funzione $T(f) : T(M) \longrightarrow T(N)$ definita da $T(f)|_{T_p(M)} = T_p(f)$. Si ha il seguente diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
T(M) \arrow[r, "T(f)"] \arrow[d, "\tau_M"'] & T(N) \arrow[d, "\tau_N"] \\
M \arrow[r, "f"'] & N
\end{tikzcd}$$

Se f è un diffeomorfismo allora anche la funzione $T(f)$ è un diffeomorfismo.

Il fibrato tangente $T(M)$ di una varietà differenziabile M, di dimensione m, ha una struttura naturale di varietà differenziabile di dimensione $\dim(T(M)) = 2\,m$. Per dimostrarlo procediamo come segue.

Dato un atlante $\mathfrak{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ per la struttura di varietà di M consideriamo tutte le coppie $(T(U_\alpha), T(\varphi_\alpha))$. Per ogni indice $\alpha \in A$ la biiezione $T(\varphi_\alpha)$ permette di trasportare sull'insieme $T(U_\alpha)$ la struttura di varietà differenziabile di $T(\varphi_\alpha(U_\alpha)) \equiv \varphi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^m \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$. La topologia su $T(M)$ indotta dall'atlante $\mathfrak{A}$ è definita come la topologia più fine che induce su ogni $T(U_\alpha)$ la topologia indotta dalla biiezione $T(\varphi_\alpha)$. Si dimostra che $T(\mathfrak{A}) = \{(T(U_\alpha), T(\varphi_\alpha))\}_{\alpha\in A}$ è un atlante per una struttura di varietà differenziabile (si veda [5] per la dimostrazione) che è indotta in modo naturale dalla struttura di varietà differenziabile di M.

Dato un sistema di coordinate (U, x^i) su M, il sistema di coordinate naturali indotte su $T(M)$ verrà indicato con $(T(U), x^i, \dot{x}^j)$ o con $(T(U), x^i, v^j)$ oppure con altre notazioni simili. Le trasformazioni di coordinate naturali di questo tipo si deducono dalle trasformazioni di coordinate su M: partendo da una trasformazione di coordinate locali

$$\varphi_{21} : (x^i) \longmapsto (x'^{i'} = f^{i'}(x^i))$$

su M, la trasformazione di coordinate naturali indotta su $T(M)$ è

$$T(\varphi_{21}) : (x^i, v^j) \longmapsto (x'^{i'}, v'^{j'}) = \left(f^{i'}(x^i), v^j \frac{\partial f^{j'}}{\partial x^j}(x) \right)$$

Per quanto riguarda la classe di differenziabilità possiamo affermare che se M è una varietà di classe $\mathcal{C}^\infty$ (o $\mathcal{C}^\omega$) allora anche $T(M)$ è una varietà di classe $\mathcal{C}^\infty$ (o $\mathcal{C}^\omega$). Se, invece, M è una varietà di classe $\mathcal{C}^k$ allora $T(M)$ è una varietà di classe $\mathcal{C}^{k-1}$. In particolare:

- quando $f \in \mathcal{C}^k(M;N)$ si ha $T(f) \in \mathcal{C}^{k-1}(T(M);T(N))$,
- quando $f \in \mathcal{C}^\infty(M;N)$ si ha $T(f) \in \mathcal{C}^\infty(T(M);T(N))$
- quando $f \in \mathcal{C}^\omega(M;N)$ si ha $T(f) \in \mathcal{C}^\omega(T(M);T(N))$.

Infine, se f è un diffeomorfismo di classe $\mathcal{C}^\infty$ (o $\mathcal{C}^\omega$) la funzione $T(f)$ è anch'essa un diffeomorfismo di classe $\mathcal{C}^\infty$ (o $\mathcal{C}^\omega$) e $T(f)^{-1} = T(f^{-1})$.

5 Proiezioni e varietà fibrate

Fra le varietà che utilizzeremo più spesso ci sono le varietà fibrate e i fibrati differenziabili.

Definizione 5.1 (Varietà fibrata). *Una varietà fibrata di classe* $\mathcal{C}^k$ *(*$k > 0$*,* $k = \infty$ *e* $k = \omega$*) è una terna* (Y, M, π) *dove*

- *la* base M *è una varietà, di dimensione* $m = \dim(M)$*, di classe* $\mathcal{C}^k$ *(*$k > 0$*,* $k = \infty$ *e* $k = \omega$*),*
- *lo* spazio totale Y *è una varietà, di dimensione* $\dim(Y) = m + n$*, di classe* $\mathcal{C}^k$ *(*$k > 0$*,* $k = \infty$ *e* $k = \omega$*),*

- *la* proiezione π *è una funzione, di classe* $\mathcal{C}^k$ *(*$k > 0$, $k = \infty$ *e* $k = \omega$*), suriettiva e di rango costante* $rg(\pi) = m$*.*

l'ultima condizione equivale a chiedere che la mappa tangente $T(\pi) : T(Y) \longrightarrow T(M)$ sia suriettiva.

Sulle varietà fibrate ci sono dei sistemi di coordinate speciali, dette *coordinate fibrate*, che esistono come conseguenza del teorema del rango. I sistemi di coordinate fibrate sono coppie $((V, \psi), (U, \varphi))$ dove (V, ψ) è un sistema di coordinate attorno ad un punto $p \in Y$, (U, φ) è un sistema di coordinate attorno al punto $q = \pi(p) \in M$, $\pi(V) \subseteq U$ e tali che il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"] \\ U \arrow[r, "\varphi"'] & \mathbb{R}^m \end{tikzcd}$$

sia commutativo. Un metodo molto comune di costruire coordinate fibrate attorno ad un punto $p \in Y$ è quello di partire da un sistema di coordinate $(U, x^1, \ldots, x^m)$ attorno al punto $q = \pi(p) \in M$ e di aggiungere n funzioni $(y^1, \ldots, y^n)$ definite in un intorno aperto V di $p \in Y$ e tali che $(V, x^\alpha \circ \pi, y^i)$, con $\alpha = 1, \ldots, m$ e $i = 1, \ldots, n$, sia un sistema di coordinate attorno al punto $p \in Y$. Per non appesantire troppo la notazione, le coordinate $\bar{x}^\alpha = x^\alpha \circ \pi$ su Y verranno indicate semplicemente con x^α (tanto sarà sempre chiaro se le funzioni x^α sono funzioni $x^\alpha : V \longrightarrow \mathbb{R}$ o se sono funzioni $x^\alpha : U = \pi(V) \longrightarrow \mathbb{R}$).

Per ogni punto $q \in M$ la fibra Y_q di Y sul punto $q \in M$ è la sottovarietà $Y_q = \pi^{-1}(q)$, di dimensione n, definita localmente da m equazioni $x^\alpha =$ costante, dove (x^α, y^i) è un sistema di coordinate fibrate di Y attorno ad un punto $p \in Y_q \subset Y$. Le funzioni y^i sono coordinate attorno a p sulla fibra Y_q.

Le trasformazioni di coordinate fibrate su Y sono funzioni del tipo $\psi_{21} : (x, y) \longmapsto (x'(x), y'(x, y))$ tali che

$$\det\left(\frac{\partial x'^{\alpha'}(x)}{\partial x^\alpha}\right) \neq 0 \qquad \text{e} \qquad \det\left(\frac{\partial y'^{i'}(x,y)}{\partial y^i}\right) \neq 0$$

Esempio 5.1. [prodotti cartesiani di varietà differenziabili.] Le due proiezioni del prodotto cartesiano $\mathrm{pr}_1 : M \times N \longrightarrow M$ e $\mathrm{pr}_2 : M \times N \longrightarrow N$ sono funzioni differenziabili suriettive di classe $\mathcal{C}^k$ ($k > 0$, $k = \infty$ e $k = \omega$) di rango costante: $\mathrm{rg}(\mathrm{pr}_1) = \dim(M)$ e $\mathrm{rg}(\mathrm{pr}_2) = \dim(N)$ che definiscono due strutture naturali di varietà fibrata. Le carte di un atlante del tipo $\mathfrak{A} \boxtimes \mathfrak{B}$ sono sistemi di coordinate fibrate naturali su $M \times N$ per entrambe le proiezioni. Le trasformazioni di coordinate fibrate di questo tipo sono funzioni $(x, y) \longmapsto (x'(x), y'(y))$.

Esempio 5.2. [prodotti cartesiani di varietà fibrate.]
Se consideriamo due varietà fibrate $\pi : Y \longrightarrow M$ e $\rho : Z \longrightarrow N$, allora il prodotto cartesiano $Y \times Z$ ha una struttura naturale di varietà fibrata sul prodotto cartesiano $M \times N$ con proiezione $\pi \times \rho$.

Esempio 5.3. [fibrato tangente di una varietà differenziabile.]

Il fibrato tangente $T(M)$ di una varietà differenziabile M ha una struttura naturale di varietà fibrata su M. Le coordinate naturali su $T(M)$ sono coordinate fibrate naturali che conservano la struttura di spazio vettoriale delle fibre $T_p(M) = (\tau_M)^{-1}(p)$.

Esempio 5.4. [controimmagine di una varietà fibrata.]

Consideriamo una varietà differenziabile N ed una varietà fibrata $\pi : Y \longrightarrow M$. Per ogni funzione $f \in \mathcal{C}^\infty(N; M)$ possiamo definire la *controimmagine*

$$f^*(Y) = \{(p,q) \in N \times Y \mid f(p) = \pi(q)\} \equiv \bigsqcup_{p \in N} Y_{f(p)} \equiv (\mathrm{id}_N \times \pi)^{-1}(G(f)).$$

La controimmagine $f^*(Y)$ è una sottovarietà differenziabile di $N \times Y$ ed ha una struttura naturale di varietà fibrata su N che viene dalla prima proiezione $\mathrm{pr}_1 : N \times Y \longrightarrow N$ del prodotto cartesiano.

Esempio 5.5. [prodotti cartesiani fibrati di varietà fibrate.]

Se consideriamo due varietà fibrate $\pi : Y \longrightarrow M$ e $\rho : Z \longrightarrow M$ sulla stessa varietà di base M, allora la varietà fibrata prodotto cartesiano $\pi \times \rho : Y \times Z \longrightarrow M \times M$ contiene una sottovarietà (fibrata)

$$Y \times_{_M} Z = (\pi \times \rho)^{-1}(G(\mathrm{id}_M)) \equiv \bigcup_{p \in M} Y_p \times Z_p$$

che ha una struttura naturale di varietà fibrata su M. La varietà fibrata $\pi \times_{M} \rho : Y \times_{M} Z \longrightarrow M$, dove $\pi \times_{M} \rho = (\pi \times \rho)|_{Y \times_{M} Z}$, viene detta *prodotto cartesiano fibrato* delle due varietà fibrate $\pi : Y \longrightarrow M$ e $\rho : Z \longrightarrow M$.

FINE LEZIONE 11 MMdFC (2023-03-31 ore 16:00 – 18:00)

Riferimenti bibliografici

[1] S. Kobayashi, K. Nomizu: *Foundations of Differential Geometry, Vol. I*; John Wiley & Sons, New York · Chichester · Brisbane · Toronto · Singapore, 1963.

[2] S. Kobayashi, K. Nomizu: *Foundations of Differential Geometry, Vol. II*; John Wiley & Sons, New York · Chichester · Brisbane · Toronto, 1969.

[3] J. Dieudonné: *Éléments d'analyse 1 / Fondements de l'analyse moderne*; Gauthier–Villars, Paris, 1969.

[4] J. Dieudonné: *Éléments d'analyse 2*; Gauthier–Villars, Paris, 1969.

[5] J. Dieudonné: *Éléments d'analyse 3*; Gauthier–Villars, Paris, 1969.

[6] J. E. Marsden, T. Ratiu, R. Abraham: *Manifolds, tensor analysis and applications, Third Edition*; Springer–Verlag, 2001.

[7] M. Ferraris: *Appunti di algebra lineare, multilineare e tensori*; 2023.

[8] M. Ferraris: *Appunti di calcolo differenziale*; 2023.