Invece di utilizzare la base $(\partial_\alpha, \partial_i)$ associata ad un sistema di coordinate fibrate (x^α, y^i), per rappresentare i vettori dello spazio tangente $T_p(Y)$ possiamo considerare la base $(\vec{D}_\alpha, \partial_i)$. La corrispondente base duale in $T^*_p(Y)$ sarà $(dx^\alpha, \underline{\boldsymbol{\omega}}^i)$, dove $\underline{\boldsymbol{\omega}}^i = dy^i + \Gamma^i_\alpha(x,y)dx^\alpha$. Con le leggi di trasformazione appena calcolate per i coefficienti $\Gamma^i_\alpha(x,y)$ si ottengono le seguenti leggi di trasformazione

$$dx'^{\alpha'} = \partial_\alpha \varphi'^{\alpha'} dx^\alpha \qquad , \qquad \underline{\boldsymbol{\omega}}'^{i'} = \partial_i \Phi'^{i'} \underline{\boldsymbol{\omega}}^i$$

per le forme della base duale.

11.0.1 Sollevamento orizzontale di campi di vettori e derivata covariante di sezioni

Dato un campo di vettori $\vec{\xi} \in \mathfrak{X}(M)$ possiamo sollevarlo ad un campo $\vec{\xi}_H$ di vettori orizzontali su Y che, in coordinate fibrate, ha la seguente espressione

$$\vec{\xi}_H = \xi^\mu(x)\vec{D}_\mu = \xi^\mu(x)\left(\partial_\mu - \Gamma^i_\mu(x,y)\partial_i\right)$$

Per ogni sezione σ della varietà fibrata e per ogni campo di vettori $\vec{\xi} \in \mathfrak{X}(M)$ possiamo definire la *derivata covariante* $\nabla_{\vec{\xi}}\sigma$ con la formula

$$\nabla_{\vec{\xi}}\sigma = T(\sigma) \circ \vec{\xi} - \vec{\xi}_H \circ \sigma$$

La derivata covariante $\nabla_{\vec{\xi}}\sigma$ è un campo di vettori verticali sopra alla sezione σ, che in coordinate fibrate si scrive come[5]

$$\nabla_{\vec{\xi}}\sigma = \xi^\mu(x)\left[\partial_\mu \sigma^i(x) + \Gamma^i_\mu(x,\sigma(x))\right]\partial_i$$

Per effettuare i calcoli conviene definire gli operatori differenziali $\nabla_\mu \sigma^i(x) = \partial_\mu \sigma^i(x) + \Gamma^i_\mu(x,\sigma(x))$.

11.0.2 Trasporto parallelo

Consideriamo una curva $\gamma : I \longrightarrow M$ nella base M di una varietà fibrata (Y,π,M). Per definire il *trasporto parallelo lungo* γ *associato ad una connessione* H dobbiamo scoprire se esistono curve in $\zeta : I \longrightarrow Y$ che hanno vettore tangente sempre orizzontale e che si proiettano su γ. In coordinate fibrate si ha $\zeta : t \longmapsto (\gamma^\alpha(t), \zeta^i(t))$ e la richiesta che il vettore tangente di ζ sia orizzontale si traduce nel chiedere che le controimmagini $\zeta^*(\underline{\boldsymbol{\omega}}^i)$ si annullino, cioè:

$$\zeta^*(\underline{\boldsymbol{\omega}}^i) = \zeta^*(dy^i + \Gamma^i_\alpha(x,y)dx^\alpha) = \left(\frac{d\zeta^i(t)}{dt} + \Gamma^i_\alpha\left(\gamma^\beta(t),\zeta^k(t)\right)\frac{d\gamma^\alpha(t)}{dt}\right)dt = 0$$

Per connessioni di classe $\mathcal{C}^\infty$ le funzioni $\Gamma^i_\alpha(x,y)$ sono di classe $\mathcal{C}^\infty$ e, quindi, le equazioni

$$\frac{d\zeta^i(t)}{dt} + \Gamma^i_\alpha\left(\gamma^\beta(t),\zeta^k(t)\right)\frac{d\gamma^\alpha(t)}{dt} = 0 \tag{26}$$

[5] anche se si dovrebbe scrivere

$$(\nabla_{\vec{\xi}}\sigma) : (x^\alpha) \longmapsto \left(x^\alpha, \sigma^i(x), 0, \xi^\mu(x)\left[\partial_\mu\sigma^i(x) + \Gamma^i_\mu(x,\sigma(x))\right]\partial_i\right)$$

sono risolvibili rispetto alle funzioni $\zeta^i(t)$.[6]

11.1 Curvatura di connessioni su varietà fibrate

Consideriamo due campi di vettori $\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2 \in \mathfrak{X}(M)$, una connessione sulla varietà fibrata (Y, π, M) e lavoriamo solo con coordinate fibrate.

Calcolando la differenza fra il commutatore dei sollevamenti orizzontali dei due campi di vettori $\vec{\xi}_1$ e $\vec{\xi}_2$ ed il sollevamento orizzontale del loro commutatore si ottiene:

$$\Big[(\vec{\xi}_1)_{_H}, (\vec{\xi}_2)_{_H}\Big] - \Big([\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2]\Big)_{_H} = \xi_1^\alpha\, \xi_2^\beta\, [\vec{D}_\alpha, \vec{D}_\beta] = -\xi_1^\alpha\, \xi_2^\beta\, R^k{}_{\alpha\beta}(x,y)\partial_k$$

dove si è posto

$$\begin{aligned} R^k{}_{\alpha\beta}(x,y) &= \vec{D}_\alpha(\Gamma^k_\beta(x,y)) - \vec{D}_\beta(\Gamma^k_\alpha(x,y)) \\ &= \partial_\alpha \Gamma^k_\beta(x,y) - \Gamma^i_\alpha(x,y)\partial_i \Gamma^k_\beta(x,y) - \partial_\beta \Gamma^k_\alpha(x,y) + \Gamma^i_\beta(x,y)\partial_i \Gamma^k_\alpha(x,y) \end{aligned}$$

Questo definisce un campo di tensori misti

$$\boldsymbol{R} = \partial_i \otimes R^i{}_{\alpha\beta}(x,y) dx^\alpha \otimes dx^\beta = \partial_i \otimes \tfrac{1}{2} R^i{}_{\alpha\beta}(x,y) dx^\alpha \wedge dx^\beta = \partial_i \otimes \underline{\boldsymbol{R}}^i$$

che sta nello spazio $\mathfrak{X}_V(Y) \otimes \boldsymbol{\Omega}^2_{_H}(Y) \subset \boldsymbol{\mathcal{T}}^1_2(Y)$. Il tensore $\boldsymbol{R}$ viene detto *tensore di curvatura della connessione*.

[6]Quello che si chiama normalmente trasporto parallelo di vettori lungo curve in M si ottiene quando si considerano connessioni lineari sul fibrato tangente $Y = T(M)$.

Come conseguenza del teorema di Frobenius, si dimostra che il tensore di curvatura $\boldsymbol{R}$ si annulla in un intorno aperto di un punto $p \in Y$ se e solo se attorno a p esiste un sistema di coordinate fibrate (x^α, y^i) tale i simboli $\Gamma^i_\alpha(x,y)$ siano identicamente nulli.

Dalle identità di Jacobi

$$\left[\vec{D}_\mu, \left[\vec{D}_\alpha, \vec{D}_\beta\right]\right] + \left[\vec{D}_\beta, \left[\vec{D}_\mu, \vec{D}_\alpha\right]\right] + \left[\vec{D}_\alpha, \left[\vec{D}_\beta, \vec{D}_\mu\right]\right] = 0 \tag{27}$$

si deduce che

$$\left[\vec{D}_\mu, R^k{}_{\alpha\beta}(x,y)\partial_k\right] + \left[\vec{D}_\beta, R^k{}_{\mu\alpha}(x,y)\partial_k\right] + \left[\vec{D}_\alpha, R^k{}_{\beta\mu}(x,y)\partial_k\right] = 0 \tag{28}$$

Posto

$$B^i{}_{\mu\alpha\beta} = \vec{D}_\mu\big(R^i{}_{\alpha\beta}\big) + R^k{}_{\alpha\beta}\,\partial_k\Gamma^i{}_\mu \tag{29}$$

le identità di Jacobi (27) e (28) si possono riscrivere come le identità

$$3B^i{}_{[\mu\alpha\beta]} = B^i{}_{\mu\alpha\beta} + B^i{}_{\beta\mu\alpha} + B^i{}_{\alpha\beta\mu} = 0 \tag{30}$$

che generalizzano le identità di Bianchi per le connessioni lineari[7].

Calcolando il differenziale delle 1–forme $\underline{\boldsymbol{\omega}}^i = dy^i + \Gamma^i_\alpha(x,y)dx^\alpha$ otteniamo

$$d\,\underline{\boldsymbol{\omega}}^i \;=\; d\,\Gamma^i_\alpha(x,y) \wedge dx^\alpha$$

[7]Mentre i coefficienti $R^k{}_{\alpha\beta}$ sono le componenti di un tensore, i coefficienti $B^i{}_{\mu\alpha\beta}$ non sono le componenti di un tensore. I coefficienti $B^i{}_{[\mu\alpha\beta]}$ sono le componenti di un tensore.

$$
\begin{aligned}
&= \left[\vec{D}_\beta(\Gamma^i_\alpha(x,y))\,dx^\beta + \partial_k\Gamma^i_\alpha(x,y)\,\underline{\boldsymbol{\omega}}^k\right]\wedge dx^\alpha\\
&= \vec{D}_\beta(\Gamma^i_\alpha(x,y))\,dx^\beta\wedge dx^\alpha + \partial_k\Gamma^i_\alpha(x,y)\,\underline{\boldsymbol{\omega}}^k\wedge dx^\alpha\\
&= \tfrac{1}{2}R^i_{\beta\alpha}(x,y)\,dx^\beta\wedge dx^\alpha + \partial_k\Gamma^i_\alpha(x,y)\,\underline{\boldsymbol{\omega}}^k\wedge dx^\alpha\\
&= \underline{\boldsymbol{R}}^i + \partial_k\Gamma^i_\alpha(x,y)\,\underline{\boldsymbol{\omega}}^k\wedge dx^\alpha
\end{aligned}
$$

Restringendo i differenziali $d\,\underline{\boldsymbol{\omega}}^i$ a coppie di vettori orizzontali di ottengono le 2-forme di curvatura $\underline{\boldsymbol{R}}^i$ definite da

$$\underline{\boldsymbol{R}}^i = d\,\underline{\boldsymbol{\omega}}^i - \partial_k\Gamma^i_\alpha(x,y)\,\underline{\boldsymbol{\omega}}^k\wedge dx^\alpha = \tfrac{1}{2}R^i_{\beta\alpha}(x,y)\,dx^\beta\wedge dx^\alpha \tag{31}$$

Osservazione 11.1. [Identità del fibrato tangente di una varietà fibrata]

Consideriamo il campo di tensori Id : $Y \longrightarrow T^1_1(Y)$ definito da

$$\mathrm{Id} : p \longmapsto \mathrm{Id}_{T_p(Y)} \in T^1_1(T_p(Y)) \in T_p(Y)\otimes T^*_p(Y) \equiv T^*_p(Y)\otimes T_p(Y)$$

Rappresentando il campo di tensori Id in un sistema di coordinate fibrate (x^α, y^i) si ha

$$\mathrm{Id} = \partial_\alpha \otimes dx^\alpha + \partial_i \otimes dy^i$$

Se adesso scegliamo una connessione Γ su Y possiamo riscrivere il campo di tensori Id attraverso la base $(\vec{D}_\alpha, \partial_i)$ e la base duale $(dx^\alpha, \underline{\boldsymbol{\omega}}^i)$, ottenendo

$$\mathrm{Id} = \vec{D}_\alpha \otimes dx^\alpha + \partial_i \otimes \underline{\boldsymbol{\omega}}^i$$

I due addendi in ci scompone Id sono, rispettivamente, le proiezioni sul sottofibrato H e la proiezione sul sottofibrato $V(Y)$ associate alla connessione Γ.

11.2 Connessioni lineari su fibrati vettoriali

Quando la varietà fibrata Y è un fibrato vettoriale $(Y, \pi, M, \mathbb{R}^n)$, ci sono delle connessioni particolari che vengono dette *connessioni lineari*. Prima di tutto, per definire le connessioni lneari, restringiamo il tipo di coordinate fibrate che utilizziamo. Si considerano solo sistemi di coordinate fibrate $\mathfrak{c} = (U, \psi) = (U, x^\alpha, y^i)$, fibrati su sistemi di coordinate $\bar{\mathfrak{c}} = (\bar{U}, \varphi) = (\bar{U}, x^\alpha)$, che siano compatibili con la struttura di fibrato vettoriale, cioè tali che il diagramma

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(\bar{U}) \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\pi"'] & \varphi(\bar{U}) \times \mathbb{R}^n \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"] \\
\bar{U} \arrow[r, "\varphi"'] & \varphi(\bar{U})
\end{tikzcd}$$

sia un isomorfismo di fibrati vettoriali. Le trasformazioni di coordinate fibrate compatibili con la struttura di fibrato vettoriale saranno quindi trasformazioni del tipo

$$(x^\alpha, y^i) \longmapsto (x'^{\alpha'}, y'^{i'}) = (\varphi'^{\alpha'}(x), F^{i'}_k(x)\, y^k)$$

D'ora in avanti, sui fibrati vettoriali utilizzeremo solo coordinate fibrate compatibili. Dalle trasformazioni di coordinate fibrate compatibili si deduce immediatamente che per i fibrati vettoriali esiste un isomorfismo canonico $V(Y) \equiv Y \times_{M} Y$.

Dimostrazione.

Le coordinate fibrate naturali su $V(Y)$ hanno trasformazioni di coordinate del tipo

$$(x^\alpha, y^i, v^j) \longmapsto (x'^{\alpha'}, y'^{i'}, v'^{j'}) = (\varphi'^{\alpha'}(x), F^{i'}_k(x)\, y^k, F^{j'}_r(x)\, v^r)$$

Esistono quindi due proiezioni da $V(Y)$ su Y

$$\nu_Y := \tau_Y|_{V(Y)} : (x^\alpha, y^i, v^j) \longmapsto (x^\alpha, y^i)$$

che è la proiezione del fibrato vettoriale $V(Y)$ sulla sua varietà di base Y, e

$$\varpi_Y := T(\pi)|_{V(Y)} : (x^\alpha, y^i, v^j) \longmapsto (x^\alpha, v^j)$$

che è un morfismo suriettivo di fibrati vettoriali. Il prodotto diagonale fibrato

$$(\nu_Y, \varpi_Y) : (x^\alpha, y^i, v^j) \longmapsto ((x^\alpha, y^i), (x^\alpha, v^j))$$

è l'isomorfismo cercato.

■

Fra le possibili connessioni su Y ci sono quelle in cui i coefficienti $\Gamma^i_\alpha(x,y)$ sono lineari rispetto alle coordinate y^i:

$$\Gamma^i_\alpha(x,y) = \Gamma^i{}_{j\alpha}(x) y^j \,.$$

Basta verificare che le leggi di trasformazione (25) diventano

$$\Gamma'^{i'}{}_{j'\alpha'}(x'(x))\, F^{j'}_k(x)\, y^k \partial_\alpha \varphi'^{\alpha'}(x) + \partial_\alpha F^{i'}_k(x)\, y^k - \Gamma^i{}_{k\alpha}(x)\, y^k\, F^{i'}_i(x) = 0\,.$$

da cui si deduce che deve essere

$$\Gamma'^{i'}{}_{j'\alpha'}(x'(x))\, F^{j'}_k(x)\, \partial_\alpha \varphi'^{\alpha'}(x) + \partial_\alpha F^{i'}_k(x) = \Gamma^i{}_{k\alpha}(x)\, F^{i'}_i(x)\,.$$

Se definiamo (localmente) la matrice di 1–forme $\underline{\boldsymbol{\Gamma}}(x) = \big(\underline{\boldsymbol{\Gamma}}^i{}_k(x)\big) = \big(\Gamma^i{}_{k\alpha}(x) dx^\alpha\big)$ (o 1–forma a valori in $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$) e la matrice di funzioni $\underline{\boldsymbol{F}}(x) = \big(F^i{}_k(x)\big)$ (o 0–forma a valori in $GL(n,\mathbb{R})$), la legge di trasformazione dei coefficienti $\Gamma^i{}_{k\alpha}$ diventa molto semplice:

$$\underline{\boldsymbol{\Gamma}}(x) = \underline{\boldsymbol{F}}(x)^{-1} \cdot \Big(\, \underline{\boldsymbol{\Gamma}}'(x'(x)) \,\cdot\, \underline{\boldsymbol{F}}(x) + d\,\underline{\boldsymbol{F}}(x)\,\Big)$$

Le leggi di trasformazione dei coefficienti $\Gamma^i_{k\alpha}$ sono trasformazioni di tipo affine e, quindi, esiste un fibrato affine[8] su M le cui sezioni sono le connessioni lineari sul fibrato vettoriale Y.

La derivata covariante $\nabla_{\vec{\xi}}\sigma$ ha la seguente espressione:

$$\nabla_{\vec{\xi}}\sigma = \xi^\mu(x) \Big[\partial_\mu \sigma^i(x) + \Gamma^i{}_{k\mu}(x)\, \sigma^k(x)\Big] \partial_i$$

[8]Che ha come modello il fibrato vettoriale $Y \otimes_M Y^* \otimes_M T^*(M)$.

ed è una funzione lineare[9] nella sezione σ. Gli operatori differenziali ∇_μ sono definiti da $\nabla_\mu \sigma^i(x) = \partial_\mu \sigma^i(x) + \Gamma^i{}_{k\mu}(x)\, \sigma^k(x)$.

La curvatura di una connessione lineare è data da:

$$R^k{}_{\alpha\beta}(x,y) = R^k{}_{r\alpha\beta}(x)\, y^r$$

dove si è posto

$$\begin{aligned} R^k{}_{r\alpha\beta}(x) &= \partial_\alpha \Gamma^k{}_{r\beta}(x) - \Gamma^i{}_{r\alpha}(x)\Gamma^k{}_{i\beta}(x) - \partial_\beta \Gamma^k{}_{r\alpha}(x) + \Gamma^i{}_{r\beta}(x)\Gamma^k{}_{i\alpha}(x) \\ &= \partial_\alpha \Gamma^k{}_{r\beta}(x) + \Gamma^k{}_{i\alpha}(x)\, \Gamma^i{}_{r\beta}(x) - \partial_\beta \Gamma^k{}_{r\alpha}(x) - \Gamma^k{}_{i\beta}(x)\, \Gamma^i{}_{r\alpha}(x) \end{aligned}$$

I coefficienti $R^k{}_{r\alpha\beta}(x)$ sono le componenti del tensore di curvatura della connessione $\Gamma^k{}_{r\alpha}(x)$. Il tensore di curvatura è una sezione del fibrato vettoriale $Y \otimes_M Y^* \otimes_M A^0_2(M)$.

Definendo la matrice delle 2–forme di curvatura

$$\underline{\boldsymbol{R}}^k{}_r = R^k{}_{r\alpha\beta}(x) dx^\alpha \otimes dx^\beta = \tfrac{1}{2}\, R^k{}_{r\alpha\beta}(x) dx^\alpha \wedge dx^\beta\,,$$

si ha

$$\underline{\boldsymbol{R}}^k{}_r = d\, \underline{\boldsymbol{\Gamma}}^k{}_r + \underline{\boldsymbol{\Gamma}}^k{}_s \wedge \underline{\boldsymbol{\Gamma}}^s{}_r$$

Il tensore di curvatura $R^k{}_{r\alpha\beta}(x) \partial_k \otimes dy^r \otimes dx^\alpha \otimes dx^\beta = \partial_k \otimes dy^r \otimes \underline{\boldsymbol{R}}^k{}_r$ misura, fra l'altro, la non commutatività delle derivate covarianti:

$$[\nabla_{\vec{\xi}_1}, \nabla_{\vec{\xi}_2}]\sigma(x) - \nabla_{[\vec{\xi}_1,\vec{\xi}_2]}\sigma(x) \;=\; \nabla_{\vec{\xi}_1}(\nabla_{\vec{\xi}_2}\sigma(x)) - \nabla_{\vec{\xi}_2}(\nabla_{\vec{\xi}_1}\sigma(x)) - \nabla_{[\vec{\xi}_1,\vec{\xi}_2]}\sigma(x)$$

[9] Questa è l'origine del nome di connessione lineare.

$$= \quad R^k{}_{r\alpha\beta}(x)\sigma^r(x)\xi_1^\alpha(x)\xi_2^\beta(x)\,\partial_k$$

Assegnata una connessione lineare su un fibrato vettoriale $(Y, \pi, M, \mathbb{R}^n)$ possiamo definire in modo naturale una connessione lineare sul fibrato vettoriale duale $(Y^*, \pi, M, (\mathbb{R}^n)^* \equiv \mathbb{R}^n)$. Per ogni campo di vettori $\vec{\xi} \in \mathfrak{X}(M)$, per ogni sezione $\sigma : M \longrightarrow Y$ e per ogni sezione $\tau : M \longrightarrow Y^*$, esiste un'unica possibilità di definire la derivata covariante $\nabla_{\vec{\xi}}\tau$ in modo tale che valga la seguente identità:

$$\left(\nabla_{\vec{\xi}}\sigma\right) \rfloor\, \tau + \sigma \rfloor \left(\nabla_{\vec{\xi}}\tau\right) = \nabla_{\vec{\xi}}(\sigma \rfloor\, \tau) \equiv \vec{\xi}(\sigma \rfloor\, \tau)$$

dove il prodotto interno $\sigma \rfloor\, \tau$ è la funzione definita da

$$\sigma \rfloor\, \tau : x \longmapsto \sigma(x) \rfloor\, \tau(x) \equiv \tau(x)(\sigma(x))$$

Basta infatti definire

$$\nabla_{\vec{\xi}}\tau = \xi^\mu(x)\Big[\partial_\mu \tau_j(x) - \Gamma^k{}_{j\mu}(x)\,\tau_k(x)\Big]\partial^j$$

Se consideriamo un fibrato vettoriale $(Z_1, \zeta_1, M, \mathbb{R}^{n_1})$, dotato di una connessione lineare $\overset{(1)}{\nabla}$, e $(Z_2, \zeta_2, M, \mathbb{R}^{n_2})$, dotato di una connessione lineare $\overset{(2)}{\nabla}$, possiamo definire una connessione lineare sul fibrato vettoriale $(Z_1 \otimes_M Z_2, \pi, M, \mathbb{R}^{n_1} \otimes \mathbb{R}^{n_2})$ estendendo per linearità la funzione

$$\nabla_{\vec{\xi}}\,(\sigma_1 \otimes \sigma_2) = \left(\overset{(1)}{\nabla}_{\vec{\xi}}\sigma_1\right) \otimes \sigma_2 + \sigma_1 \otimes \left(\overset{(2)}{\nabla}_{\vec{\xi}}\sigma_2\right)$$

che fornisce una regola *tipo Leibnitz* per le derivate covarianti di prodotti tensoriali. Questa derivata covariante si estende in modo naturale a tutti i campi di tensori che sono sezioni dei fibrati vettoriali del tipo $Y^{\otimes_M h} \otimes_M (Y^*)^{\otimes_M k}$.

11.3 Connessioni lineari sul fibrato tangente di una varietà

Fra le connessioni lineari su fibrati vettoriali, le più importanti sono le connessioni lineari sul fibrato tangente $T(M)$ di una varietà differenziabile M. Queste connessioni vengono dette *connessioni lineari sulla varietà M*.

Sul fibrato tangente $T(M)$ utilizzeremo solo coordinate fibrate naturali indicate con (x^α, v^β) che hanno leggi di trasformazione del tipo

$$(x^\alpha, v^\beta) \longmapsto (x'^{\alpha'}, v'^{\beta'}) = \left(\varphi'^{\,\alpha'}(x), \frac{\partial \varphi'^{\,\beta'}}{\partial x^\beta}(x) v^\beta\right)$$

per trasformazioni di coordinate sulla varietà di base M.

I campi di vettori $\vec{D}_\alpha$ per la base dei vettori orizzontali su $T(M)$ sono

$$\vec{D}_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \Gamma^\alpha{}_{\beta\mu}(x) v^\beta \frac{\partial}{\partial v^\alpha}$$

e le leggi di trasformazione dei coefficienti $\Gamma^\alpha{}_{\beta\mu}(x)$ sono

$$\Gamma'^{\alpha'}{}_{\beta'\mu'}(x') \;=\; \frac{\partial \varphi'^{\,\alpha'}}{\partial x^\alpha}(\varphi(x')) \left[\Gamma^\alpha{}_{\beta\mu}(\varphi(x')) \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x'^{\beta'}}(x') \frac{\partial \varphi^\mu}{\partial x'^{\mu'}}(x') + \frac{\partial^2 \varphi^\alpha}{\partial x'^{\beta'} \partial x'^{\mu'}}(x')\right]$$

$$= \left[\frac{\partial \varphi'^{\,\alpha'}}{\partial x^{\alpha}}(\varphi(x'))\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\mu}(\varphi(x')) - \frac{\partial^2 \varphi'^{\,\alpha'}}{\partial x^{\beta}\partial x^{\mu}}(\varphi(x'))\right] \frac{\partial \varphi^{\beta}}{\partial x'^{\beta'}}(x')\frac{\partial \varphi^{\mu}}{\partial x'^{\mu'}}(x')$$

Le leggi di trasformazione ci dicono che le differenze di connessioni lineari su $T(M)$ sono campi di tensori che stanno in $\boldsymbol{\mathcal{T}}^1_2(M)$.

Osservazione 11.2. Quando non ci saranno possibilità di equivoci (cioè: quasi sempre) le precedenti trasformazioni di coordinate verranno indicate semplicemente con

$$(x^{\alpha}, v^{\beta}) \longmapsto (x'^{\alpha'}, v'^{\beta'}) = \left(x'^{\,\alpha'}(x), \frac{\partial x'^{\,\beta'}}{\partial x^{\beta}}(x)v^{\beta}\right)$$

e le leggi di trasformazione dei coefficienti $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\mu}(x)$ saranno indicate con

$$\begin{aligned} \Gamma'^{\alpha'}{}_{\beta'\mu'} &= \frac{\partial x'^{\,\alpha'}}{\partial x^{\alpha}}\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\mu}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\beta'}}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\mu'}} + \frac{\partial x'^{\,\alpha'}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x'^{\beta'}\partial x'^{\mu'}} \\ &= \frac{\partial x'^{\,\alpha'}}{\partial x^{\alpha}}\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\mu}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\beta'}}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\mu'}} - \frac{\partial^2 x'^{\,\alpha'}}{\partial x^{\beta}\partial x^{\mu}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\beta'}}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\mu'}} \end{aligned}$$

Per le connessioni lineari sul fibrato tangente $T(M)$, o sul fibrato cotangente $T^*(M)$, possiamo definire degli oggetti che non possono essere definiti per le connessioni su altri tipi di fibrati vettoriali. Per esempio, definendo $\tilde{\Gamma}^{\alpha}{}_{\beta\mu}(x) = \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta}(x)$ si ha che anche i coefficienti $\tilde{\Gamma}^{\alpha}{}_{\beta\mu}$ sono i coefficienti di una connessione lineare su $T(M)$ che chiameremo *connessione trasposta* della connessione $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\mu}$. Sappiamo che la differenza di connessioni è un campo di tensori una volta controvariante e due volte covariante.

La differenza fra Γ e $\tilde{\Gamma}$ è un campo di tensori $T \in \mathfrak{X}(M) \otimes \boldsymbol{\Omega}^2(M)$ di componenti

$$T^\alpha{}_{\beta\mu}(x) = \Gamma^\alpha{}_{\beta\mu}(x) - \tilde{\Gamma}^\alpha{}_{\beta\mu}(x) = \Gamma^\alpha{}_{\beta\mu}(x) - \Gamma^\alpha{}_{\mu\beta}(x) = 2\,\Gamma^\alpha{}_{[\beta\mu]}(x)$$

che viene detto *torsione* della connessione $\Gamma^\alpha{}_{\beta\mu}$. Le connessioni che hanno torsione nulla sono le *connessioni simmetriche*. A partire da una connessione $\Gamma^\alpha{}_{\beta\mu}$, si possono costruire varie connessioni simmetriche. La più comune di esse è la parte simmetrica $\bar{\Gamma}^\alpha{}_{\beta\mu} = \Gamma^\alpha{}_{(\beta\mu)}$ della connessione $\Gamma^\alpha{}_{\beta\mu}$ e, ovviamente, si ha

$$\Gamma^\alpha{}_{\beta\mu} = \bar{\Gamma}^\alpha{}_{\beta\mu} + \tfrac{1}{2}T^\alpha{}_{\beta\mu} \tag{32}$$

La derivata covariante $\nabla_{\vec{\xi}}\vec{\sigma}$ di una sezione $\vec{\sigma} \in \mathfrak{X}(M)$ è

$$\nabla_{\vec{\xi}}\vec{\sigma} = \xi^\mu \nabla_\mu \sigma^\alpha \frac{\partial}{\partial v^\alpha} = \xi^\mu \Big(\partial_\mu \sigma^\alpha(x) + \Gamma^\alpha{}_{\beta\mu}(x)\sigma^\beta(x)\Big)\frac{\partial}{\partial v^\alpha}$$

Ricordando che le componenti $\xi^\mu \nabla_\mu \sigma^\alpha$ sono le componenti di un campo di vettori su M, i coefficienti $\nabla_\mu \sigma^\alpha$ sono le componenti di un campo di tensori $\nabla\vec{\sigma} \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^1_1(M)$.

Se consideriamo coordinate fibrate naturali (x^α, p_β) su $T^*(M)$, la base per i vettori orizzontali su $T^*(M)$, indotti dalla connessione Γ che abbiamo scelto su $T(M)$, sarà

$$\vec{D}_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \Gamma^\alpha{}_{\beta\mu}(x)\, p_\alpha \frac{\partial}{\partial p_\beta}$$

La derivata covariante $\nabla_{\vec{\xi}}\underline{\boldsymbol{\tau}}$ di un campo di tensori $\underline{\boldsymbol{\tau}} \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^0_1(M) \equiv \boldsymbol{\Omega}^1(M)$ sarà

$$\nabla_{\vec{\xi}}\underline{\boldsymbol{\tau}} = \xi^\mu \nabla_\mu \tau_\beta \frac{\partial}{\partial p_\beta} = \xi^\mu \Big(\partial_\mu \tau_\beta(x) - \tau_\alpha(x)\, \Gamma^\alpha{}_{\beta\mu}(x)\Big)\frac{\partial}{\partial p_\beta}$$

Analogamente a quanto visto per il campo di tensori $\nabla\vec{\sigma}$, possiamo definire un campo di tensori $\nabla\underline{\boldsymbol{\tau}} \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^0_2(M)$. Se la connessione è simmetrica, la parte antisimmetrica di $\nabla\underline{\boldsymbol{\tau}}$ è in pratica il differenziale esterno della 1–forma $\underline{\boldsymbol{\tau}}$, infatti: $d\,\underline{\boldsymbol{\tau}} = 2\,A(\nabla\underline{\boldsymbol{\tau}}) \in \boldsymbol{\Omega}^2(M)$.

Per ogni funzione $f \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^0_0(M) \equiv \boldsymbol{\Omega}^0(M)$ e per ogni connessione si definisce $\nabla f \equiv df \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^0_1(M) \equiv \boldsymbol{\Omega}^1(M)$.

Come esempi di derivate covarianti di tensori possiamo considerare le derivate covarianti dei tensori doppi covarianti, misti e controvarianti:

$$
\begin{aligned}
\nabla_\mu t_{\alpha\beta} &= \partial_\mu t_{\alpha\beta} - t_{\sigma\beta}\Gamma^\sigma{}_{\alpha\mu} - t_{\alpha\sigma}\Gamma^\sigma{}_{\beta\mu} \\
\nabla_\mu t^\alpha_\beta &= \partial_\mu t^\alpha_\beta + \Gamma^\alpha{}_{\sigma\mu} t^\sigma_\beta - t^\alpha_\sigma\,\Gamma^\sigma{}_{\beta\mu} \\
\nabla_\mu t^{\alpha\beta} &= \partial_\mu t^{\alpha\beta} + \Gamma^\alpha{}_{\sigma\mu} t^{\sigma\beta} + \Gamma^\beta{}_{\sigma\mu} t^{\alpha\sigma}
\end{aligned}
$$

Fra i campi di tensori di tipo $(1,1)$ ce n'è uno speciale che associa ad ogni punto $p \in M$ la funzione identità dello spazio tangente $T_p(M)$ in sé stesso. Possiamo vederlo come la funzione $\mathrm{id}_{\mathfrak{X}(M)} : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ e in qualunque sistema di coordinate, le sue componenti sono δ^α_β. Per ogni connessione lineare Γ si ha $\nabla\left(\mathrm{id}_{\mathfrak{X}(M)}\right) \equiv 0$ in quanto

$$
\nabla_\mu \delta^\alpha_\beta = \partial_\mu \delta^\alpha_\beta + \Gamma^\alpha{}_{\sigma\mu}\delta^\sigma_\beta - \delta^\alpha_\sigma\,\Gamma^\sigma{}_{\beta\mu} = \Gamma^\alpha{}_{\sigma\mu}\delta^\sigma_\beta - \delta^\alpha_\sigma\,\Gamma^\sigma{}_{\beta\mu} = \Gamma^\alpha{}_{\beta\mu} - \Gamma^\alpha{}_{\beta\mu} = 0
$$

Il tensore $\mathrm{id}_{\mathfrak{X}(M)} \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^1_1(M)$ è uno dei campi di tensori più costanti che esistano, dopo le funzioni costanti, ed i campi di tensori nulli.

Tra le connessioni più comuni ci sono le connessioni di Levi–Civita delle metriche riemanniane (o pseudo–riemanniane). Una metrica $\boldsymbol{g} = g_{\alpha\beta}(x)\, dx^\alpha \otimes dx^\beta$ su una varietà M è un campo di tensori, doppi, covarianti, simmetrici e non degeneri. Si dimostra facilmente che esiste un'unica connessione simmetrica Γ compatibile con la metrica $\boldsymbol{g}$ nel senso che $\nabla \boldsymbol{g} \equiv 0$. Questa è la *connessione di Levi–Civita* della metrica $\boldsymbol{g}$, che ha come coefficienti i simboli di Christoffel di seconda specie

$$\Gamma^\alpha{}_{\beta\mu} = \{^\alpha{}_{\beta\mu}\} := \tfrac{1}{2} g^{\alpha\sigma} \left(\partial_\beta g_{\sigma\mu} + \partial_\mu g_{\sigma\beta} - \partial_\sigma g_{\beta\mu}\right) \tag{33}$$

dove, come al solito, $g^{\alpha\sigma} g_{\sigma\beta} = \delta^\alpha_\beta$.

Dimostrazione.

Date una connessione lineare $\Gamma^\alpha{}_{\beta\mu}$ ed una metrica $g_{\alpha\beta}$ su una varietà M, di dimensione m, definiamo $Q_{\mu\alpha\beta} = \nabla_\mu g_{\alpha\beta}$. Scrivendo per esteso la derivata covariante $\nabla_\mu g_{\alpha\beta}$ si ha

$$Q_{\mu\alpha\beta} = \partial_\mu g_{\alpha\beta} - g_{\sigma\beta} \Gamma^\sigma{}_{\alpha\mu} - g_{\alpha\sigma} \Gamma^\sigma{}_{\beta\mu} \tag{34}$$

Per risolvere il sistema di $\frac{1}{2} m^2 (m+1)$ equazioni lineari non omogenee (34) nelle m^3 variabili $\Gamma^\alpha{}_{\beta\mu}$ possiamo procedere come segue. Calcoliamo prima la somma $Q_{\beta\sigma\mu} + Q_{\mu\sigma\beta} - Q_{\sigma\beta\mu}$

$$\begin{aligned} Q_{\beta\sigma\mu} + Q_{\mu\sigma\beta} - Q_{\sigma\beta\mu} \;&=\; \partial_\beta g_{\sigma\mu} - g_{\omega\mu} \Gamma^\omega{}_{\sigma\beta} - g_{\sigma\omega} \Gamma^\omega{}_{\mu\beta} \\ &\quad + \partial_\mu g_{\sigma\beta} - g_{\omega\beta} \Gamma^\omega{}_{\sigma\mu} - g_{\sigma\omega} \Gamma^\omega{}_{\beta\mu} \\ &\quad - \left(\partial_\sigma g_{\beta\mu} - g_{\omega\mu} \Gamma^\omega{}_{\beta\sigma} - g_{\beta\omega} \Gamma^\omega{}_{\mu\sigma}\right) \end{aligned} \tag{35}$$

Se teniamo conto della (32) si ha il seguente sistema di equazioni

$$Q_{\beta\sigma\mu} + Q_{\mu\sigma\beta} - Q_{\sigma\beta\mu} = \partial_\beta g_{\sigma\mu} + \partial_\mu g_{\sigma\beta} - \partial_\sigma g_{\beta\mu} - 2g_{\sigma\omega}\bar{\Gamma}^\omega{}_{\beta\mu} + g_{\omega\mu}T^\omega{}_{\beta\sigma} + g_{\beta\omega}T^\omega{}_{\mu\sigma} \tag{36}$$

che si può facilmente risolvere rispetto alla parte simmetrica $\bar{\Gamma}^\alpha{}_{\beta\mu}$ della connessione $\Gamma^\alpha{}_{\beta\mu}$

$$\bar{\Gamma}^\alpha{}_{\beta\mu} = \{^\alpha{}_{\beta\mu}\} + \tfrac{1}{2}\left(g_{\omega\mu}T^\omega{}_{\beta\sigma} + g_{\beta\omega}T^\omega{}_{\mu\sigma}\right)g^{\sigma\alpha} - \tfrac{1}{2}\left(Q_{\beta\sigma\mu} + Q_{\mu\sigma\beta} - Q_{\sigma\beta\mu}\right)g^{\sigma\alpha} \tag{37}$$

e, quindi, la soluzione del sistema (35) è

$$\Gamma^\alpha{}_{\beta\mu} = \{^\alpha{}_{\beta\mu}\} + \tfrac{1}{2}T^\alpha{}_{\beta\mu} + \tfrac{1}{2}\left(g_{\mu\omega}T^\omega{}_{\beta\sigma} + g_{\beta\omega}T^\omega{}_{\mu\sigma}\right)g^{\sigma\alpha} - \tfrac{1}{2}\left(Q_{\beta\sigma\mu} + Q_{\mu\sigma\beta} - Q_{\sigma\beta\mu}\right)g^{\sigma\alpha} \tag{38}$$

Nel caso particolare $T^\alpha{}_{\beta\mu} = 0$ e $Q_{\mu\alpha\beta} = 0$ vale, ovviamente, la (33).

■

11.4 Curvatura di connessioni lineari sul fibrato tangente di una varietà

La curvatura della connessione è rappresentata dal *tensore di curvatura*[10] della connessione, le cui componenti sono:

$$R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} \;=\; \partial_\mu\Gamma^\alpha{}_{\beta\nu} - \partial_\nu\Gamma^\alpha{}_{\beta\mu} + \Gamma^\alpha{}_{\sigma\mu}\Gamma^\sigma{}_{\beta\nu} - \Gamma^\alpha{}_{\sigma\nu}\Gamma^\sigma{}_{\beta\mu} \;\equiv\; \partial_\mu\Gamma^\alpha{}_{\beta\nu} + \Gamma^\alpha{}_{\sigma\mu}\Gamma^\sigma{}_{\beta\nu} - (\mu \leftrightarrow \nu)$$

Il tensore di curvatura ha componenti $R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}$ che, per costruzione, sono antisimmetriche rispetto agli ultimi due indici in basso e, quindi, è un tensore che appartiene al sottomodulo $\boldsymbol{\mathcal{T}}^1_1(M) \otimes \boldsymbol{\Omega}^2(M) \subset \boldsymbol{\mathcal{T}}^1_3(M)$.

[10] Generalizzazione del tensore di curvatura di Riemann di una metrica

Calcolando la parte antisimmetrica ${R^\alpha}_{[\beta\mu\nu]}$ delle componenti ${R^\alpha}_{\beta\mu\nu}$ del tensore di curvatura si ottiene l'identità

$$ {R^\alpha}_{[\beta\mu\nu]} = \partial_{[\mu} {T^\alpha}_{\beta\nu]} + {\Gamma^\alpha}_{\sigma[\mu} {T^\sigma}_{\beta\nu]} = \nabla_{[\mu} {T^\alpha}_{\beta\nu]} + {T^\alpha}_{\sigma[\beta} {T^\sigma}_{\mu\nu]} $$

da cui si deduce che, quando la connessione ${\Gamma^\alpha}_{\beta\mu}$ è simmetrica (cioè quando la torsione ${T^\alpha}_{\beta\mu}$ si annulla), il tensore di curvatura soddisfa all'identità algebrica[11]

$$ {R^\alpha}_{[\beta\mu\nu]} = \tfrac{1}{3}\left({R^\alpha}_{\beta\mu\nu} + {R^\alpha}_{\nu\beta\mu} + {R^\alpha}_{\mu\nu\beta} \right) = 0 \,. $$

Utilizzando le 1–forme locali di connessione $\underline{\boldsymbol{\omega}}^\alpha{}_\beta = {\Gamma^\alpha}_{\beta\mu}\, dx^\mu$ e le 2–forme locali di curvatura $\underline{\boldsymbol{\Omega}}^\alpha{}_\beta = \frac{1}{2} {R^\alpha}_{\beta\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$ si ha

$$ \underline{\boldsymbol{\Omega}}^\alpha{}_\beta = d\,\underline{\boldsymbol{\omega}}^\alpha{}_\beta + \underline{\boldsymbol{\omega}}^\alpha{}_\sigma \wedge \underline{\boldsymbol{\omega}}^\sigma{}_\beta $$

da cui, differenziando, si ottiene

$$ \begin{aligned} d\,\underline{\boldsymbol{\Omega}}^\alpha{}_\beta &= d\,\underline{\boldsymbol{\omega}}^\alpha{}_\kappa \wedge \underline{\boldsymbol{\omega}}^\kappa{}_\beta - \underline{\boldsymbol{\omega}}^\alpha{}_\kappa \wedge d\,\underline{\boldsymbol{\omega}}^\kappa{}_\beta \\ &= \left(\underline{\boldsymbol{\Omega}}^\alpha{}_\kappa - \underline{\boldsymbol{\omega}}^\alpha{}_\sigma \wedge \underline{\boldsymbol{\omega}}^\sigma{}_\kappa\right) \wedge \underline{\boldsymbol{\omega}}^\kappa{}_\beta - \underline{\boldsymbol{\omega}}^\alpha{}_\kappa \wedge \left(\underline{\boldsymbol{\Omega}}^\kappa{}_\beta - \underline{\boldsymbol{\omega}}^\kappa{}_\sigma \wedge \underline{\boldsymbol{\omega}}^\sigma{}_\beta\right) \\ &= \underline{\boldsymbol{\Omega}}^\alpha{}_\kappa \wedge \underline{\boldsymbol{\omega}}^\kappa{}_\beta - \underline{\boldsymbol{\omega}}^\alpha{}_\kappa \wedge \underline{\boldsymbol{\Omega}}^\kappa{}_\beta - \underline{\boldsymbol{\omega}}^\alpha{}_\sigma \wedge \underline{\boldsymbol{\omega}}^\sigma{}_\kappa \wedge \underline{\boldsymbol{\omega}}^\kappa{}_\beta + \underline{\boldsymbol{\omega}}^\alpha{}_\kappa \wedge \underline{\boldsymbol{\omega}}^\kappa{}_\sigma \wedge \underline{\boldsymbol{\omega}}^\sigma{}_\beta \\ &= \underline{\boldsymbol{\Omega}}^\alpha{}_\kappa \wedge \underline{\boldsymbol{\omega}}^\kappa{}_\beta - \underline{\boldsymbol{\omega}}^\alpha{}_\kappa \wedge \underline{\boldsymbol{\Omega}}^\kappa{}_\beta \end{aligned} $$

Portando tutti i termini a sinistra dell'uguale si ha infine l'identità

$$ d\,\underline{\boldsymbol{\Omega}}^\alpha{}_\beta + \underline{\boldsymbol{\omega}}^\alpha{}_\kappa \wedge \underline{\boldsymbol{\Omega}}^\kappa{}_\beta - \underline{\boldsymbol{\Omega}}^\alpha{}_\kappa \wedge \underline{\boldsymbol{\omega}}^\kappa{}_\beta \equiv d\,\underline{\boldsymbol{\Omega}}^\alpha{}_\beta + \underline{\boldsymbol{\omega}}^\alpha{}_\kappa \wedge \underline{\boldsymbol{\Omega}}^\kappa{}_\beta - \underline{\boldsymbol{\omega}}^\kappa{}_\beta \wedge \underline{\boldsymbol{\Omega}}^\alpha{}_\kappa = 0 $$

[11] Generalizzazione delle identità algebriche di Bianchi per il tensore di Riemann di una metrica

che generalizza le identità di Bianchi differenziali. Scrivendo questa identità in componenti, quando la connessione Γ è simmetrica si ha l'identità[12]

$$R^\alpha{}_{\beta[\mu\nu;\sigma]} = \tfrac{1}{3}\left(\nabla_\sigma R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} + \nabla_\nu R^\alpha{}_{\beta\sigma\mu} + \nabla_\mu R^\alpha{}_{\beta\nu\sigma}\right) = 0$$

dove si è posto, come al solito, $R^\alpha{}_{\beta\mu\nu;\sigma} = \nabla_\sigma R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}$. In generale, quando la torsione non si annulla, si ha:

$$R^\alpha{}_{\beta[\mu\nu;\sigma]} - R^\alpha{}_{\beta\kappa[\sigma} T^\kappa{}_{\mu\nu]} = 0$$

Il tensore di curvatura $R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}$ ha essenzialmente due possibili tracce: il tensore di curvatura di omotetia

$$F_{\mu\nu} = R^\alpha{}_{\alpha\mu\nu} \equiv \partial_\mu \Gamma^\alpha{}_{\alpha\nu} - \partial_\nu \Gamma^\alpha{}_{\alpha\mu}$$

ed il tensore

$$R_{\beta\nu} = R^\alpha{}_{\beta\alpha\nu} \equiv \partial_\alpha \Gamma^\alpha{}_{\beta\nu} - \partial_\nu \Gamma^\alpha{}_{\beta\alpha} + \Gamma^\alpha{}_{\sigma\alpha}\Gamma^\sigma{}_{\beta\nu} - \Gamma^\alpha{}_{\sigma\nu}\Gamma^\sigma{}_{\beta\alpha}$$

che è generalizzazione del tensore di curvatura di Ricci che si ottiene come traccia del tensore di Riemann di una metrica. Quando la connessione è la connessione di Levi–Civita di una metrica sopravvive solo il tensore di Ricci che, in questo caso è simmetrico.

Se la connessione $\Gamma^\alpha{}_{\beta\mu}$ è la connessione di Levi–Civita di una metrica $g_{\alpha\beta}$, allora possiamo definire lo *scalare di curvatura di Ricci*, o la *curvatura scalare di Ricci*, come la funzione $R = g^{\beta\nu} R_{\beta\nu}$.

[12]Generalizzazione delle identità differenziali di Bianchi per il tensore di Riemann di una metrica

FINE LEZIONE 14 MMdFC (2023-04-18 ore 14:00 – 16:00)

Riferimenti bibliografici

[1] S. Kobayashi, K. Nomizu: *Foundations of Differential Geometry, Vol. I*; John Wiley & Sons, New York · Chichester · Brisbane · Toronto · Singapore, 1963.

[2] S. Kobayashi, K. Nomizu: *Foundations of Differential Geometry, Vol. II*; John Wiley & Sons, New York · Chichester · Brisbane · Toronto, 1969.

[3] J. Dieudonné: *Éléments d'analyse 1 / Fondements de l'analyse moderne*; Gauthier–Villars, Paris, 1969.

[4] J. Dieudonné: *Éléments d'analyse 2*; Gauthier–Villars, Paris, 1969.

[5] J. Dieudonné: *Éléments d'analyse 3*; Gauthier–Villars, Paris, 1969.

[6] J. E. Marsden, T. Ratiu, R. Abraham: *Manifolds, tensor analysis and applications, Third Edition*; Springer–Verlag, 2001.

[7] M. Ferraris: *Appunti di algebra lineare, multilineare e tensori*; 2023.

[8] M. Ferraris: *Appunti di calcolo differenziale*; 2023.