10 Campi di tensori covarianti

I *campi di tensori k–volte covarianti* su un aperto $U \subseteq M$ di una varietà M sono le sezioni del fibrato $T^0_k(U)$, cioè: le funzioni $\underline{\boldsymbol{\sigma}} : U \longrightarrow T^0_k(U)$ tali che $\pi_U \circ \underline{\boldsymbol{\sigma}} = \mathrm{id}_U$. Ricordiamo che, come per tutti i fibrati vettoriali, esistono sezioni globali di classe $\mathcal{C}^\infty$.

L'insieme delle sezioni di classe $\mathcal{C}^\infty$ di $T^0_k(M)$ verrà indicato con $\boldsymbol{\mathcal{T}}^0_k(M)$. Per convenzione, definiamo $\boldsymbol{\mathcal{T}}^0_0(M) = \boldsymbol{\Omega}^0(M)$ e $\boldsymbol{\mathcal{T}}^0_1(M) = \boldsymbol{\Omega}^1(M)$. Gli insiemi $\boldsymbol{\mathcal{T}}^0_k(M)$ sono spazi vettoriali reali di dimensione infinita che hanno anche una struttura di modulo sull'anello commutativo $\mathcal{C}^\infty(M;\mathbb{R})$.

Il *prodotto tensoriale* di due campi di tensori covarianti $\underline{\boldsymbol{\alpha}}_r \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^0_r(M)$ e $\underline{\boldsymbol{\beta}}_s \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^0_s(M)$ è il campo di tensori $\underline{\boldsymbol{\alpha}}_r \otimes \underline{\boldsymbol{\beta}}_s \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^0_{r+s}(M)$ definito da:

$$\underline{\boldsymbol{\alpha}}_r \otimes \underline{\boldsymbol{\beta}}_s : p \longmapsto \underline{\boldsymbol{\alpha}}_r(p) \otimes \underline{\boldsymbol{\beta}}_s(p)$$

Il prodotto tensoriale risulta essere una funzione bilineare per le strutture di moduli sull'anello commutativo $\mathcal{C}^\infty(M;\mathbb{R})$ e, quindi, anche per le strutture di spazi vettoriali di dimensione infinita su $\mathbb{R}$.

I moduli $\boldsymbol{\mathcal{T}}^0_k(M)$, con $k > 1$, sono isomorfi alle potenze tensoriali k–esime di $\mathcal{C}^\infty(M;\mathbb{R})$–moduli

$$(\boldsymbol{\Omega}^1(M))^{\otimes k} \equiv (\mathfrak{X}(M)^*)^{\otimes k} \equiv (\mathfrak{X}(M)^{\otimes k})^*.$$

L'operazione $\underline{\boldsymbol{\alpha}}_r \otimes \underline{\boldsymbol{\beta}}_s$ coincide col prodotto tensoriale $\otimes : (\mathfrak{X}(M)^*)^{\otimes r} \times (\mathfrak{X}(M)^*)^{\otimes s} \longrightarrow (\mathfrak{X}(M)^*)^{\otimes (r+s)}$.

Data una funzione $f \in \mathcal{C}^\infty(M,N)$ possiamo estendere le definizioni di $f^* : \boldsymbol{\Omega}^0(N) \longrightarrow \boldsymbol{\Omega}^0(M)$ e di $f^* : \boldsymbol{\Omega}^1(N) \longrightarrow \boldsymbol{\Omega}^1(M)$ ad una funzione $f^* : \boldsymbol{\mathcal{T}}^0_k(N) \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{T}}^0_k(M)$, con $k > 1$. Per ogni $\underline{\boldsymbol{\sigma}} \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^0_k(N)$ definiamo la controimmagine $f^*(\underline{\boldsymbol{\sigma}})$ imponendo che

$$(f^*(\underline{\boldsymbol{\sigma}}))(p) : (\vec{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_k) \longmapsto \underline{\boldsymbol{\sigma}}(f(p))(T_p(f)(\vec{\boldsymbol{v}}_1), \ldots, T_p(f)(\vec{\boldsymbol{v}}_k)) \;\; \forall p \in M \wedge \forall (\vec{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_k) \in (T_p(M))^k$$

o, equivalentemente,

$$(f^*(\underline{\boldsymbol{\sigma}}))(p) = \underline{\boldsymbol{\sigma}}(f(p)) \circ (T_p(f))^k$$

Si dimostra facilmente che per ogni $f \in \mathcal{C}^\infty(M,N)$ valgono le seguenti proprietà:

- $f^*(F_1\,\underline{\boldsymbol{\sigma}}_1 + F_2\,\underline{\boldsymbol{\sigma}}_2) = f^*(F_1)\,f^*(\underline{\boldsymbol{\sigma}}_1) + f^*(F_2)\,f^*(\underline{\boldsymbol{\sigma}}_2)$ per ogni $F_1, F_2 \in \mathcal{C}^\infty(N;\mathbb{R})$ e per ogni $\underline{\boldsymbol{\sigma}}_1, \underline{\boldsymbol{\sigma}}_2 \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^0_k(N)$;
- $f^*(\underline{\boldsymbol{\alpha}}_r \otimes \underline{\boldsymbol{\beta}}_s) = f^*(\underline{\boldsymbol{\alpha}}_r) \otimes f^*(\underline{\boldsymbol{\beta}}_s)$ per ogni $\underline{\boldsymbol{\alpha}}_r \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^0_r(N)$ e per ogni $\underline{\boldsymbol{\beta}}_s \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^0_s(N)$.

Quando $f \in \mathcal{C}^\infty(M;N)$ è un diffeomorfismo, il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd}
T^0_k(M) \arrow[r, "T^0_k(f)"] \arrow[d, "\pi_M"] & T^0_k(N) \arrow[d, "\pi_N"'] \\
M \arrow[r, "f"'] \arrow[u, bend left, "f^*(\underline{\boldsymbol{\sigma}})"] & N \arrow[u, bend right, "\underline{\boldsymbol{\sigma}}"']
\end{tikzcd}$$

è commutativo e le due frecce orizzontali sono dei diffeomorfismi. Possiamo costruire la funzione $f_* : \boldsymbol{\mathcal{T}}^0_k(M) \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{T}}^0_k(N)$ definendo l'immagine $f_*(\underline{\boldsymbol{\omega}})$ come $f_*(\underline{\boldsymbol{\omega}}) = T^0_k(f) \circ \underline{\boldsymbol{\omega}} \circ f^{-1}$ o, equivalentemente, definiamo $f_* = (f^{-1})^*$.

Quando $k > 1$ ci sono due sottomoduli molto importanti di $\boldsymbol{\mathcal{T}}^0_k(M)$: il sottomodulo dei campi di tensori simmetrici $\boldsymbol{\mathcal{S}}^0_k(M)$ ed il sottomodulo dei campi di tensori antisimmetrici $\boldsymbol{\Omega}^k(M)$. In maniera analoga a quanto visto in [8], le controimmagini di campi di tensori covarianti simmetrici (risp. antisimmetrici) sono campi di tensori covarianti simmetrici (risp. antisimmetrici).

Per il momento non è ancora possibile definire derivate di campi di tensori covarianti.

10.1 Campi di tensori covarianti simmetrici

Diciamo che campo di tensori $\underline{\boldsymbol{\alpha}}_k \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^0_k(M)$ è simmetrico, e scriviamo $\underline{\boldsymbol{\alpha}}_k \in \boldsymbol{\mathcal{S}}^0_k(M)$, se e solo se per ogni punto $p \in M$ si ha $\underline{\boldsymbol{\alpha}}_k(p) \in S^0_k(T_p(M))$. Una definizione equivalente è che la funzione $\underline{\boldsymbol{\alpha}}_k : \mathfrak{X}(M)^k \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(M;\mathbb{R})$, che è multilineare per le strutture di $\mathcal{C}^\infty(M;\mathbb{R})$–modulo, sia simmetrica. Se consideriamo due campi di tensori simmetrici $\underline{\boldsymbol{\alpha}}_r \in \boldsymbol{\mathcal{S}}^0_r(M)$ e $\underline{\boldsymbol{\beta}}_s \in \boldsymbol{\mathcal{S}}^0_s(M)$, in generale il campo di tensori $\underline{\boldsymbol{\alpha}}_r \otimes \underline{\boldsymbol{\beta}}_s$ non è simmetrico, ma possiamo simmetrizzarlo e definire il prodotto simmetrico

$$\underline{\boldsymbol{\alpha}}_r \odot \underline{\boldsymbol{\beta}}_s : p \longmapsto \underline{\boldsymbol{\alpha}}_r(p) \odot \underline{\boldsymbol{\beta}}_s(p)$$

L'operazione di prodotto simmetrico $\odot : \boldsymbol{\mathcal{S}}^0_r(M) \times \boldsymbol{\mathcal{S}}^0_s(M) \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{S}}^0_{r+s}(M)$ è associativa, commutativa e bilineare per le strutture di $\mathcal{C}^\infty(M;\mathbb{R})$–modulo. Si dimostra facilmente che per ogni $f \in \mathcal{C}^\infty(M,N)$

valgono le seguenti proprietà:

- $f^*(\underline{\boldsymbol{\sigma}}) \in \boldsymbol{\mathcal{S}}^0_k(M)$ per ogni $\underline{\boldsymbol{\sigma}} \in \boldsymbol{\mathcal{S}}^0_k(N)$;

- $f^*(F_1\, \underline{\boldsymbol{\sigma}}_1 + F_2\, \underline{\boldsymbol{\sigma}}_2) = f^*(F_1)\, f^*(\underline{\boldsymbol{\sigma}}_1) + f^*(F_2)\, f^*(\underline{\boldsymbol{\sigma}}_2)$ per ogni $F_1, F_2 \in \mathcal{C}^\infty(N;\mathbb{R})$ e per ogni $\underline{\boldsymbol{\sigma}}_1, \underline{\boldsymbol{\sigma}}_2 \in \boldsymbol{\mathcal{S}}^0_k(N)$;

- $f^*(\underline{\boldsymbol{\alpha}}_r \odot \underline{\boldsymbol{\beta}}_s) = f^*(\underline{\boldsymbol{\alpha}}_r) \odot f^*(\underline{\boldsymbol{\beta}}_s)$ per ogni $\underline{\boldsymbol{\alpha}}_r \in \boldsymbol{\mathcal{S}}^0_r(N)$ e per ogni $\underline{\boldsymbol{\beta}}_s \in \boldsymbol{\mathcal{S}}^0_s(N)$.

Per il momento non è ancora possibile definire derivate di campi di tensori covarianti simmetrici.

10.2 Campi di tensori covarianti antisimmetrici (forme differenziali)

Diciamo che campo di tensori $\underline{\boldsymbol{\alpha}}_k \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^0_k(M)$ è antisimmetrico, e scriviamo $\underline{\boldsymbol{\alpha}}_k \in \boldsymbol{\Omega}^k(M)$, se e solo se per ogni punto $p \in M$ si ha $\underline{\boldsymbol{\alpha}}_k(p) \in A^0_k(T_p(M))$. Una definizione equivalente è che la funzione $\underline{\boldsymbol{\alpha}}_k : \mathfrak{X}(M)^k \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(M;\mathbb{R})$, che è multilineare per le strutture di $\mathcal{C}^\infty(M;\mathbb{R})$–modulo, sia antisimmetrica. I campi di tensori $\underline{\boldsymbol{\alpha}}_k \in \boldsymbol{\Omega}^k(M)$ vengono detti *k-forme differenziali* ed il numero k viene detto *grado* della forma differenziale. Se consideriamo due forme differenziali $\underline{\boldsymbol{\alpha}}_r \in \boldsymbol{\Omega}^r(M)$ e $\underline{\boldsymbol{\beta}}_s \in \boldsymbol{\Omega}^s(M)$, in generale il campo di tensori $\underline{\boldsymbol{\alpha}}_r \otimes \underline{\boldsymbol{\beta}}_s$ non è antisimmetrico, ma possiamo antisimmetrizzarlo e definire il prodotto esterno

$$\underline{\boldsymbol{\alpha}}_r \wedge \underline{\boldsymbol{\beta}}_s : p \longmapsto \underline{\boldsymbol{\alpha}}_r(p) \wedge \underline{\boldsymbol{\beta}}_s(p)$$

L'operazione di prodotto esterno $\wedge : \mathbf{\Omega}^r(M) \times \mathbf{\Omega}^s(M) \longrightarrow \mathbf{\Omega}^{r+s}(M)$ è associativa e bilineare per le strutture di $\mathcal{C}^\infty(M;\mathbb{R})$–modulo. In generale, il prodotto esterno non è commutativo, ma $\underline{\boldsymbol{\beta}}_s \wedge \underline{\boldsymbol{\alpha}}_r = (-1)^{r\cdot s}\underline{\boldsymbol{\alpha}}_r \wedge \underline{\boldsymbol{\beta}}_s$. Si dimostra facilmente che per ogni $f \in \mathcal{C}^\infty(M,N)$ valgono le seguenti proprietà:

- se $\underline{\boldsymbol{\alpha}}_k \in \mathbf{\Omega}^k(N)$ allora $f^*(\underline{\boldsymbol{\alpha}}_k) \in \mathbf{\Omega}^k(M)$.
- $f^*(F_1\,\underline{\boldsymbol{\alpha}}_1 + F_2\,\underline{\boldsymbol{\alpha}}_2) = f^*(F_1)\,f^*(\underline{\boldsymbol{\alpha}}_1) + f^*(F_2)\,f^*(\underline{\boldsymbol{\alpha}}_2)$ per ogni $F_1, F_2 \in \mathcal{C}^\infty(N;\mathbb{R})$ e per ogni $\underline{\boldsymbol{\alpha}}_1, \underline{\boldsymbol{\alpha}}_2 \in \mathbf{\Omega}^k(N)$;
- $f^*(\underline{\boldsymbol{\alpha}}_r \wedge \underline{\boldsymbol{\beta}}_s) = f^*(\underline{\boldsymbol{\alpha}}_r) \wedge f^*(\underline{\boldsymbol{\beta}}_s)$ per ogni $\underline{\boldsymbol{\alpha}}_r \in \mathbf{\Omega}^r(N)$ e per ogni $\underline{\boldsymbol{\beta}}_s \in \mathbf{\Omega}^s(N)$.

Per definire il *differenziale esterno* di una k–forma $\underline{\boldsymbol{\alpha}}_k \in \mathbf{\Omega}^k(M)$ possiamo procedere come segue. In una carta $\mathfrak{c} = (U,\varphi)$ di M possiamo definire il differenziale esterno $d_{(\mathfrak{c})}\left(\underline{\boldsymbol{\alpha}}_k|_U\right) \in \mathbf{\Omega}^{k+1}(U)$, associato alla carta $\mathfrak{c}$, con la formula

$$d_{(\mathfrak{c})}\left(\underline{\boldsymbol{\alpha}}_k|_U\right) := \varphi^*(d\left(\varphi_*(\underline{\boldsymbol{\alpha}}_k|_U)\right))$$

Se consideriamo due carte $\mathfrak{c}_1 = (U_1,\varphi_1)$ e $\mathfrak{c}_2 = (U_2,\varphi_2)$ tali che $U_{12} = U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, le $k+1$–forme $d_{(\mathfrak{c}_1)}\left(\underline{\boldsymbol{\alpha}}_k|_{U_{12}}\right)$ e $d_{(\mathfrak{c}_2)}\left(\underline{\boldsymbol{\alpha}}_k|_{U_{12}}\right)$ coincidono. Infatti si ha

$$\begin{aligned}
(\varphi_2)_*(d_{(\mathfrak{c}_1)}\left(\underline{\boldsymbol{\alpha}}_k|_{U_{12}}\right)) &= (\varphi_2)_*((\varphi_1)^*(d\left((\varphi_1)_*(\underline{\boldsymbol{\alpha}}_k|_{U_{12}})\right))) \\
&= (\varphi_2)_*(((\varphi_1)^{-1})_*(d\left((\varphi_1)_*(\underline{\boldsymbol{\alpha}}_k|_{U_{12}})\right))) \\
&= (\varphi_{21})_*(d\left((\varphi_1)_*(\underline{\boldsymbol{\alpha}}_k|_{U_{12}})\right))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= d\left((\varphi_{21})_*((\varphi_1)_*(\underline{\boldsymbol{\alpha}}_k|_{U_{12}}))\right) \\ &= d\left((\varphi_2)_*(\underline{\boldsymbol{\alpha}}_k|_{U_{12}})\right) \\ &= (\varphi_2)_*(d_{(\mathfrak{c}_2)}\left(\underline{\boldsymbol{\alpha}}_k|_{U_{12}}\right)) \end{aligned}$$

Questo ci assicura che esiste un'unica $k+1$–forma $d\left(\underline{\boldsymbol{\alpha}}_k\right) \in \mathbf{\Omega}^{k+1}(M)$ tale che per ogni carta $\mathfrak{c} = (U, \varphi)$ di M sia

$$(d\left(\underline{\boldsymbol{\alpha}}_k\right))|_U = d_{(\mathfrak{c})}\left(\underline{\boldsymbol{\alpha}}_k|_U\right)$$

La $k+1$–forma $d\left(\underline{\boldsymbol{\alpha}}_k\right) \in \mathbf{\Omega}^{k+1}(M)$ così definita è il *differenziale esterno* della k–forma $\underline{\boldsymbol{\alpha}}_k \in \mathbf{\Omega}^k(M)$. Si dimostra facilmente che:

- per ogni $\underline{\boldsymbol{\alpha}}_k \in \mathbf{\Omega}^k(M)$ si ha $d(d(\underline{\boldsymbol{\alpha}}_k)) \equiv \underline{\mathbf{0}}$;
- per ogni $\underline{\boldsymbol{\alpha}}_k, \underline{\boldsymbol{\beta}}_k \in \mathbf{\Omega}^k(M)$ si ha $d(\underline{\boldsymbol{\alpha}}_k + \underline{\boldsymbol{\beta}}_k) = d(\underline{\boldsymbol{\alpha}}_k) + d(\underline{\boldsymbol{\beta}}_k)$;
- per ogni $\underline{\boldsymbol{\alpha}}_r \in \mathbf{\Omega}^r(M)$ e per ogni $\underline{\boldsymbol{\beta}}_s \in \mathbf{\Omega}^s(M)$ si ha $d(\underline{\boldsymbol{\alpha}}_r \wedge \underline{\boldsymbol{\beta}}_s) = d(\underline{\boldsymbol{\alpha}}_r) \wedge \underline{\boldsymbol{\beta}}_s + (-1)^r \underline{\boldsymbol{\alpha}}_r \wedge d(\underline{\boldsymbol{\beta}}_s)$;
- per ogni $f \in \mathcal{C}^\infty(N; M)$ e per ogni $\underline{\boldsymbol{\beta}}_k \in \mathbf{\Omega}^k(M)$ si ha $f^*(d(\underline{\boldsymbol{\beta}}_k)) = d(f^*(\underline{\boldsymbol{\beta}}_k)) \in \mathbf{\Omega}^{k+1}(N)$.

Le k–forme $\underline{\boldsymbol{\alpha}}_k \in \mathbf{\Omega}^k(M)$ tali che $d(\underline{\boldsymbol{\alpha}}_k) = \underline{\mathbf{0}}$ vengono dette *k–forme chiuse.* Le *k–forme esatte* sono le k–forme $\underline{\boldsymbol{\alpha}}_k \in \mathbf{\Omega}^k(M)$ tali che esista una $(k-1)$–forma $\underline{\boldsymbol{\beta}}_{k-1} \in \mathbf{\Omega}^{k-1}(M)$ per cui $\underline{\boldsymbol{\alpha}}_k = d(\underline{\boldsymbol{\beta}}_{k-1})$. La $(k-1)$–forma $\underline{\boldsymbol{\beta}}_{k-1}$ non è unica perché per ogni forma chiusa $\underline{\boldsymbol{\sigma}}_{k-1} \in \mathbf{\Omega}^{k-1}(B)$ si ha $d(\underline{\boldsymbol{\beta}}_{k-1} + \underline{\boldsymbol{\sigma}}_{k-1}) = d(\underline{\boldsymbol{\beta}}_{k-1}) + d(\underline{\boldsymbol{\sigma}}_{k-1}) = d(\underline{\boldsymbol{\beta}}_{k-1}) = \underline{\boldsymbol{\alpha}}_k$.

Si dimostra che vale il *Lemma di Poincaré*: ogni forma chiusa è localmente esatta. Tradotto in un linguaggio più matematico: se $\underline{\boldsymbol{\alpha}}_k \in \boldsymbol{\Omega}^k(M)$ è chiusa allora per ogni punto $p \in M$ esistono un intorno aperto $U \subseteq M$ di p ed una forma $\underline{\boldsymbol{\beta}}_{k-1} \in \boldsymbol{\Omega}^{k-1}(U)$ tale che[3] $d(\underline{\boldsymbol{\beta}}_{k-1}) = \underline{\boldsymbol{\alpha}}_k|_U$. Se la varietà M è semplicemente connessa allora si può supporre sempre che sia $U = M$. In caso contrario l'aperto $U \subseteq M$ più grande possibile dipende dalla topologia di M (numero e dimensione dei buchi) e dalla forma $\underline{\boldsymbol{\alpha}}_k$.

Esempio 10.1. [differenziale esterno di funzioni]

Data una carta $\mathfrak{c} = (U, \varphi) = (U, x^1, \ldots, x^m)$ di M, l'immagine $\varphi_*(f) = f \circ \varphi^{-1}$ di una funzione $f \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R})$ viene normalmente indicata con $f(x^1, \ldots, x^m)$. Le 1-forme $(d\,x^1, \ldots, d\,x^m)$ sono una base del $\mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R})$-modulo libero $\boldsymbol{\Omega}^1(U)$ e il differenziale $d\,f$ è rappresentato dalla seguente 1-forma su $\varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^m$

$$\varphi_*(d\,f) = \partial_i f(x)\, d\,x^i \qquad \text{dove} \qquad \partial_i f(x) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(x) \tag{8}$$

Esempio 10.2. [differenziale esterno di 1-forme]

Una 1-forma $\underline{\boldsymbol{\alpha}} \in \boldsymbol{\Omega}^1(U)$ viene rappresentata dalla seguente 1-forma su $\varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^m$

$$\varphi_*(\underline{\boldsymbol{\alpha}}) = \alpha_i(x)\, d\,x^i$$

[3] La dimostrazione la vedremo più avanti nel contesto più generale della *formula di omotopia*.

ed il differenziale esterno $d\,\underline{\boldsymbol{\alpha}}$ è rappresentato dalla seguente 2-forma su $\varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^m$

$$\begin{aligned}\varphi_*(d\,\underline{\boldsymbol{\alpha}}) &= d\,\alpha_i(x) \wedge d\,x^i \\ &= \partial_k\alpha_i(x)\,d\,x^k \wedge d\,x^i \\ &= \tfrac{1}{2}\Big(\partial_k\alpha_i(x) - \partial_i\alpha_k(x)\Big)d\,x^k \wedge d\,x^i \qquad (9)\\ &= \Big(\partial_k\alpha_i(x) - \partial_i\alpha_k(x)\Big)d\,x^k \otimes d\,x^i \\ &= 2\,A\Big(\partial_k\alpha_i(x)\,d\,x^k \otimes d\,x^i\Big)\end{aligned}$$

Esempio 10.3. [differenziale esterno di 2-forme]

Una 2-forma $\underline{\boldsymbol{\alpha}} \in \boldsymbol{\Omega}^2(U)$ viene rappresentata dalla seguente 2-forma su $\varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^m$

$$\varphi_*(\underline{\boldsymbol{\alpha}}) = \alpha_{rs}(x)\,d\,x^r \otimes d\,x^s = \alpha_{rs}(x)\,A\Big(d\,x^r \otimes d\,x^s\Big) = \tfrac{1}{2}\alpha_{rs}(x)\,d\,x^r \wedge d\,x^s$$

dove i coefficienti α_{rs} sono antisimmetrici, cioè: $\alpha_{[rs]} = \alpha_{rs}$. Il differenziale esterno $d\,\underline{\boldsymbol{\alpha}}$ è rappresentato dalla seguente 3-forma su $\varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^m$

$$\begin{aligned}\varphi_*(d\,\underline{\boldsymbol{\alpha}}) &= \tfrac{1}{2}d\,\alpha_{rs}(x) \wedge d\,x^r \wedge d\,x^s \qquad (10)\\ &= \tfrac{1}{2}\partial_i\alpha_{rs}(x)\,d\,x^i \wedge d\,x^r \wedge d\,x^s \qquad (11)\\ &= \tfrac{1}{2}\partial_{[i}\alpha_{rs]}(x)\,d\,x^i \wedge d\,x^r \wedge d\,x^s \qquad (12)\\ &= \tfrac{1}{6}\Big(\partial_i\alpha_{rs}(x) + \partial_s\alpha_{ir}(x) + \partial_r\alpha_{si}(x)\Big)\,d\,x^i \wedge d\,x^r \wedge d\,x^s \qquad (13)\end{aligned}$$

$$= \Big(\partial_i \alpha_{rs}(x) + \partial_s \alpha_{ir}(x) + \partial_r \alpha_{si}(x)\Big)\, d\,x^i \otimes d\,x^r \otimes d\,x^s \tag{14}$$

Ricordiamo che, essendo i coefficienti α_{rs} antisimmetrici, si ha:

$$\partial_{[i}\alpha_{rs]} = \tfrac{1}{3}\Big(\partial_i \alpha_{rs}(x) + \partial_s \alpha_{ir}(x) + \partial_r \alpha_{si}(x)\Big)$$

Inoltre, essendo $d\,x^i \wedge d\,x^r \wedge d\,x^s = 6A(d\,x^i \otimes d\,x^r \otimes d\,x^s)$, dalla (11) si ottiene

$$\varphi_*(d\,\underline{\boldsymbol{\alpha}}) = 3A\Big(\partial_i \alpha_{rs}(x)\, d\,x^i \otimes d\,x^r \otimes d\,x^s\Big)$$

Esempio 10.4. [differenziale esterno di 3-forme]

Una 3-forma $\underline{\boldsymbol{\alpha}} \in \boldsymbol{\Omega}^3(U)$ viene rappresentata dalla seguente 3-forma su $\varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^m$

$$\varphi_*(\underline{\boldsymbol{\alpha}}) = \alpha_{rsu}(x)\, d\,x^r \otimes d\,x^s \otimes d\,x^u = \alpha_{rsu}(x)\, A\Big(d\,x^r \otimes d\,x^s \otimes d\,x^u\Big) = \tfrac{1}{6}\alpha_{rsu}(x)\, d\,x^r \wedge d\,x^s \wedge d\,x^u$$

dove i coefficienti α_{rsu} sono antisimmetrici, cioè: $\alpha_{[rsu]} = \alpha_{rsu}$. Il differenziale esterno $d\,\underline{\boldsymbol{\alpha}}$ è rappresentato dalla seguente 4-forma su $\varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^m$

$$\begin{aligned}
\varphi_*(d\,\underline{\boldsymbol{\alpha}}) &= \tfrac{1}{6}\, d\,\alpha_{rsu}(x) \wedge d\,x^r \wedge d\,x^s \wedge d\,x^u && (15)\\
&= \tfrac{1}{6}\, \partial_i \alpha_{rsu}(x)\, d\,x^i \wedge d\,x^r \wedge d\,x^s \wedge d\,x^u && (16)\\
&= \tfrac{1}{6}\, \partial_{[i}\alpha_{rsu]}(x)\, d\,x^i \wedge d\,x^r \wedge d\,x^s \wedge d\,x^u && (17)\\
&= \tfrac{1}{24}\, \Big(\partial_i \alpha_{rsu}(x) - \partial_u \alpha_{irs}(x) + \partial_s \alpha_{uir}(x) - \partial_r \alpha_{sui}(x)\Big)\, d\,x^i \wedge d\,x^r \wedge d\,x^s \wedge d\,x^u && (18)
\end{aligned}$$

$$= \Big(\partial_i \alpha_{rsu}(x) - \partial_u \alpha_{irs}(x) + \partial_s \alpha_{uir}(x) - \partial_r \alpha_{sui}(x)\Big)\, d\,x^i \otimes d\,x^r \otimes d\,x^s \otimes d\,x^u \qquad (19)$$

Ricordiamo che, essendo i coefficienti α_{rsu} antisimmetrici, si ha:

$$\partial_{[i}\alpha_{rsu]} = \tfrac{1}{4}\Big(\partial_i \alpha_{rsu}(x) - \partial_u \alpha_{irs}(x) + \partial_s \alpha_{uir}(x) - \partial_r \alpha_{sui}(x)\Big)$$

Inoltre, essendo $d\,x^i \wedge d\,x^r \wedge d\,x^s \wedge d\,x^u = 24A(d\,x^i \otimes d\,x^r \otimes d\,x^s \otimes d\,x^u)$, dalla (16) si ottiene

$$\varphi_*(d\,\underline{\boldsymbol{\alpha}}) = 4A\Big(\partial_i \alpha_{rsu}(x)\, d\,x^i \otimes d\,x^r \otimes d\,x^s \otimes d\,x^u\Big)$$

Esempio 10.5. [differenziale esterno di k-forme]

Una k-forma $\underline{\boldsymbol{\alpha}} \in \boldsymbol{\Omega}^k(U)$ viene rappresentata dalla seguente k-forma su $\varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^m$

$$\varphi_*(\underline{\boldsymbol{\alpha}}) = \alpha_{r_1\ldots r_k}(x)\, d\,x^{r_1} \otimes \ldots \otimes d\,x^{r_k} = \alpha_{r_1\ldots r_k}(x)\, A\Big(d\,x^{r_1} \otimes \ldots \otimes d\,x^{r_k}\Big) = \tfrac{1}{k!}\alpha_{r_1\ldots r_k}(x)\, d\,x^{r_1} \wedge \ldots \wedge d\,x^{r_k}$$

dove i coefficienti $\alpha_{r_1\ldots r_k}$ sono antisimmetrici, cioè: $\alpha_{[r_1\ldots r_k]} = \alpha_{r_1\ldots r_k}$. Il differenziale esterno $d\,\underline{\boldsymbol{\alpha}}$ è rappresentato dalla seguente $(k+1)$-forma su $\varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^m$

$$\begin{aligned}
\varphi_*(d\,\underline{\boldsymbol{\alpha}}) &= \tfrac{1}{k!} d\,\alpha_{r_1\ldots r_k}(x) \wedge d\,x^{r_1} \wedge \ldots \wedge d\,x^{r_k} && (20)\\
&= \tfrac{1}{k!}\partial_i \alpha_{r_1\ldots r_k}(x)\, d\,x^i \wedge d\,x^{r_1} \wedge \ldots \wedge d\,x^{r_k} && (21)\\
&= \tfrac{1}{k!}\partial_{[i}\alpha_{r_1\ldots r_k]}(x)\, d\,x^i \wedge d\,x^{r_1} \wedge \ldots \wedge d\,x^{r_k} && (22)\\
&= (k+1)\partial_{[i}\alpha_{r_1\ldots r_k]}(x)\, A\Big(d\,x^i \otimes d\,x^{r_1} \otimes \ldots \otimes d\,x^{r_k}\Big) && (23)\\
&= (k+1)A\Big(\partial_i \alpha_{r_1\ldots r_k}(x)\, d\,x^i \otimes d\,x^{r_1} \otimes \ldots \otimes d\,x^{r_k}\Big) && (24)
\end{aligned}$$

10.3 Forme orizzontali su varietà fibrate

Lo spazio dei vettori verticali $V_p(Y)$ di una varietà fibrata (Y, π, M) in un punto $p \in Y$, ha uno spazio duale $V_p^*(Y)$ che non è un sottospazio vettoriale dello spazio cotangente $T_p^*(Y)$, ma è isomorfo allo spazio quoziente $T_p^*(Y)/(V_p(Y))^\circ$ dove $(V_p(Y))^\circ \subset T_p^*(Y)$ è *l'annullatore* del sottospazio vettoriale $V_p(Y)$. Questo tipo di ragionamento si trasferisce a livello di $\mathcal{C}^\infty(Y, \mathbb{R})$–moduli: il modulo duale $\mathfrak{X}_V(Y)^*$ è isomorfo al modulo quoziente $\mathfrak{X}(Y)^*/(\mathfrak{X}_V(Y))^\circ$. Il modulo $\mathfrak{X}(Y)^*$ coincide col modulo $\boldsymbol{\Omega}^1(Y)$ e definiamo il sottomodulo $\boldsymbol{\Omega}^1_{_H}(Y) = (\mathfrak{X}_V(Y))^\circ \subset \boldsymbol{\Omega}^1(Y)$ delle 1–*forme orizzontali* su Y.

Dalla definizione si deduce che una 1–forma $\underline{\boldsymbol{\beta}} \in \boldsymbol{\Omega}^1(U)$ è orizzontale se e solo se per ogni campo di vettori $\vec{\xi} \in \mathfrak{X}_V(Y)$ si ha $\vec{\xi} \rfloor \underline{\boldsymbol{\beta}} = \underline{\mathbf{0}}$. Rappresentando la 1–forma $\underline{\boldsymbol{\beta}}$ attraverso un qualunque sistema di coordinate fibrate $\mathfrak{c} = (U, x^\alpha, y^i)$ si ha:

$$\underline{\boldsymbol{\beta}} = \beta_\sigma(x^\mu, y^i)\, dx^\sigma$$

Il concetto di orizzontalità si può estendere ai campi di tensori k volte covarianti $\underline{\boldsymbol{\beta}}_k \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^0_k(Y)$ richiedendo che la funzione multilineare $\underline{\boldsymbol{\beta}}_k : \mathfrak{X}(Y)^k \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(Y, \mathbb{R})$ si annulli ogni volta che uno degli argomenti è un campo di vettori verticali. Rappresentando il campo di tensori $\underline{\boldsymbol{\beta}}_k$ in coordinate fibrate, si ha sempre

$$\underline{\boldsymbol{\beta}}_k = \beta_{\sigma_1 \dots \sigma_1}(x^\mu, y^i)\, dx^{\sigma_1} \otimes \cdots \otimes dx^{\sigma_k}$$

Il differenziale esterno $d\underline{\boldsymbol{\beta}}$ di una 1–forma orizzontale $\underline{\boldsymbol{\beta}} \in \mathbf{\Omega}^1_{_H}(Y)$ non è necessariamente una 2–forma orizzontale. Il differenziale esterno $d\underline{\boldsymbol{\beta}}$ è orizzontale se e solo se $\underline{\boldsymbol{\beta}} \in \pi^* \left(\mathbf{\Omega}^1(M)\right)$. Analogamente, il differenziale esterno $d\underline{\boldsymbol{\beta}}_k$ di una k–forma orizzontale $\underline{\boldsymbol{\beta}}_k \in \mathbf{\Omega}^k_{_H}(Y)$ è orizzontale se e solo se $\underline{\boldsymbol{\beta}}_k \in \pi^* \left(\mathbf{\Omega}^k(M)\right)$

11 Connessioni su varietà fibrate

Abbiamo visto che in ogni punto $p \in Y$ dello spazio totale di una varietà fibrata c'è il sottospazio vettoriale $V_p(Y) \subset T_p(Y)$ dei vettori verticali, ma non esiste un modo canonico di definire cosa sono i vettori orizzontali nel punto p. Assegnare una connessione sulla varietà fibrata (Y, π, M) equivale a definire in ogni punto $p \in Y$ un sottospazio vettoriale $H_p \subset T_p(Y)$, dei vettori orizzontali nel punto p, in modo tale che $H_p \cap V_p(Y) = \{\,\vec{0}\,\}$ e che $H_p \oplus V_p(Y) = T_p(Y)$. La restrizione della mappa tangente della proiezione $T_p(\pi)$ al sottospazio vettoriale H_p è un isomorfismo di spazi vettoriali $T_p(\pi)|_{H_p} : H_p \longrightarrow T_{\pi(p)}(M)$.

L'unione (necessariamente disgiunta) $H = \cup_{p \in Y} H_p$ di tutti i sottospazi di vettori orizzontali deve essere regolare nel senso che deve essere una sottovarietà di classe $\mathcal{C}^\infty$ del fibrato tangente $T(Y)$. In particolare, H è un sottofibrato vettoriale di classe $\mathcal{C}^\infty$ del fibrato tangente $T(Y)$ e si ha: $H \oplus_{_Y} V(Y) = T(Y)$.

Utilizzando coordinate fibrate, si vede che i vettori $\partial_\alpha \in T_p(Y)$ non sono necessariamente orizzontali[4] e che la loro proiezione orizzontale sarà $\vec{D}_\alpha = \partial_\alpha - \Gamma^i_\alpha(x, y)\partial_i \in H_p$. La condizione di regolarità richiesta equivale a chiedere che le funzioni $\Gamma^i_\alpha(x, y)$ siano di classe $\mathcal{C}^\infty$.

Considerando una trasformazione di coordinate fibrate $(x, y) \longmapsto (x' = \varphi'(x), y' = \Phi'(x, y))$ si ha

$$\begin{aligned}
\vec{D}_\alpha &= \partial_\alpha - \Gamma^i_\alpha(x, y)\partial_i \\
&\equiv \vec{D}_\alpha(\varphi'^{\alpha'}(x))\partial'_{\alpha'} + \vec{D}_\alpha(\Phi'^{i'}(x, y))\partial'_{i'} \\
&= \partial_\alpha\varphi'^{\alpha'}(x)\partial'_{\alpha'} + \left(\partial_\alpha\Phi'^{i'}(x, y) - \Gamma^i_\alpha(x, y)\partial_i\Phi'^{i'}(x, y)\right)\partial'_{i'} \\
&= \partial_\alpha\varphi'^{\alpha'}(x)\vec{D}'_{\alpha'} + \left(\Gamma'^{i'}_{\alpha'}(x', y')\partial_\alpha\varphi'^{\alpha'}(x) + \partial_\alpha\Phi'^{i'}(x, y) - \Gamma^i_\alpha(x, y)\partial_i\Phi'^{i'}(x, y)\right)\partial'_{i'}
\end{aligned}$$

e le leggi di trasformazione dei coefficienti $\Gamma^i_\alpha(x, y)$ per trasformazioni di coordinate fibrate si deducono richiedendo che $\vec{D}_\alpha$ e $\vec{D}'_{\alpha'}$ siano orizzontali, cioè che

$$\vec{D}_\alpha = \partial_\alpha\varphi'^{\alpha'}(x)\vec{D}'_{\alpha'}$$

ovvero che valga l'identità

$$\Gamma'^{i'}_{\alpha'}(x'(x), y'(x, y))\partial_\alpha\varphi'^{\alpha'}(x) + \partial_\alpha\Phi'^{i'}(x, y) - \Gamma^i_\alpha(x, y)\partial_i\Phi'^{i'}(x, y) = 0\,. \tag{25}$$

[4]Se i campi di vettori (∂_α) fossero orizzontali non è detto che lo siano anche i campi di vettori $(\partial'_{\alpha'})$ perché, in generale,

$$\frac{\partial\Phi'^{i'}}{\partial x^\alpha} \neq 0$$

Le leggi di trasformazione così ottenute per i coefficienti $\Gamma^i_\alpha(x, y)$ sono di tipo affine. Questo vuole dire che esiste un fibrato affine su Y le cui sezioni globali sono le connessioni sulla varietà fibrata (Y, π, M).

FINE LEZIONE 13 MMdFC (2023-04-13 ore 14:00 – 16:00)

Riferimenti bibliografici

[1] S. Kobayashi, K. Nomizu: *Foundations of Differential Geometry, Vol. I*; John Wiley & Sons, New York · Chichester · Brisbane · Toronto · Singapore, 1963.

[2] S. Kobayashi, K. Nomizu: *Foundations of Differential Geometry, Vol. II*; John Wiley & Sons, New York · Chichester · Brisbane · Toronto, 1969.

[3] J. Dieudonné: *Éléments d'analyse 1 / Fondements de l'analyse moderne*; Gauthier–Villars, Paris, 1969.

[4] J. Dieudonné: *Éléments d'analyse 2*; Gauthier–Villars, Paris, 1969.

[5] J. Dieudonné: *Éléments d'analyse 3*; Gauthier–Villars, Paris, 1969.

[6] J. E. Marsden, T. Ratiu, R. Abraham: *Manifolds, tensor analysis and applications, Third Edition*; Springer–Verlag, 2001.

[7] M. Ferraris: *Appunti di algebra lineare, multilineare e tensori*; 2023.

[8] M. Ferraris: *Appunti di calcolo differenziale*; 2023.