12 Derivate di Lie di campi di tensori.

Dato un campo di vettori $\vec{\xi} \in \mathfrak{X}(M)$, consideriamo i diffeomorfismi locali φ_t indotti dal flusso $F_{\vec{\xi}} : \mathcal{D}_{\vec{\xi}} \longrightarrow M$. Per ogni campo di tensori $\boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^r_s(M)$ possiamo definire la *derivata di Lie del campo di tensori* $\boldsymbol{\tau}$ *lungo il campo di vettori* $\vec{\xi}$ attraverso la formula:

$$\Big(\pounds_{\vec{\xi}}(\boldsymbol{\tau})\Big)(x) = \frac{d}{dt}\Big[\big((\varphi_t)^*(\boldsymbol{\tau})\big)(x)\Big]\Big|_{t=0}$$

Dalla definizione si deduce che

1. per ogni $f \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^0_0(M)$ si ha
$$\pounds_{\vec{\xi}}(f) = \vec{\xi}(f)$$

2. per ogni $\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2 \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^r_s(M)$ si ha:
$$\pounds_{\vec{\xi}}(\boldsymbol{\tau}_1 + \boldsymbol{\tau}_2) = \pounds_{\vec{\xi}}(\boldsymbol{\tau}_1) + \pounds_{\vec{\xi}}(\boldsymbol{\tau}_2)$$

3. per ogni $\boldsymbol{\tau}_1 \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^r_s(M)$ e per ogni $\boldsymbol{\tau}_2 \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^h_k(M)$ si ha
$$\pounds_{\vec{\xi}}(\boldsymbol{\tau}_1 \otimes \boldsymbol{\tau}_2) = \Big[\pounds_{\vec{\xi}}(\boldsymbol{\tau}_1)\Big] \otimes \boldsymbol{\tau}_2 + \boldsymbol{\tau}_1 \otimes \Big[\pounds_{\vec{\xi}}(\boldsymbol{\tau}_2)\Big]$$

In particolare, se conosciamo le derivate di Lie per le funzioni $f \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^0_0(M)$ e per i campi di tensori $\boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^0_1(M)$, siamo in grado di calcolare le derivate covarianti di tutti i campi di tensori $\boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^r_s(M)$.

Per prima cosa, sapendo che per ogni funzione $f \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^0_0(M)$ si ha

$$(\varphi_t)^*(d\,f) = d\,[(\varphi_t)^*(f)]$$

si dimostra facilmente che per ogni $\underline{\boldsymbol{\omega}} = \omega_\sigma(x)dx^\sigma \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^0_1(M) \equiv \boldsymbol{\Omega}^1(M)$

$$\pounds_{\vec{\xi}}\,(\omega_\sigma(x)dx^\sigma) = \vec{\xi}(\omega_\kappa)dx^\kappa + \omega_\sigma d(\xi^\sigma) = (\xi^\sigma\,\partial_\sigma\omega_\kappa + \omega_\sigma\,\partial_\kappa\xi^\sigma)dx^\kappa$$

Possiamo dedurre la derivata di Lie $\pounds_{\vec{\xi}}(\vec{\Xi})$ di un campo di vettori $\vec{\Xi} \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^1_0(M) \equiv \mathfrak{X}(M)$ dalla identità

$$\vec{\xi}\left(\vec{\Xi}\rfloor\,\underline{\boldsymbol{\omega}}\right) = \pounds_{\vec{\xi}}\left(\vec{\Xi}\rfloor\,\underline{\boldsymbol{\omega}}\right) = \pounds_{\vec{\xi}}\left(\vec{\Xi}\right)\rfloor\,\underline{\boldsymbol{\omega}} + \vec{\Xi}\rfloor\,\pounds_{\vec{\xi}}\left(\underline{\boldsymbol{\omega}}\right)$$

che vale per ogni $\vec{\xi}, \vec{\Xi} \in \mathfrak{X}(M)$ e per ogni $\underline{\boldsymbol{\omega}} \in \boldsymbol{\Omega}^1(M)$. Facendo i calcoli, si scopre che deve essere

$$\pounds_{\vec{\xi}}\left(\vec{\Xi}\right) = \left(\xi^\alpha\partial_\alpha\Xi^\kappa - \Xi^\alpha\partial_\alpha\xi^\kappa\right)\partial_\kappa = \left[\vec{\xi}, \vec{\Xi}\right]$$

Come esempi di derivate di Lie di tensori possiamo considerare le derivate covarianti dei tensori doppi covarianti, misti e controvarianti:

$$\begin{aligned}
\left(\pounds_{\vec{\xi}}t\right)_{\alpha\beta} &= \xi^\mu\partial_\mu t_{\alpha\beta} + t_{\sigma\beta}\,\partial_\alpha\xi^\sigma + t_{\alpha\sigma}\,\partial_\beta\xi^\sigma \\
\left(\pounds_{\vec{\xi}}t\right)^\alpha_\beta &= \xi^\mu\partial_\mu t^\alpha_\beta - \partial_\sigma\xi^\alpha\,t^\sigma_\beta + t^\alpha_\sigma\,\partial_\beta\xi^\sigma \\
\left(\pounds_{\vec{\xi}}t\right)^{\alpha\beta} &= \xi^\mu\partial_\mu t^{\alpha\beta} - \partial_\sigma\xi^\alpha\,t^{\sigma\beta} - \partial_\sigma\xi^\beta\,t^{\alpha\sigma}
\end{aligned}$$

Se esiste un sistema di coordinate $\mathfrak{c} = (U, \varphi) = (U, x^\alpha)$ in cui $\vec{\xi} = \frac{\partial}{\partial x^1}$ allora calcolare la derivata di Lie di un tensore $\boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^r_s(U)$ si riduce a calcolare il campo di tensori $\frac{\partial}{\partial x^1}\boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^r_s(U)$ le cui componenti sono le derivate parziali rispetto alla coordinata x^1 delle componenti del campo di tensori $\boldsymbol{\tau}$.

13 Derivate di Lie di forme differenziali.

Per le forme differenziali $\underline{\boldsymbol{\omega}} \in \boldsymbol{\Omega}^k(M)$ la derivata di Lie si può riscrivere in modo molto utile attraverso la formula

$$\pounds_{\vec{\xi}}\,\underline{\boldsymbol{\omega}} = \vec{\xi} \lrcorner\, d\,\underline{\boldsymbol{\omega}} + d\left(\vec{\xi} \lrcorner\, \underline{\boldsymbol{\omega}}\right)$$

di É. Cartan. Basta dimostrare che la formula è vera per la derivata di Lie di una $\underline{\boldsymbol{\omega}} \in \boldsymbol{\Omega}^1(M)$ e poi applicare la proprietà tipo Leibnitz

$$\pounds_{\vec{\xi}}(\underline{\boldsymbol{\omega}} \wedge \underline{\boldsymbol{\sigma}}) = \pounds_{\vec{\xi}}(\underline{\boldsymbol{\omega}}) \wedge \underline{\boldsymbol{\sigma}} + \underline{\boldsymbol{\omega}} \wedge \pounds_{\vec{\xi}}(\underline{\boldsymbol{\sigma}}) \qquad \forall \underline{\boldsymbol{\omega}} \in \boldsymbol{\Omega}^r(M) \ \wedge \ \forall \underline{\boldsymbol{\sigma}} \in \boldsymbol{\Omega}^s(M)$$

analoga a quella che vale nel caso del prodotto tensoriale[13].

13.1 Omotopie di funzioni e formula di omotopia.

Due funzioni $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M, M)$ sono omotope fra di loro se esiste una funzione $F : I \times M \longrightarrow M$, dove $I \subset \mathbb{R}$ è un intervallo aperto che contiene l'intervallo chiuso $[0, 1]$, che sia di classe $\mathcal{C}^\infty$ e tale che $F(0, x) = f(x)$ e $F(1, x) = g(x)$.

Indichiamo con $F_t : M \longrightarrow M$ la restrizione $F|_{\{t\}\times M}$ e con $j_t : M \longrightarrow \{t\} \times M$ l'iniezione canonica (ovviamente $F_t = F \circ j_t$). Data una forma differenziale $\underline{\boldsymbol{\omega}} \in \boldsymbol{\Omega}^k(M)$, consideriamo la famiglia ad un parametro di forme differenziali $(F_t)^*(\underline{\boldsymbol{\omega}}) \in \boldsymbol{\Omega}^k(M)$. La famiglia $(F_t)^*(\underline{\boldsymbol{\omega}})$ è la cosa più vicina possibile

[13] Vale una proprietà analoga anche per il prodotto simmetrico $\odot$ di campi di tensori simmetrici.

ad una curva di classe $\mathcal{C}^\infty$ che si possa definire nello spazio vettoriale di dimensione infinita $\mathbf{\Omega}^k(M)$. Come per tutte le curve di classe $\mathcal{C}^\infty$ negli spazi vettoriali di dimensione finita possiamo calcolare il vettore tangente $\underline{\boldsymbol{\sigma}}_t \in \mathbf{\Omega}^k(M)$ dicendo che

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}}_t = \frac{d\big((F_t)^*(\underline{\boldsymbol{\omega}})\big)}{dt}$$

cioè:

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}}_t : x \longmapsto \frac{d}{dt}\Big(\big((F_t)^*(\underline{\boldsymbol{\omega}})\big)(x)\Big)$$

Se calcoliamo l'integrale

$$\int_0^1 \underline{\boldsymbol{\sigma}}_t dt : x \longmapsto \int_0^1 \underline{\boldsymbol{\sigma}}_t(x) dt$$

otteniamo la *formula di omotopia*:

$$\int_0^1 \underline{\boldsymbol{\sigma}}_t dt = (F_1)^*(\underline{\boldsymbol{\omega}}) - (F_0)^*(\underline{\boldsymbol{\omega}}) = g^*(\underline{\boldsymbol{\omega}}) - f^*(\underline{\boldsymbol{\omega}})$$

Per riscrivere la formula di omotopia in modo tale da permetterci di dimostrare il Lemma di Poincaré dobbiamo riscrivere le forme $\underline{\boldsymbol{\sigma}}_t$ in un altro modo.

La k-forma $F^*(\underline{\boldsymbol{\omega}}) \in \mathbf{\Omega}^k(I \times M)$ si può scrivere in un solo modo come la somma

$$F^*(\underline{\boldsymbol{\omega}}) = \underline{\boldsymbol{\alpha}}(t,x) + dt \wedge \underline{\boldsymbol{\beta}}(t,x)$$

dove le forme $\underline{\boldsymbol{\alpha}}(t,x) \in \mathbf{\Omega}^k(I \times M)$ e $\underline{\boldsymbol{\beta}}(t,x) \in \mathbf{\Omega}^{k-1}(I \times M)$ sono tali che

$$\frac{\partial}{\partial t} \lrcorner\, \underline{\boldsymbol{\alpha}}(t,x) = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial}{\partial t} \lrcorner\, \underline{\boldsymbol{\beta}}(t,x) = 0$$

Calcolando la derivata di Lie della forma $F^*(\underline{\boldsymbol{\omega}})$ lungo il campo di vettori $\frac{\partial}{\partial t}$ otteniamo

$$\begin{aligned} \pounds_{\frac{\partial}{\partial t}} F^*(\underline{\boldsymbol{\omega}}) &= \frac{\partial}{\partial t}\underline{\boldsymbol{\alpha}}(t,x) + dt \wedge \frac{\partial}{\partial t}\underline{\boldsymbol{\beta}}(t,x) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \lrcorner\, d(F^*(\underline{\boldsymbol{\omega}})) + d(\frac{\partial}{\partial t} \lrcorner\, F^*(\underline{\boldsymbol{\omega}})) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \lrcorner\, F^*(d(\underline{\boldsymbol{\omega}})) + d(\frac{\partial}{\partial t} \lrcorner\, F^*(\underline{\boldsymbol{\omega}})) \end{aligned}$$

Le controimmagini con le iniezioni j_t sono

$$\begin{aligned} j_t^* \pounds_{\frac{\partial}{\partial t}} F^*(\underline{\boldsymbol{\omega}}) &= j_t^* \frac{\partial}{\partial t}\underline{\boldsymbol{\alpha}}(t,x) \equiv \underline{\boldsymbol{\sigma}}_t(x) \\ &= j_t^* \frac{\partial}{\partial t} \lrcorner\, F^*(d(\underline{\boldsymbol{\omega}})) + j_t^* d(\frac{\partial}{\partial t} \lrcorner\, F^*(\underline{\boldsymbol{\omega}})) \\ &= j_t^* \frac{\partial}{\partial t} \lrcorner\, F^*(d(\underline{\boldsymbol{\omega}})) + d(j_t^* \frac{\partial}{\partial t} \lrcorner\, F^*(\underline{\boldsymbol{\omega}})) \end{aligned}$$

da cui deduciamo la nuova versione delle formula di omotopia

$$g^*(\underline{\boldsymbol{\omega}}) - f^*(\underline{\boldsymbol{\omega}}) = \mathbb{I}_F(d\underline{\boldsymbol{\omega}}) + d\,\mathbb{I}_F(\underline{\boldsymbol{\omega}})$$

dove $\mathbb{I}_F : \boldsymbol{\Omega}^r(M) \longrightarrow \boldsymbol{\Omega}^{r-1}(M)$ è l'operatore lineare definito da

$$\mathbb{I}_F(\underline{\boldsymbol{\sigma}}) = \int_0^1 \left[j_t^* \left(\frac{\partial}{\partial t} \lrcorner\, F^*(\underline{\boldsymbol{\sigma}}) \right) \right] dt$$

Quando $\underline{\boldsymbol{\omega}}$ è una forma chiusa si ha

$$g^*(\underline{\boldsymbol{\omega}}) - f^*(\underline{\boldsymbol{\omega}}) = d\,\mathbb{I}_F(\underline{\boldsymbol{\omega}})$$

e se poi f è una funzione costante e $g = \mathrm{id}_M$ si ha

$$\underline{\boldsymbol{\omega}} = d\,\mathbb{I}_F(\underline{\boldsymbol{\omega}})$$

Questa è la dimostrazione del lemma di Poincaré che afferma che ogni forma chiusa è localmente esatta.

Le varietà M in cui la funzione identità id_M è omotopa ad una funzione $f : M \longrightarrow M$ costante sono dette *varietà semplicemente connesse*. Su queste varietà ogni forma chiusa è globalmente esatta. Sulle varietà non semplicemente connesse ci sono sia forme chiuse che sono globalmente esatte che forme chiuse che sono solo localmente esatte.

14 Basi anolonome.

Per lavorare con campi di tensori a volte conviene rappresentarli con le loro componenti rispetto a basi anolonome. Dato un sottoinsieme aperto U di una varietà M tale che il modulo $\mathfrak{X}(U)$ sia libero, possiamo scegliere una base $(\vec{\boldsymbol{\xi}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{\xi}}_m)$ del modulo $\mathfrak{X}(U)$ e rappresentare ogni campo di tensori $\boldsymbol{\zeta} \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^p_q(U)$ attraverso le componenti

$$\zeta^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} = \boldsymbol{\zeta}(\underline{\boldsymbol{\theta}}^{i_1}, \ldots, \underline{\boldsymbol{\theta}}^{i_p}, \vec{\boldsymbol{\xi}}_{j_1}, \ldots, \vec{\boldsymbol{\xi}}_{j_q})$$

dove le 1–forme $(\underline{\boldsymbol{\theta}}^1, \ldots, \underline{\boldsymbol{\theta}}^m)$ sono la base duale della base $(\vec{\boldsymbol{\xi}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{\xi}}_m)$, cioè:

$$\vec{\boldsymbol{\xi}}_i \lrcorner\, \underline{\boldsymbol{\theta}}^k = \underline{\boldsymbol{\theta}}^k(\vec{\boldsymbol{\xi}}_i) = \delta^k_i$$

.

Per fare effettivamente i calcoli bisogna calcolare molto spesso i commutatori $[\vec{\boldsymbol{\xi}}_i, \vec{\boldsymbol{\xi}}_j]$ ed i differenziali esterni $d\,\underline{\boldsymbol{\theta}}^k$. I coefficienti

$$C^k_{rs} = [\vec{\boldsymbol{\xi}}_r, \vec{\boldsymbol{\xi}}_s] \lrcorner\, \underline{\boldsymbol{\theta}}^k = \underline{\boldsymbol{\theta}}^k \left([\vec{\boldsymbol{\xi}}_r, \vec{\boldsymbol{\xi}}_s]\right)$$

sono funzioni appartenenti a $\mathcal{C}^\infty(U;\mathbb{R})$ e si ha

$$[\vec{\boldsymbol{\xi}}_r, \vec{\boldsymbol{\xi}}_s] = C^k_{rs}\, \vec{\boldsymbol{\xi}}_k \tag{39}$$

$$d\,\underline{\boldsymbol{\theta}}^k = -\tfrac{1}{2} C^k_{rs} \underline{\boldsymbol{\theta}}^r \wedge \underline{\boldsymbol{\theta}}^s \tag{40}$$

Dimostrazione.

Per dimostrare la (40) possiamo procedere come segue. Prima di tutto, se necessario, restringiamo l'aperto U al caso in cui esso sia il dominio di una carta $(U, x^1, \ldots, x^m)$. Rappresentiamo i campi di vettori $\vec{\boldsymbol{\xi}}_i$ e le 1–forme $\underline{\boldsymbol{\theta}}^r$

$$\vec{\boldsymbol{\xi}}_s = \xi^\alpha_s \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \tag{41}$$

$$\underline{\boldsymbol{\theta}}^k = \theta^k_\beta\, dx^\beta \tag{42}$$

dove la matrice (θ^k_β) è la matrice inversa della matrice (ξ^α_s), cioè:

$$\xi^\alpha_s\, \theta^s_\beta = \delta^\alpha_\beta \qquad\qquad \theta^k_\sigma\, \xi^\sigma_i = \delta^k_i\,.$$

Calcolando i commutatori

$$\begin{aligned}
[\vec{\boldsymbol{\xi}}_r, \vec{\boldsymbol{\xi}}_s] &= \vec{\boldsymbol{\xi}}_r(\xi_s^\lambda)\frac{\partial}{\partial x^\lambda} - \vec{\boldsymbol{\xi}}_s(\xi_r^\lambda)\frac{\partial}{\partial x^\lambda} \\
&= \left(\xi_r^\alpha \partial_\alpha \xi_s^\lambda - \xi_s^\alpha \partial_\alpha \xi_r^\lambda\right) \theta_\lambda^k \vec{\boldsymbol{\xi}}_k \\
&= \left(\xi_s^\alpha \xi_r^\lambda \partial_\alpha \theta_\lambda^k - \xi_r^\alpha \xi_s^\lambda \partial_\alpha \theta_\lambda^k\right) \vec{\boldsymbol{\xi}}_k \\
&= \left(\xi_s^\sigma \xi_r^\rho \partial_\sigma \theta_\rho^k - \xi_r^\rho \xi_s^\sigma \partial_\rho \theta_\sigma^k\right) \vec{\boldsymbol{\xi}}_k \\
&= \xi_s^\sigma \xi_r^\rho \left(\partial_\sigma \theta_\rho^k - \partial_\rho \theta_\sigma^k\right) \vec{\boldsymbol{\xi}}_k
\end{aligned}$$

e, quindi:

$$C_{rs}^k = \left(\xi_r^\alpha \partial_\alpha \xi_s^\lambda - \xi_s^\alpha \partial_\alpha \xi_r^\lambda\right) \theta_\lambda^k = -\xi_r^\rho \xi_s^\sigma \left(\partial_\rho \theta_\sigma^k - \partial_\sigma \theta_\rho^k\right)$$

Calcolando ora i differenziali

$$\begin{aligned}
d\,\underline{\boldsymbol{\theta}}^k &= d\left(\theta_\beta^k\, dx^\beta\right) \\
&= \partial_\alpha \theta_\beta^k\, dx^\alpha \wedge dx^\beta \\
&= \tfrac{1}{2}\left(\partial_\alpha \theta_\beta^k - \partial_\beta \theta_\alpha^k\right) dx^\alpha \wedge dx^\beta \\
&= \tfrac{1}{2}\left(\partial_\alpha \theta_\beta^k - \partial_\beta \theta_\alpha^k\right) \xi_a^\alpha \xi_b^\beta\, \underline{\boldsymbol{\theta}}^a \wedge \underline{\boldsymbol{\theta}}^b \\
&= -\tfrac{1}{2} C_{ab}^k\, \underline{\boldsymbol{\theta}}^a \wedge \underline{\boldsymbol{\theta}}^b
\end{aligned}$$

Dall'identità di Jacobi per i commutatori di campi di vettori su M si deduce che vale l'identità

$$C_{ki}^a C_{rs}^k + C_{ks}^a C_{ir}^k + C_{kr}^a C_{si}^k = \vec{\xi}_i\left(C_{rs}^a\right) + \vec{\xi}_s\left(C_{ir}^a\right) + \vec{\xi}_r\left(C_{si}^a\right).$$

■

Come conseguenza dell'identità (40), per le derivate di Lie delle 1-forme $\underline{\boldsymbol{\theta}}^i$ della base duale rispetto ai campi di vettori $\vec{\boldsymbol{\xi}}_r$ della base valgono le seguenti identità:

$$\mathcal{L}_{\vec{\boldsymbol{\xi}}_r}(\underline{\boldsymbol{\theta}}^k) = -C^k_{rb}\,\underline{\boldsymbol{\theta}}^b \tag{43}$$

Dimostrazione. Per la dimostrazione basta calcolare le derivate di Lie con la formula di Cartan

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\vec{\boldsymbol{\xi}}_r}(\underline{\boldsymbol{\theta}}^k) &= d(\vec{\boldsymbol{\xi}}_r \lrcorner\, \underline{\boldsymbol{\theta}}^k) + \vec{\boldsymbol{\xi}}_r \lrcorner\, d\,\underline{\boldsymbol{\theta}}^k \\
&= d(\delta^k_r) + \vec{\boldsymbol{\xi}}_r \lrcorner\, \left(-\tfrac{1}{2}C^k_{ab}\,\underline{\boldsymbol{\theta}}^a \wedge \underline{\boldsymbol{\theta}}^b\right) \\
&= \vec{\boldsymbol{\xi}}_r \lrcorner\, \left(-\tfrac{1}{2}C^k_{ab}\,\underline{\boldsymbol{\theta}}^a \wedge \underline{\boldsymbol{\theta}}^b\right) \\
&= -C^k_{rb}\,\underline{\boldsymbol{\theta}}^b
\end{aligned}$$

■

Riferimenti bibliografici

[1] S. Kobayashi, K. Nomizu: *Foundations of Differential Geometry, Vol. I*; John Wiley & Sons, New York · Chichester · Brisbane · Toronto · Singapore, 1963.

[2] S. Kobayashi, K. Nomizu: *Foundations of Differential Geometry, Vol. II*; John Wiley & Sons, New York · Chichester · Brisbane · Toronto, 1969.

[3] J. Dieudonné: *Éléments d'analyse 1 / Fondements de l'analyse moderne*; Gauthier–Villars, Paris, 1969.

[4] J. Dieudonné: *Éléments d'analyse 2*; Gauthier–Villars, Paris, 1969.

[5] J. Dieudonné: *Éléments d'analyse 3*; Gauthier–Villars, Paris, 1969.

[6] J. E. Marsden, T. Ratiu, R. Abraham: *Manifolds, tensor analysis and applications, Third Edition*; Springer–Verlag, 2001.

[7] M. Ferraris: *Appunti di algebra lineare, multilineare e tensori*; 2023.

[8] M. Ferraris: *Appunti di calcolo differenziale*; 2023.

Appunti su gruppi di Lie e fibrati principali

Marco FERRARIS

Dipartimento di Matematica “Giuseppe Peano”
Università degli Studi di Torino

2023

Sommario

In questi appunti studieremo i gruppi di Lie, le azioni dei gruppi di Lie su varietà, i fibrati principali, le connessioni principali, i fibrati associati e le connessioni indotte. Per la teoria generale si veda, ad esempio, [1] e [4].

In generale considereremo gruppi moltiplicativi. Nel caso di gruppi abeliani additivi le modifiche sono ovvie: la moltiplicazione diventa la somma, l'identità è lo 0, l'inverso è l'opposto, ...

1 Gruppi di Lie

Un gruppo di Lie è una varietà differenziabile G, di classe $\mathcal{C}^\infty$, sulla quale è definita una struttura di gruppo tale che le operazioni di gruppo siano funzioni di classe $\mathcal{C}^\infty$. Più precisamente, l'operazione di moltiplicazione

$$\begin{array}{rcccc} m & : & G \times G & \longrightarrow & G \\ & & (a,b) & \longmapsto & a \cdot b \end{array}$$

e l'operazione di inversione

$$\begin{array}{rcccc} \iota & : & G & \longrightarrow & G \\ & & a & \longmapsto & a^{-1} \end{array}$$

devono essere di classe $\mathcal{C}^\infty$.

Possiamo combinare le due condizioni in una sola richiedendo che la funzione

$$\begin{array}{rcccc} \tilde{m} & : & G \times G & \longrightarrow & G \\ & & (x,y) & \longmapsto & x \cdot y^{-1} \end{array}$$

sia di classe $\mathcal{C}^\infty$.

1.1 Esempi di gruppi di Lie

Esempio 1.1. [Prodotto cartesiano di gruppi di Lie]
Il prodotto cartesiano di gruppi di Lie G_1 e G_2 è un gruppo di Lie: l'operazione è l'operazione del gruppo prodotto $G_1 \times G_2$

$$(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = (a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2) \qquad , \qquad (a_1, a_2)^{-1} = (a_1^{-1}, a_2^{-1})$$

e la struttura di varietà differenziabile è quella della varietà prodotto $G_1 \times G_2$.

Esempio 1.2. [componente connessa dell'identità]

Quando un gruppo di Lie G non è connesso, la componente connessa G^o dell'identità di è un sottogruppo di Lie del Gruppo di Lie G.

Esempio 1.3. [sottogruppi di Lie]

Un sottogruppo di Lie H di un gruppo di Lie G è un sottogruppo di G che è anche una sottovarietà della varietà G. Come succede nel caso dei sottogruppi topologici, per sapere se un sottogruppo $H \subset G$ è un sottogruppo di Lie del gruppo di Lie G basta verificare che sia un sottospazio topologico chiuso dello spazio topologico G (vedere [4] per la dimostrazione).

1.1.1 Esempi di gruppi di Lie abeliani

Esempio 1.4. [Spazi vettoriali]

Tutti gli spazi vettoriali $\mathbf{E}$ di dimensione finita con l'operazione di somma sono esempi di gruppi di Lie abeliani.

Esempio 1.5. [Numeri reali non nulli]

Il gruppo $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ dei numeri reali non nulli, con l'operazione di moltiplicazione, è un gruppo di Lie reale di dimensione 1. La varietà $\mathbb{R}^*$ non è compatta ed ha due componenti connesse $\mathbb{R}^+$ e

$\mathbb{R}^-$. La componente connessa del numero $1 \in \mathbb{R}$ è il gruppo di Lie connesso $\mathbb{R}^+$ mentre, pur essendo diffeomorfo a $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}^-$ non è un gruppo.

Esempio 1.6. [Numeri complessi non nulli]

Il gruppo $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ dei numeri complessi non nulli, con l'operazione di moltiplicazione, è un gruppo di Lie reale di dimensione 2. Il gruppo $\mathbb{C}^*$ è abeliano, connesso, non compatto e non semplicemente connesso ($\mathbb{C}^*$ è anche un gruppo di Lie complesso di dimensione 1).

Esempio 1.7. [Numeri complessi di modulo 1]

All'interno di $\mathbb{C}^*$ c'è il sottogruppo S^1 formato dai numeri complessi di norma 1. Con questa struttura, il cerchio S^1 è un gruppo di Lie connesso, compatto e abeliano di dimensione 1.

1.1.2 Esempi di gruppi di Lie non abeliani

Esempio 1.8. [Gruppi lineari $GL(\mathbf{E})$]

Come esempi di gruppi di Lie non abeliani ci sono tutti i gruppi $GL(\mathbf{E})$ degli automorfismi degli spazi vettoriali reali $\mathbf{E}$ di dimensione finita $n > 1$. Ogni gruppo $GL(\mathbf{E})$ è un sottoinsieme aperto denso dello spazio vettoriale $L(\mathbf{E};\mathbf{E}) \equiv \mathbf{E} \otimes \mathbf{E}^*$, è isomorfo al gruppo $GL(n;\mathbb{R}) = GL(\mathbb{R}^n)$ ed ha dimensione n^2.

La funzione det : $GL(\mathbf{E}) \longrightarrow \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ è un omomorfismo di gruppi ed è una funzione di classe $\mathcal{C}^\infty$.

Esempio 1.9. [Gruppi lineari $GL^+(\mathbf{E})$]

Il gruppo di Lie $GL(\mathbf{E})$ ha due componenti connesse: la componente connessa dell'identità $\mathrm{id}_{\mathbf{E}} \in GL(\mathbf{E})$ coincide col sottogruppo $GL^+(\mathbf{E}) = \det^{-1}(\mathbb{R}^+)$ e la seconda componente connessa, che non è un gruppo, è $GL^-(\mathbf{E}) = \det^{-1}(\mathbb{R}^-)$. Ovviamente $\dim(GL^+(\mathbf{E})) = \dim(GL(\mathbf{E})) = n^2$

Esempio 1.10. [Gruppi lineari speciali $SL(\mathbf{E})$]

Il nucleo $SL(\mathbf{E}) = \mathrm{Ker}(\det) = \{A \in GL^+(\mathbf{E}) \,|\, \det(A) = 1\}$ è un gruppo di Lie connesso di dimensione $n^2 - 1$, che viene detto *gruppo lineare speciale* dello spazio vettoriale $\mathbf{E}$.[1]

Esempio 1.11. [Gruppo dei quaternioni non nulli $\mathbb{H}^*$ e gruppo S^3]

Indicando con $\mathbb{H}$ il corpo dei quaternioni, il sottoinsieme $\mathbb{H}^* = \mathbb{H} \setminus \{0\}$, con l'operazione di prodotto di quaternioni, è un gruppo di Lie non abeliano di dimensione 4. All'interno di $\mathbb{H}^*$ c'è il sottogruppo S^3 formato dai quaternioni di norma 1. Con questa struttura, la sfera S^3 è un gruppo di Lie connesso, compatto e non abeliano di dimensione 3.

[1] Più avanti vedremo altri esempi di gruppi di Lie che sono sottogruppi di Lie di gruppi del tipo $GL(\mathbf{E})$ (o $GL(n;\mathbb{R})$), ma anche gruppi di Lie che non possono essere rappresentati come sottogruppi di Lie di un gruppo $GL(\mathbf{E})$.

Esempio 1.12. [Gruppi ortogonali $O(g)$ e $SO(g)$]

Dato un prodotto scalare g su uno spazio vettoriale di dimensione finita $\mathbf{E}$, si definisce il *gruppo ortogonale* $O(g)$ del prodotto scalare g come il sottogruppo di $GL(\mathbf{E})$ formato dalle funzioni lineari invertibili $A \in GL(\mathbf{E})$ tali che $g \circ (A \times A) = g$, equivalentemente

$$\forall(\vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{v}}) \in \mathbf{E} \times \mathbf{E} \qquad g(A(\vec{\boldsymbol{u}}), A(\vec{\boldsymbol{v}})) = g(\vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{v}})$$

Il *gruppo ortogonale speciale* $SO(g)$ del prodotto scalare g è il sottogruppo di Lie costituito dalle applicazioni lineari $A \in O(g)$ tali che $\det(A) = 1$. Il sottoinsieme delle applicazioni lineari $A \in O(g)$ tali che $\det(A) = -1$ non è un sottogruppo, ma è una sottovarietà che è in corrispondenza biunivoca con $SL(g)$. Si ha

$$\dim(SO(g)) = \dim(O(g)) = \frac{n(n-1)}{2},$$

dove $n = \dim(\mathbf{E})$.

1.2 Moltiplicazioni a destra ed a sinistra

Per ogni elemento $a \in G$ possiamo definire due operazioni di moltiplicazione: la moltiplicazione a sinistra per l'elemento a

$$\begin{aligned} L_a \ : \ G &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto m(a,x) \end{aligned}$$

e la moltiplicazione a destra per l'elemento a

$$\begin{array}{rcccc} R_a & : & G & \longrightarrow & G \\ & & x & \longmapsto & m(x,a) \end{array}$$

L'associatività della moltiplicazione m ci permette di dedurre che $\forall a, b \in G$ valgono le seguenti identità

$$\begin{aligned} L_a \circ L_b &= L_{a\cdot b} \\ R_a \circ R_b &= R_{b\cdot a} \\ L_a \circ R_b &= R_b \circ L_a \end{aligned}$$

Se indichiamo con $\mathbb{1}$ l'identità del gruppo G si ha

$$L_{\mathbb{1}} = \mathrm{id}_G \qquad \text{e} \qquad R_{\mathbb{1}} = \mathrm{id}_G$$

e, quindi, le moltiplicazioni a destra ed a sinistra sono dei diffeomorfismi di G con funzioni inverse

$$(L_a)^{-1} = L_{a^{-1}} \qquad \text{e} \qquad (R_a)^{-1} = R_{a^{-1}}$$

Per ogni elemento $g \in G$ la funzione $\mathrm{Ad}_g = L_g \circ R_{g^{-1}} = R_{g^{-1}} \circ L_g$ è l'automorfismo (di classe $\mathcal{C}^\infty$) del gruppo G definito da

$$\mathrm{Ad}_g : x \longmapsto m(g, m(x, g^{-1})) \equiv m(m(g,x), g^{-1})$$

Si ha

$$\mathrm{Ad}_a \circ \mathrm{Ad}_b = \mathrm{Ad}_{a\cdot b}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}_1 &= \mathrm{id}_G \\ (\mathrm{Ad}_a)^{-1} &= \mathrm{Ad}_{a^{-1}} \end{aligned}$$

FINE LEZIONE 15 MMdFC (2023-04-19 ore 14:00 – 16:00)

Riferimenti bibliografici

[1] S. Kobayashi, K. Nomizu: *Foundations of Differential Geometry, Vol. I*; John Wiley & Sons, New York · Chichester · Brisbane · Toronto · Singapore, 1963.

[2] S. Kobayashi, K. Nomizu: *Foundations of Differential Geometry, Vol. II*; John Wiley & Sons, New York · Chichester · Brisbane · Toronto, 1969.

[3] J. Dieudonné: *Éléments d'analyse 1 / Fondements de l'analyse moderne*; Gauthier–Villars, Paris, 1969.

[4] J. Dieudonné: *Éléments d'analyse 3*; Gauthier–Villars, Paris, 1969.

[5] J. E. Marsden, T. Ratiu, R. Abraham: *Manifolds, tensor analysis and applications, Third Edition*; Springer–Verlag, 2001.

[6] M. Ferraris: *Appunti di algebra lineare, multilineare e tensori*; 2023.

[7] M. Ferraris: *Appunti di calcolo differenziale*; 2023.

[8] M. Ferraris: *Varietà differenziabili*; 2023.