Osservazione 1.1. [Moltiplicazioni a destra, a sinistra e mappa aggiunta su $GL(n;\mathbb{R})$]
Quando supponiamo che il gruppo di Lie G sia il gruppo $GL(n;\mathbb{R})$ si ha

$$\begin{aligned} L_a &: x \longmapsto a\cdot x \\ R_a &: x \longmapsto x\cdot a \\ \mathrm{Ad}_a &: x \longmapsto a\cdot x\cdot a^{-1} \end{aligned}$$

dove $\cdot$ indica il prodotto di matrici e le matrici a ed x sono matrici quadrate $n\times n$ con determinante diverso da 0.

Le mappe tangenti $T_x(L_a)$ delle moltiplicazioni a sinistra L_a sono funzioni lineari invertibili

$$T_x(L_a) : T_x(G) \longrightarrow T_{a\cdot x}(G)$$

con funzioni inverse definite da

$$(T_x(L_a))^{-1} = T_{a\cdot x}\left(L_{a^{-1}}\right)$$

In particolare, utilizzeremo abbastanza spesso le due famiglie di funzioni lineari biiettive

$$\begin{aligned} T_{1}(L_a) &: T_{1}(G) \longrightarrow T_a(G) \\ T_a(L_{a^{-1}}) &: T_a(G) \longrightarrow T_{1}(G) \end{aligned}$$

Osservazione 1.2. [Mappa tangente delle moltiplicazioni a sinistra su $GL(n;\mathbb{R})$]

Quando supponiamo che il gruppo di Lie G sia il gruppo $GL(n;\mathbb{R})$ si ha

$$\begin{aligned} T_x(L_a) \quad &: (x, v) \longmapsto (a \cdot x, a \cdot v) \\ T_1(L_a) \quad &: (1, v) \longmapsto (a, a \cdot v) \\ T_a(L_{a^{-1}}) \quad &: (a, w) \longmapsto (1, a^{-1} \cdot w) \end{aligned}$$

dove $\cdot$ indica il prodotto di matrici, le matrici a ed x sono matrici quadrate $n \times n$ con determinante diverso da 0, mentre le matrici v e w sono matrici quadrate $n \times n$ qualunque.

Analogamente, le mappe tangenti delle moltiplicazioni a destra R_a sono funzioni lineari invertibili

$$T_x(R_a) : T_x(G) \longrightarrow T_{x \cdot a}(G)$$

con funzioni inverse definite da

$$(T_x(R_a))^{-1} = T_{x \cdot a}\left(R_{a^{-1}}\right)$$

Anche in questo caso, utilizzeremo abbastanza spesso le due famiglie di funzioni lineari biiettive

$$\begin{aligned} T_1(R_a) \quad &: \quad T_1(G) \longrightarrow T_a(G) \\ T_a(R_{a^{-1}}) \quad &: \quad T_a(G) \longrightarrow T_1(G) \end{aligned}$$

Osservazione 1.3. [Mappa tangente delle moltiplicazioni a destra su $GL(n;\mathbb{R})$]

Quando supponiamo che il gruppo di Lie G sia il gruppo $GL(n;\mathbb{R})$ si ha

$$\begin{array}{lcc} T_x(R_a) & : (x,v) \longmapsto & (x\cdot a, v\cdot a) \\ T_1(R_a) & : (1,v) \longmapsto & (a, v\cdot a) \\ T_a(R_{a^{-1}}) & : (a,w) \longmapsto & (1, w\cdot a^{-1}) \end{array}$$

dove $\cdot$ indica il prodotto di matrici, le matrici a ed x sono matrici quadrate $n\times n$ con determinante diverso da 0, mentre le matrici v e w sono matrici quadrate $n\times n$ qualunque.

Calcolando le mappe tangenti delle funzioni Ad_g otteniamo

$$\begin{aligned} T_x\left(\mathrm{Ad}_g\right) &= T_x\left(L_g\circ R_{g^{-1}}\right) = T_{x\cdot g^{-1}}\left(L_g\right)\circ T_x\left(R_{g^{-1}}\right) \\ &= T_x\left(R_{g^{-1}}\circ L_g\right) = T_{g\cdot x}\left(R_{g^{-1}}\right)\circ T_x\left(L_g\right) \\ T_1\left(\mathrm{Ad}_g\right) &= T_1\left(L_g\circ R_{g^{-1}}\right) = T_{g^{-1}}\left(L_g\right)\circ T_1\left(R_{g^{-1}}\right) \\ &= T_1\left(R_{g^{-1}}\circ L_g\right) = T_g\left(R_{g^{-1}}\right)\circ T_1\left(L_g\right) \end{aligned}$$

Per quanto riguarda la funzione $\iota : G \longrightarrow G$, sappiamo che

$$\iota\circ\iota = \mathrm{id}_G \qquad , \qquad \forall x\in G\,, \quad m(\iota(x),x) = 1 = m(x,\iota(x))$$

Derivando queste identità si deduce che per ogni $x\in G$ si ha

$$T_{x^{-1}}(\iota)\circ T_x(\iota) = \mathrm{id}_{T_x(G)}$$

$$\begin{aligned} T_{x^{-1}}(R_x) \circ T_x(\iota) + T_x(L_{x^{-1}}) &= 0 \\ T_x(R_{x^{-1}}) + T_{x^{-1}}(L_x) \circ T_x(\iota) &= 0 \end{aligned}$$

Siccome per ogni $x \in G$ si ha

$$(T_{x^{-1}}(L_x))^{-1} = T_1(L_{x^{-1}}) \qquad \text{e} \qquad (T_{x^{-1}}(R_x))^{-1} = T_1(R_{x^{-1}})$$

possiamo dedurre che per ogni $x \in G$

$$\begin{aligned} T_x(\iota) &= -T_1(R_{x^{-1}}) \circ T_x(L_{x^{-1}}) &= -T_x(R_{x^{-1}} \circ L_{x^{-1}}) \\ &= -T_1(L_{x^{-1}}) \circ T_x(R_{x^{-1}}) &= -T_x(L_{x^{-1}} \circ R_{x^{-1}}) \end{aligned}$$

ed, in particolare,

$$T_1(\iota) = -\mathrm{id}_{T_1(G)}$$

Osservazione 1.4. [Mappa tangente dell'inversione]

Quando supponiamo che il gruppo di Lie G sia il gruppo $GL(n;\mathbb{R})$ si ha

$$\begin{aligned} T_x(\iota) &: (x, v) \longmapsto (x^{-1}, -x^{-1} \cdot v \cdot x^{-1}) \\ T_1(\iota) &: (1, v) \longmapsto (1, -v) \end{aligned}$$

dove $\cdot$ indica il prodotto di matrici, la matrice x ha determinante diverso da 0 e la matrice v è una matrice quadrata $n \times n$ qualunque.

2 Campi di vettori invarianti

In questa sezione studieremo i campi di vettori invarianti per moltiplicazioni a sinistra o a destra.

2.1 Campi di vettori invarianti per moltiplicazioni a sinistra

Un campo di vettori $\vec{X} \in \mathfrak{X}(G)$ è invariante per moltiplicazioni a sinistra se per ogni $g \in G$ si ha

$$(L_g)_*(\vec{X}) = \vec{X} \qquad \text{o, equivalentemente,} \qquad (L_g)^*(\vec{X}) = \vec{X}$$

L'insieme dei campi di vettori invarianti per moltiplicazioni a sinistra è un sottospazio vettoriale $\mathfrak{X}_L(G)$ dello spazio vettoriale $\mathfrak{X}(G)$.

Siccome $(L_g)_*(\vec{X}) = \vec{X}$ se e solo se $T(L_g) \circ \vec{X} = \vec{X} \circ L_g$, per ogni $x \in G$ e per ogni $g \in G$ deve valere l'identità

$$T_x(L_g)(\vec{X}(x)) = \vec{X}(g \cdot x)$$

Questa identità ci dice che se conosciamo il valore del campo invariante $\vec{X} \in \mathfrak{X}_L(G)$ in un punto $x \in G$ allora sappiamo esattamente quanto vale in ogni altro punto $y \in G$. In particolare, $\vec{X} \in \mathfrak{X}_L(G)$ se e solo se

$$\forall g \in G\,, \qquad \vec{X}(g) = T_1(L_g)(\vec{X}(1))$$

Dato un vettore $\vec{\boldsymbol{v}} \in T_1(G)$ possiamo costruire un campo di vettori invariante a sinistra $\vec{\boldsymbol{v}}_L \in \mathfrak{X}_L(G)$ ponendo

$$\vec{\boldsymbol{v}}_L : g \longmapsto T_1(L_g)(\vec{\boldsymbol{v}})$$

Il campo $\vec{\boldsymbol{v}}_L$ è l'unico campo di vettori invariante per moltiplicazione a sinistra tale che il valore nell'identità $1 \in G$ sia il vettore $\vec{\boldsymbol{v}} \in T_1(G)$.

L'insieme $\mathfrak{X}_L(G)$ dei campi di vettori invarianti a sinistra su G risulta essere, quindi, un sottospazio vettoriale di dimensione finita $n = \dim(G)$ dello spazio vettoriale di dimensione infinita $\mathfrak{X}(G)$.

Siccome per ogni $\vec{X}, \vec{Y} \in \mathfrak{X}(G)$ e per ogni $g \in G$ si ha

$$(L_g)_*([\vec{X}, \vec{Y}]) = [(L_g)_*(\vec{X}), (L_g)_*(\vec{Y})]\,,$$

lo spazio vettoriale $\mathfrak{X}_L(G)$ è anche una sottoalgebra di Lie di dimensione finita dell'algebra di Lie di dimensione infinita $\mathfrak{X}(G)$. La struttura di algebra di Lie di $\mathfrak{X}_L(G)$ induce una struttura di algebra di Lie sullo spazio tangente $T_1(G)$ con l'operazione definita da

$$[\vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\boldsymbol{w}}]_L = [\vec{\boldsymbol{v}}_L, \vec{\boldsymbol{w}}_L](1)$$

L'*algebra di Lie* $\mathfrak{g}$ del gruppo G è l'algebra di Lie $(\mathfrak{X}_L(G), [\cdot,\cdot])$ dei campi vettoriali invarianti per moltiplicazioni a sinistra, oppure l'algebra di Lie $(T_1(G), [\cdot,\cdot]_L)$.

Osservazione 2.1. [Costanti di struttura dell'algebra di Lie $\mathfrak{X}_L(G)$]

Data una base ordinata $(\vec{\boldsymbol{e}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{e}}_n) \in \mathcal{B}(T_1(G))$, possiamo estendere ogni vettore $\vec{\boldsymbol{e}}_i$ della base ad un campo di vettori $\vec{\boldsymbol{\lambda}}_i := (\vec{\boldsymbol{e}}_i)_L$ invariante per moltiplicazioni a sinistra sul gruppo G; ovviamente si ha $\vec{\boldsymbol{\lambda}}_i(1) = \vec{\boldsymbol{e}}_i$. I campi di vettori $\vec{\boldsymbol{\lambda}}_i$ formano una base per lo spazio vettoriale $\mathfrak{X}_L(G)$ e calcolando i commutatori dei campi di vettori $\vec{\boldsymbol{\lambda}}_i$ si ottiene

$$[\vec{\boldsymbol{\lambda}}_i, \vec{\boldsymbol{\lambda}}_j] = c^k_{ij} \vec{\boldsymbol{\lambda}}_k$$

da cui si deduce che

$$\left[v^i \vec{\boldsymbol{\lambda}}_i, w^j \vec{\boldsymbol{\lambda}}_j\right] = v^i w^j c^k_{ij} \, \vec{\boldsymbol{\lambda}}_k$$

Le costanti c^k_{ij} si chiamano *costanti di struttura* dell'algebra di Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{X}_L(G)$ del gruppo G e, come vedremo più avanti, sono le componenti di un campo di tensori invariante per moltiplicazioni a sinistra. Le costanti di struttura c^k_{ij} soddisfano a due identità fondamentali

$$\begin{aligned} c^k_{ij} + c^k_{ji} &\equiv 2\, c^k_{(ij)} = 0 && \text{(antisimmetria)} \\ c^h_{ki} c^k_{rs} + c^h_{ks} c^k_{ir} + c^h_{kr} c^k_{si} &\equiv 3\, c^h_{k[i} c^k_{rs]} = 0 && \text{(identità di Jacobi)} \end{aligned}$$

che derivano direttamente dalle proprietà del commutatore di campi di vettori.

Ovviamente si ha

$$\begin{aligned} [\vec{\boldsymbol{e}}_i, \vec{\boldsymbol{e}}_j]_L &= c^k_{ij} \vec{\boldsymbol{e}}_k \\ \left[v^i \vec{\boldsymbol{e}}_i, w^j \vec{\boldsymbol{e}}_j\right]_L &= v^i w^j c^k_{ij} \vec{\boldsymbol{e}}_k \end{aligned}$$

Osservazione 2.2. [Costanti di struttura dell'algebra di Lie $\mathfrak{X}_L(GL(n;\mathbb{R}))$]

Quando supponiamo che il gruppo di Lie G sia il gruppo $GL(n;\mathbb{R})$ si ha

$$\vec{\boldsymbol{v}}_{L} : x \longmapsto (x, x\cdot v).$$

ed utilizzando le solite coordinate standard sul gruppo $GL(n;\mathbb{R})$ possiamo scrivere

$$\vec{\boldsymbol{v}}_{L}(x) = x^r_k v^k_s \frac{\partial}{\partial x^r_s} = x^r_k v^k_s \vec{\partial}\,^s_r$$

$$\begin{aligned}[\vec{\boldsymbol{v}}_{L}, \vec{\boldsymbol{w}}_{L}] &= [x^r_k v^k_s\,\vec{\partial}\,^s_r, x^a_c w^c_b\,\vec{\partial}\,^b_a] \\ &= x^a_k(v^k_c w^c_b - w^k_c v^c_b)\,\vec{\partial}\,^b_a\end{aligned}$$

$$[\vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\boldsymbol{w}}]_{L} = (v^r_k w^k_s - w^r_k v^k_s)(\vec{\partial}\,^s_r|_1)$$

Gli n^2 campi di vettori

$$\vec{\boldsymbol{\lambda}}^a_b = x^c_b \frac{\partial}{\partial x^c_a} = x^c_b \vec{\partial}\,^a_c = \vec{\partial}\,^a_c \otimes x^c_b$$

sono invarianti per moltiplicazioni a sinistra e formano una base per lo spazio vettoriale $\mathfrak{X}_L(GL(n;\mathbb{R}))$.

I commutatori degli elemti della base sono

$$\begin{aligned}\left[\vec{\boldsymbol{\lambda}}^a_b, \vec{\boldsymbol{\lambda}}^r_s\right] &= \vec{\boldsymbol{\lambda}}^a_b(x^w_s)\vec{\partial}\,^r_w - \vec{\boldsymbol{\lambda}}^r_s(x^c_b)\vec{\partial}\,^a_c \\ &= x^c_b\vec{\partial}\,^a_c(x^w_s)\vec{\partial}\,^r_w - x^w_s\vec{\partial}\,^r_w(x^c_b)\vec{\partial}\,^a_c \\ &= x^c_b\delta^a_s\delta^w_c\vec{\partial}\,^r_w - x^w_s\delta^r_b\delta^c_w\vec{\partial}\,^a_c\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \delta^a_s x^c_b \vec{\partial}^{\,r}_{\,c} - \delta^r_b x^c_s \vec{\partial}^{\,a}_{\,c} \\
&= \delta^a_s \vec{\boldsymbol{\lambda}}^r_b - \delta^r_b \vec{\boldsymbol{\lambda}}^s_a
\end{aligned}
$$

Se non è strettamente necessario, nel caso di $GL(n;\mathbb{R})$ continueremo a scrivere formule di "tipo matriciale" e non scriveremo le costanti di struttura perché saranno simboli con tre coppie di indici e portano a formule inutilmente complicate.

Calcolando le immagini $(R_g)_*$ di un campo di vettori $\vec{\boldsymbol{v}}_L$ invariante per moltiplicazioni a sinistra si ottiene

$$
(R_g)_*(\vec{\boldsymbol{v}}_L) = T(R_g) \circ \vec{\boldsymbol{v}}_L \circ R_{g^{-1}} = (\mathrm{ad}_{g^{-1}}(\vec{\boldsymbol{v}}))_L
$$

Dimostrazione. Infatti si ha:

$$
\begin{aligned}
\big((R_g)_*(\vec{\boldsymbol{v}}_L)\big)(x) &= (T(R_g) \circ \vec{\boldsymbol{v}}_L \circ R_{g^{-1}})(x) \\
&= T(R_g)(\vec{\boldsymbol{v}}_L(R_{g^{-1}}(x))) \\
&= T(R_g)(\vec{\boldsymbol{v}}_L(x \cdot g^{-1})) \\
&= T_{x\cdot g^{-1}}(R_g)(\vec{\boldsymbol{v}}_L(x \cdot g^{-1})) \\
&= T_{x\cdot g^{-1}}(R_g)(T_1(L_{x\cdot g^{-1}})(\vec{\boldsymbol{v}})) \\
&= T_1(R_g \circ L_{x\cdot g^{-1}})(\vec{\boldsymbol{v}}) \\
&= T_1(R_g \circ L_x \circ L_{g^{-1}})(\vec{\boldsymbol{v}})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= T_1(L_x \circ R_g \circ L_{g^{-1}})(\vec{\boldsymbol{v}}) \\
&= (T_1(L_x) \circ T_1(R_g \circ L_{g^{-1}}))(\vec{\boldsymbol{v}}) \\
&= (T_1(L_x) \circ T_1(\mathrm{Ad}_{g^{-1}}))(\vec{\boldsymbol{v}}) \\
&= (T_1(L_x) \circ \mathrm{ad}_{g^{-1}})(\vec{\boldsymbol{v}}) \\
&= T_1(L_x)(\mathrm{ad}_{g^{-1}}(\vec{\boldsymbol{v}})) \\
&= (\mathrm{ad}_{g^{-1}}(\vec{\boldsymbol{v}}))_L(x)
\end{aligned}
$$

■

Osservazione 2.3. [Campi di vettori in $\vec{\boldsymbol{v}}_L \in \mathfrak{X}_L(GL(n;\mathbb{R}))$]

Con notazioni da prodotti di matrici possiamo dedurre che un campo di vettori $\vec{\boldsymbol{v}}_L$ si può scrivere nel seguente modo

$$\vec{\boldsymbol{v}}_L = \mathrm{tr}\left(x \otimes v \otimes \frac{\partial}{\partial x}\right) = \mathrm{tr}\left(v \otimes \frac{\partial}{\partial x} \otimes x\right) = \mathrm{tr}\left(\frac{\partial}{\partial x} \otimes x \otimes v\right)$$

Posto $R_a(x) = x \cdot a = y$ si ha $x = y \cdot a^{-1}$ e possiamo scrivere formalmente

$$
\begin{aligned}
\Big((R_a)_*(\vec{\boldsymbol{v}}_L)\Big)(y) &= \mathrm{tr}\left(\frac{\partial}{\partial(y \cdot a^{-1})} \otimes (y \cdot a^{-1}) \otimes v\right) \\
&= \mathrm{tr}\left(a \otimes \frac{\partial}{\partial y} \otimes y \otimes a^{-1} \otimes v\right) \\
&= \mathrm{tr}\left(\frac{\partial}{\partial y} \otimes y \otimes \left(a^{-1} \cdot v \cdot a\right)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \operatorname{tr}\left(\frac{\partial}{\partial y}\otimes y\otimes\left(\mathrm{ad}_{a^{-1}}(v)\right)\right)\\
&= \left(\mathrm{ad}_{a^{-1}}(v)\right)_L(y)
\end{aligned}
$$

Ovviamente, questo modo di fare i calcoli è da prendere con le molle, ma, facendo molta attenzione, si può fare.

2.2 Curve integrali dei campi di vettori invarianti per moltiplicazioni a sinistra

Dato un vettore $\vec{\boldsymbol{v}} \in T_1(G)$ consideriamo una curva integrale $\gamma : t \longmapsto \gamma(t)$, basata nell'identità $1 \in G$, del campo vettoriale $\vec{\boldsymbol{v}}_L \in \mathfrak{X}_L(G)$. L'equazione a cui soddisfa la curva γ è la seguente

$$
\frac{d\gamma(t)}{dt} = \vec{\boldsymbol{v}}_L(\gamma(t)) = T_1(L_{\gamma(t)})(\vec{\boldsymbol{v}}) \qquad \text{con} \qquad \gamma(0) = 1\,.
$$

Se γ è una curva integrale del campo di vettori $\vec{\boldsymbol{v}}_L$ allora sappiamo che $\gamma_a = (L_a)_*(\gamma) \equiv L_a \circ \gamma$ è una curva integrale del campo di vettori $(L_a)_*(\vec{\boldsymbol{v}}_L) \equiv \vec{\boldsymbol{v}}_L$ e, quindi, la curva $\gamma_a(t)$ è una curva integrale basata nel punto $a \in G$.

In particolare, la curva γ è un sottogruppo ad un parametro di G in quanto si ha

$$
\gamma(t)\cdot\gamma(\tau) = \gamma_{\gamma(t)}(\tau) = \gamma(t+\tau) = \gamma(\tau+t) = \gamma_{\gamma(\tau)}(t) = \gamma(\tau)\cdot\gamma(t)
$$

La funzione γ può essere estesa a tutta la retta reale $\mathbb{R}$ e viene spesso indicata con $\gamma(t) = \exp(t\,\vec{\boldsymbol{v}})$. Tutti i campi di vettori $\vec{\boldsymbol{v}}_L \in \mathfrak{X}_L(G)$ sono completi.

Attenzione! I sottogruppi ad un parametro di un gruppo di Lie G non sono necessariamente sottogruppi di Lie di G. L'esempio più semplice è il gruppo di Lie abeliano $G = T^2 = S^1 \times S^1$ in cui i sottogruppi ad un parametro che non sono sottovarietà sono infinitamente di più di quelli che sono sottovarietà.

Osservazione 2.4. [Curve integrali dei campi di vettori $\vec{\boldsymbol{v}}_L \in \mathfrak{X}_L(GL(n;\mathbb{R}))$]
Quando supponiamo che il gruppo di Lie G sia il gruppo $GL(n;\mathbb{R})$ si ha che

$$T_1(GL(n;\mathbb{R})) = \{1\} \times L(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n) \equiv L(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n) \equiv T_1^1(\mathbb{R}^n) \equiv \mathrm{End}(\mathbb{R}^n) \equiv \mathfrak{gl}(n;\mathbb{R})\,.$$

Per ogni vettore $\vec{\boldsymbol{v}} = (1, v) \in T_1(GL(n;\mathbb{R}))$, la curva integrale massimale di $\vec{\boldsymbol{v}}_L$ basata nell'identità è

$$\vec{\boldsymbol{v}}_L : x \longmapsto (x, x \cdot v).$$

$$\gamma : t \longmapsto \exp(t\,v)$$

$$\gamma_a : t \longmapsto a \cdot \exp(t\,v)$$

dove $\exp : \mathfrak{gl}(n;\mathbb{R}) \longrightarrow GL(n;\mathbb{R})$ è la funzione esponenziale definita, come al solito, da

$$\exp(w) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k!}$$

La funzione esponenziale $\exp : \mathfrak{gl}(n;\mathbb{R}) \longrightarrow GL(n;\mathbb{R})$ è una funzione analitica reale la cui espressione esplicita dipende dalla dimensione n attraverso il teorema di Hamilton–Cayley.

Attenzione! In generale $\exp(v+w) \neq \exp(v)\cdot\exp(w)$, l'uguaglianza si ha solo quando il commutatore $[v,w] = v\cdot w - w\cdot v = 0$.

2.3 Campi di vettori invarianti per moltiplicazioni a destra

Un campo di vettori $\vec{X} \in \mathfrak{X}(G)$ è invariante per moltiplicazioni a destra se per ogni $g \in G$ si ha

$$(R_g)_*(\vec{X}) = \vec{X} \qquad \text{o, equivalentemente,} \qquad (R_g)^*(\vec{X}) = \vec{X}$$

L'insieme dei campi di vettori invarianti per moltiplicazioni a destra è un sottospazio vettoriale $\mathfrak{X}_R(G)$ dello spazio vettoriale $\mathfrak{X}(G)$.

Siccome $(R_g)_*(\vec{X}) = \vec{X}$ se e solo se $T(R_g)\circ\vec{X} = \vec{X}\circ R_g$, per ogni $x \in G$ e per ogni $g \in G$ deve valere l'identità

$$T_x(R_g)(\vec{X}(x)) = \vec{X}(x\cdot g)$$

Questa identità ci dice che se conosciamo il valore del campo invariante $\vec{X} \in \mathfrak{X}_R(G)$ in un punto $x \in G$ allora sappiamo esattamente quanto vale in ogni altro punto $y \in G$. In particolare, $\vec{X} \in \mathfrak{X}_R(G)$ se e solo se

$$\forall g \in G\,, \qquad \vec{X}(g) = T_{1}(R_g)(\vec{X}(1))$$

Dato un vettore $\vec{\boldsymbol{v}} \in T_{1}(G)$ possiamo costruire un campo di vettori invariante a destra $\vec{\boldsymbol{v}}_R \in \mathfrak{X}_R(G)$ ponendo

$$\vec{\boldsymbol{v}}_R : g \longmapsto T_{1}(R_g)(\vec{\boldsymbol{v}})$$

Il campo $\vec{\boldsymbol{v}}_R$ è l'unico campo di vettori invariante per moltiplicazione a destra tale che il valore nell'identità $1 \in G$ sia il vettore $\vec{\boldsymbol{v}} \in T_{1}(G)$.

L'insieme $\mathfrak{X}_R(G)$ dei campi di vettori invarianti a destra su G risulta essere, quindi, un sottospazio vettoriale di dimensione finita $n = \dim(G)$ dello spazio vettoriale di dimensione infinita $\mathfrak{X}(G)$.

Siccome per ogni $\vec{X}, \vec{Y} \in \mathfrak{X}(G)$ e per ogni $g \in G$ si ha

$$(R_g)_*\left([\vec{X}, \vec{Y}]\right) = \left[(R_g)_*(\vec{X}), (R_g)_*(\vec{Y})\right],$$

lo spazio vettoriale $\mathfrak{X}_R(G)$ è anche una sottoalgebra di Lie di dimensione finita dell'algebra di Lie di dimensione infinita $\mathfrak{X}(G)$. La struttura di algebra di Lie di $\mathfrak{X}_R(G)$ induce una struttura di algebra di Lie sullo spazio tangente $T_{1}(G)$ con l'operazione definita da

$$[\vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\boldsymbol{w}}]_{R} = [\vec{\boldsymbol{v}}_{R}, \vec{\boldsymbol{w}}_{R}](1)$$

Quando il gruppo G non è abeliano, le algebre di Lie $(\mathfrak{X}_L(G), [\cdot,\cdot])$ e $(\mathfrak{X}_R(G), [\cdot,\cdot])$ sono distinte, ma isomorfe. In questo caso, le due operazioni di commutatore $[\cdot,\cdot]_{R}$ e $[\cdot,\cdot]_{L}$ sono diverse, ma le due algebre di Lie $(T_{1}(G), [\cdot,\cdot]_{R})$ e $(T_{1}(G), [\cdot,\cdot]_{L})$ sono naturalmente isomorfe. Per la dimostrazione basta osservare che si ha

$$\iota_*(\vec{\boldsymbol{v}}_{\scriptscriptstyle L}) = -\vec{\boldsymbol{v}}_{\scriptscriptstyle R}$$

per ogni $\vec{\boldsymbol{v}} \in T_1(G)$.

Osservazione 2.5. [Commutatori fra campi di $\mathfrak{X}_L(G)$ e campi di $\mathfrak{X}_R(G)$]

Dalla proprietà commutativa $L_a \circ R_b = R_b \circ L_a$, che vale per ogni $a, b \in G$, si deduce che per ogni campo di vettori $\vec{\boldsymbol{v}}_{\scriptscriptstyle L} \in \mathfrak{X}_L(G)$, invariante per moltiplicazioni a sinistra, e per ogni campo di vettori $\vec{\boldsymbol{w}}_{\scriptscriptstyle R} \in \mathfrak{X}_R(G)$, invariante per moltiplicazioni a destra, si ha

$$[\vec{\boldsymbol{v}}_{\scriptscriptstyle L}, \vec{\boldsymbol{w}}_{\scriptscriptstyle R}] = \vec{\boldsymbol{0}}$$

Osservazione 2.6. [Costanti di struttura dell'algebra di Lie $\mathfrak{X}_R(G)$]

Data una base ordinata $(\vec{\boldsymbol{e}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{e}}_n) \in \mathcal{B}(T_1(G)$, possiamo estendere ogni vettore $\vec{\boldsymbol{e}}_i$ della base ad un campo di vettori $\vec{\boldsymbol{\rho}}_i := (\vec{\boldsymbol{e}}_i)_{\scriptscriptstyle R}$ invariante per moltiplicazioni a destra sul gruppo G; ovviamente si ha $\vec{\boldsymbol{\rho}}_i(1) = \vec{\boldsymbol{e}}_i$. I campi di vettori $\vec{\boldsymbol{\rho}}_i$ formano una base per lo spazio vettoriale $\mathfrak{X}_R(G)$ e calcolando i commutatori dei campi di vettori $\vec{\boldsymbol{\rho}}_i$ si ottiene

$$[\vec{\boldsymbol{\rho}}_i, \vec{\boldsymbol{\rho}}_j] = -c^k_{ij}\, \vec{\boldsymbol{\rho}}_k$$

dove le costanti c^k_{ij} sono le costanti di struttura dell'algebra di Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{X}_L(G)$ del gruppo G definite in precedenza.

Ovviamente si ha

$$[\vec{\boldsymbol{e}}_i, \vec{\boldsymbol{e}}_j]_{_R} = -c^k_{ij}\, \vec{\boldsymbol{e}}_k$$

Osservazione 2.7. [Campi di vettori appartenenti a $\mathfrak{X}_R(GL(n;\mathbb{R}))$]
Quando supponiamo che il gruppo di Lie G sia il gruppo $GL(n;\mathbb{R})$ si ha

$$\vec{\boldsymbol{v}}_{_R} : x \longmapsto (x, v\cdot x).$$

ed utilizzando le solite coordinate standard sul gruppo $GL(n;\mathbb{R})$ possiamo scrivere

$$\vec{\boldsymbol{v}}_{_R}(x) = v^r_k x^k_s \frac{\partial}{\partial x^r_s} = v^r_k x^k_s\, \vec{\partial}^{\,s}_{\;r}$$

$$\begin{aligned} [\vec{\boldsymbol{v}}_{_R}, \vec{\boldsymbol{w}}_{_R}] &= [v^r_k x^k_s\, \vec{\partial}^{\,s}_{\;r}, w^a_c x^c_b\, \vec{\partial}^{\,b}_{\;a}] \\ &= (w^a_c v^c_k - v^a_c w^c_k) x^k_b\, \vec{\partial}^{\,b}_{\;a} \end{aligned}$$

$$[\vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\boldsymbol{w}}]_{_R} = (w^r_k v^k_s - v^r_k w^k_s)(\vec{\partial}^{\,s}_{\;r}|_{1}) \equiv -[\vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\boldsymbol{w}}]_{_L} \equiv -[-\vec{\boldsymbol{v}}, -\vec{\boldsymbol{w}}]_{_L}$$

Anche in questo caso, se non è strettamente necessario, continueremo a scrivere formule di tipo matriciale e non scriveremo le costanti di struttura perché saranno simboli con tre coppie di indici portando a formule inutilmente complicate.

Posto $\vec{\boldsymbol{v}}_{L}(x) = x^r_k v^k_s \vec{\partial}^{\,s}_{\,r}$ e $\vec{\boldsymbol{w}}_{R}(x) = w^a_c x^c_b \vec{\partial}^{\,b}_{\,a}$ si ha

$$
\begin{aligned}
[\vec{\boldsymbol{v}}_{L}, \vec{\boldsymbol{w}}_{R}] &= [x^r_k v^k_s \vec{\partial}^{\,s}_{\,r}, w^a_c x^c_b \vec{\partial}^{\,b}_{\,a}] \\
&= (x^r_k v^k_s \vec{\partial}^{\,s}_{\,r})(w^a_c x^c_b)\, \vec{\partial}^{\,b}_{\,a} - (w^a_c x^c_b \vec{\partial}^{\,b}_{\,a})(x^r_k v^k_s) \vec{\partial}^{\,s}_{\,r} \\
&= (x^r_k v^k_s \vec{\partial}^{\,s}_{\,r})(w^Q_c x^c_P)\, \vec{\partial}^{\,P}_{\,Q} - (w^a_c x^c_b \vec{\partial}^{\,b}_{\,a})(x^Q_k v^k_P) \vec{\partial}^{\,P}_{\,Q} \\
&= (x^r_k v^k_s w^Q_c \vec{\partial}^{\,s}_{\,r}(x^c_P))\, \vec{\partial}^{\,P}_{\,Q} - (w^a_c x^c_b v^k_P \vec{\partial}^{\,b}_{\,a}(x^Q_k)) \vec{\partial}^{\,P}_{\,Q} \\
&= (x^r_k v^k_s w^Q_c \delta^s_P \delta^c_r)\, \vec{\partial}^{\,P}_{\,Q} - (w^a_c x^c_b v^k_P \delta^b_k \delta^Q_a) \vec{\partial}^{\,P}_{\,Q} \\
&= (x^c_k v^k_P w^Q_c)\, \vec{\partial}^{\,P}_{\,Q} - (w^Q_c x^c_b v^b_P) \vec{\partial}^{\,P}_{\,Q} \\
&= x^c_I (v^I_P w^Q_c - w^Q_c v^I_P) \vec{\partial}^{\,P}_{\,Q} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Calcolando le immagini $(L_g)_*$ di un campo di vettori $\vec{\boldsymbol{v}}_{R}$ invariante per moltiplicazioni a destra si ottiene

$$
(L_g)_*(\vec{\boldsymbol{v}}_{R}) = T(L_g) \circ \vec{\boldsymbol{v}}_{R} \circ L_{g^{-1}} = (\mathrm{ad}_g(\vec{\boldsymbol{v}}))_{R}
$$

Dimostrazione. Infatti si ha:

$$
\begin{aligned}
\big((L_g)_*(\vec{\boldsymbol{v}}_{R})\big)(x) &= (T(L_g) \circ \vec{\boldsymbol{v}}_{R} \circ L_{g^{-1}})(x) \\
&= T(L_g)(\vec{\boldsymbol{v}}_{R}(L_{g^{-1}}(x))) \\
&= T_{g^{-1}\cdot x}(L_g)(\vec{\boldsymbol{v}}_{R}(g^{-1} \cdot x))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= T_{g^{-1}\cdot x}(L_g)(T_1(R_{g^{-1}\cdot x})(\vec{\boldsymbol{v}}) \\
&= T_1(L_g \circ R_{g^{-1}\cdot x})(\vec{\boldsymbol{v}}) \\
&= T_1(L_g \circ R_x \circ R_{g^{-1}})(\vec{\boldsymbol{v}}) \\
&= T_1(R_x \circ L_g \circ R_{g^{-1}})(\vec{\boldsymbol{v}}) \\
&= (T_1(R_x) \circ T_1(L_g \circ R_{g^{-1}}))(\vec{\boldsymbol{v}}) \\
&= (T_1(R_x) \circ T_1(\mathrm{Ad}_g))(\vec{\boldsymbol{v}}) \\
&= (T_1(R_x) \circ \mathrm{ad}_g)(\vec{\boldsymbol{v}}) \\
&= T_1(R_x)(\mathrm{ad}_g(\vec{\boldsymbol{v}})) \\
&= (\mathrm{ad}_g(\vec{\boldsymbol{v}}))_R(x)
\end{aligned}
$$

■

Osservazione 2.8. [Campi di vettori invarianti in $\mathfrak{X}_R(GL(n;\mathbb{R}))$]

Con notazioni da prodotti di matrici possiamo dedurre che un campo di vettori $\vec{\boldsymbol{v}}_R$ si può scrivere nel seguente modo

$$\vec{\boldsymbol{v}}_R = \mathrm{tr}\left(v \otimes x \otimes \frac{\partial}{\partial x}\right) = \mathrm{tr}\left(x \otimes \frac{\partial}{\partial x} \otimes v\right) = \mathrm{tr}\left(\frac{\partial}{\partial x} \otimes v \otimes x\right)$$

Posto $L_a(x) = a \cdot x = y$ si ha $x = a^{-1} \cdot y$ e possiamo scrivere formalmente

$$\Big((L_a)_*(\vec{\boldsymbol{v}}_R)\Big)(y) \;=\; \mathrm{tr}\left(\frac{\partial}{\partial(a^{-1}\cdot y)} \otimes v \otimes (a^{-1}\cdot y)\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \operatorname{tr}\left(\frac{\partial}{\partial y} \otimes a \otimes v \otimes a^{-1} \otimes y\right) \\
&= \operatorname{tr}\left(\frac{\partial}{\partial y} \otimes \left(a \cdot v \cdot a^{-1}\right) \otimes y\right) \\
&= \operatorname{tr}\left(\frac{\partial}{\partial y} \otimes \Big(\mathrm{ad}_a(v)\Big) \otimes y\right) \\
&= \big(\mathrm{ad}_a(v)\big)_R(y)
\end{aligned}
$$

Anche in questo caso, il modo di fare i calcoli è da prendere con le molle, ma, facendo molta attenzione, si può fare.

2.4 Curve integrali dei campi di vettori invarianti per moltiplicazioni a destra

Dato un vettore $\vec{\boldsymbol{v}} \in T_1(G)$ consideriamo una curva integrale $\gamma : t \longmapsto \gamma(t)$, basata nell'identità $1 \in G$, del campo vettoriale $\vec{\boldsymbol{v}}_R \in \mathfrak{X}_R(G)$. L'equazione a cui soddisfa la curva γ è la seguente

$$\frac{d\gamma(t)}{dt} = \vec{\boldsymbol{v}}_R(\gamma(t)) = T_1(R_{\gamma(t)})(\vec{\boldsymbol{v}}) \qquad \text{con} \qquad \gamma(0) = 1\,.$$

Se γ è una curva integrale del campo di vettori $\vec{\boldsymbol{v}}_R$ allora sappiamo che $\gamma_a = (R_a)_*(\gamma) \equiv R_a \circ \gamma$ è una curva integrale del campo di vettori $(R_a)_*(\vec{\boldsymbol{v}}_R) \equiv \vec{\boldsymbol{v}}_R$ e, quindi, la curva $\gamma_a(t)$ è una curva integrale basata nel punto $a \in G$.

Dimostrazione. Se per ogni $a \in G$ definiamo la curva $\gamma_a = R_a \circ \gamma$, allora otteniamo

$$
\begin{aligned}
\frac{d\gamma_a(t)}{dt} &= T_{\gamma(t)}(R_a)\left(\frac{d\gamma(t)}{dt}\right) \\
&= T_{\gamma(t)}(R_a)\left(\vec{\boldsymbol{v}}_R(\gamma(t))\right) \\
&= T_{\gamma(t)}(R_a)\left(T_1(R_{\gamma(t)})(\vec{\boldsymbol{v}})\right) \\
&= T_1(R_a \circ R_{\gamma(t)})(\vec{\boldsymbol{v}}) \\
&= T_1(R_{\gamma(t)\cdot a})(\vec{\boldsymbol{v}}) \\
&= T_1(R_{\gamma_a(t)})(\vec{\boldsymbol{v}}) \\
&= \vec{\boldsymbol{v}}_R(\gamma_a(t))
\end{aligned}
$$

■

In particolare, la curva γ è un sottogruppo ad un parametro di G che coincide col sottogruppo ad un parametro $\exp(t\,\vec{\boldsymbol{v}})$ ottenuto dal campo $\vec{\boldsymbol{v}}_L$. Tutti i campi di vettori $\vec{\boldsymbol{v}}_R \in \mathfrak{X}_R(G)$ sono completi.

Osservazione 2.9. [Curve integrali di campi di vettori in $\mathfrak{X}_R(GL(n;\mathbb{R}))$]
Quando supponiamo che il gruppo di Lie G sia il gruppo $GL(n;\mathbb{R})$ si ha che, per ogni vettore $\vec{\boldsymbol{v}} = (1, v) \in T_1(GL(n;\mathbb{R}))$, la curva integrale massimale di $\vec{\boldsymbol{v}}_R : x \longmapsto (x, v\cdot x)$ basata nell'identità è

$$\gamma : t \longmapsto \exp(t\,v)\,.$$

e la curva integrale massimale basata nel punto a è:

$$\gamma_a : t \longmapsto \exp(t\, v) \cdot a\,.$$

3 1-Forme invarianti

In questa sezione studieremo le 1-forme invarianti per moltiplicazioni a sinistra o a destra.

3.1 1-Forme invarianti per moltiplicazioni a sinistra

Una 1-forma $\underline{\boldsymbol{\omega}} \in \boldsymbol{\Omega}^1(G)$ è invariante per moltiplicazioni a sinistra se per ogni $g \in G$ si ha

$$(L_g)_*\,(\underline{\boldsymbol{\omega}}) = \underline{\boldsymbol{\omega}} \qquad \text{o, equivalentemente,} \qquad (L_g)^*\,(\underline{\boldsymbol{\omega}}) = \underline{\boldsymbol{\omega}}$$

L'insieme delle 1-forme invarianti per moltiplicazioni a sinistra è un sottospazio vettoriale $\boldsymbol{\Omega}^1_{_L}(G)$ dello spazio vettoriale $\boldsymbol{\Omega}^1(G)$.

Siccome $(L_g)^*\,(\underline{\boldsymbol{\omega}}) = \underline{\boldsymbol{\omega}}$ se e solo se $T(L_g)^* \circ \underline{\boldsymbol{\omega}} = \underline{\boldsymbol{\omega}} \circ L_g$, per ogni $x \in G$ e per ogni $g \in G$ deve valere l'identità

$$\underline{\boldsymbol{\omega}}(x) = \underline{\boldsymbol{\omega}}(g \cdot x) \circ T_x(L_g)$$

Questa identità ci dice che se conosciamo il valore della 1-forma invariante $\underline{\boldsymbol{\omega}} \in \boldsymbol{\Omega}^1_{_L}(G)$ in un punto $x \in G$ allora sappiamo esattamente quanto vale in ogni altro punto $y \in G$. In particolare, $\underline{\boldsymbol{\omega}} \in \boldsymbol{\Omega}^1_{_L}(G)$

se e solo se

$$\forall x \in G\,, \qquad \underline{\boldsymbol{\omega}}(x) = \underline{\boldsymbol{\omega}}(1) \circ T_x(L_{x^{-1}})$$

Dato un covettore $\underline{\boldsymbol{\omega}} \in T^*_1(G)$ possiamo costruire una 1-forma invariante a sinistra $\underline{\boldsymbol{\omega}}_L \in \boldsymbol{\Omega}^1_L(G)$ ponendo

$$\underline{\boldsymbol{\omega}}_L : g \longmapsto \underline{\boldsymbol{\omega}} \circ T_g(L_{g^{-1}})$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
\left((L_g)^* \left(\underline{\boldsymbol{\omega}}_L\right)\right)(x) &= \left((T^*(L_g))^{-1} \circ \underline{\boldsymbol{\omega}}_L \circ L_g\right)(x) \\
&= (T^*(L_g))^{-1}(\underline{\boldsymbol{\omega}}_L(g \cdot x)) \\
&= {}^t(T_x(L_g))(\underline{\boldsymbol{\omega}}_L(g \cdot x)) \\
&= \underline{\boldsymbol{\omega}}_L(g \cdot x) \circ T_x(L_g) \\
&= \underline{\boldsymbol{\omega}} \circ T_{(g \cdot x)}(L_{(g\cdot x)^{-1}}) \circ T_x(L_g) \\
&= \underline{\boldsymbol{\omega}} \circ T_x(L_{(g\cdot x)^{-1}} \circ L_g) \\
&= \underline{\boldsymbol{\omega}} \circ T_x(L_{(x^{-1}\cdot g^{-1})} \circ L_g) \\
&= \underline{\boldsymbol{\omega}} \circ T_x(L_{x^{-1}} \circ L_{g^{-1}} \circ L_g) \\
&= \underline{\boldsymbol{\omega}} \circ T_x(L_{x^{-1}}) \\
&= \underline{\boldsymbol{\omega}}_L(x)
\end{aligned}$$

■

Calcolando la controimmagine $(R_g)^* (\underline{\boldsymbol{\omega}}_{_L})$ otteniamo, invece,

$$(R_g)^* (\underline{\boldsymbol{\omega}}_{_L}) = (\underline{\boldsymbol{\omega}} \circ \mathrm{ad}_{g^{-1}})_{_L}$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
\big((R_g)^* (\underline{\boldsymbol{\omega}}_{_L})\big)(x) &= \big((T^*(R_g))^{-1} \circ \underline{\boldsymbol{\omega}}_{_L} \circ R_g\big)(x) \\
&= (T^*(R_g))^{-1}(\underline{\boldsymbol{\omega}}_{_L}(x \cdot g)) \\
&= {}^t(T_x(R_g))(\underline{\boldsymbol{\omega}}_{_L}(x \cdot g)) \\
&= \underline{\boldsymbol{\omega}}_{_L}(x \cdot g) \circ T_x(R_g) \\
&= \underline{\boldsymbol{\omega}} \circ T_{(x\cdot g)}(L_{(x\cdot g)^{-1}}) \circ T_x(R_g) \\
&= \underline{\boldsymbol{\omega}} \circ T_x(L_{(x\cdot g)^{-1}} \circ R_g) \\
&= \underline{\boldsymbol{\omega}} \circ T_x(L_{(g^{-1}\cdot x^{-1})} \circ R_g) \\
&= \underline{\boldsymbol{\omega}} \circ T_x(L_{g^{-1}} \circ L_{x^{-1}} \circ R_g) \\
&= \underline{\boldsymbol{\omega}} \circ T_x(L_{g^{-1}} \circ R_g \circ L_{x^{-1}}) \\
&= \underline{\boldsymbol{\omega}} \circ T_x(\mathrm{Ad}_{g^{-1}} \circ L_{x^{-1}}) \\
&= \underline{\boldsymbol{\omega}} \circ T_{1}(\mathrm{Ad}_{g^{-1}}) \circ T_x(L_{x^{-1}}) \\
&= \underline{\boldsymbol{\omega}} \circ \mathrm{ad}_{g^{-1}} \circ T_x(L_{x^{-1}})
\end{aligned}$$

$$= \quad (\underline{\boldsymbol{\omega}} \circ \mathrm{ad}_{g^{-1}})_L(x)$$

■

La 1-forma $\underline{\boldsymbol{\omega}}_L$ è l'unica 1-forma invariante per moltiplicazione a sinistra tale che il valore nell'identità $\mathbb{1} \in G$ sia il covettore $\underline{\boldsymbol{\omega}} \in T^*_{\mathbb{1}}(G)$. L'insieme $\boldsymbol{\Omega}^1_L(G)$ delle 1-forme invarianti a per moltiplicazioni a sinistra su G risulta essere, quindi, un sottospazio vettoriale reale di dimensione finita $n = \dim(G)$ dello spazio vettoriale reale di dimensione infinita $\boldsymbol{\Omega}^1(G)$.

Si vede immediatamente che che lo spazio vettoriale $\boldsymbol{\Omega}^1_L(G)$ è il duale dello spazio vettoriale $\mathfrak{X}_L(G)$.

Dimostrazione. La funzione lineare che mette in dualità separante $\boldsymbol{\Omega}^1_L(G)$ e $\mathfrak{X}_L(G)$ è

$$g \longmapsto \vec{\boldsymbol{v}}_L(g) \lrcorner\, \underline{\boldsymbol{\omega}}_L(g)$$

e si ha

$$\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{v}}_L(g) \lrcorner\, \underline{\boldsymbol{\omega}}_L(g) &= \underline{\boldsymbol{\omega}}_L(g)(\vec{\boldsymbol{v}}_L(g)) \\
&= (\underline{\boldsymbol{\omega}} \circ T_g(L_{g^{-1}}))\, (T_{\mathbb{1}}(L_g)(\vec{\boldsymbol{v}})) \\
&= (\underline{\boldsymbol{\omega}} \circ T_g(L_{g^{-1}}) \circ T_{\mathbb{1}}(L_g))\, (\vec{\boldsymbol{v}}) \\
&= (\underline{\boldsymbol{\omega}} \circ T_{\mathbb{1}}(L_{g^{-1}} \circ L_g))\, (\vec{\boldsymbol{v}}) \\
&= \underline{\boldsymbol{\omega}}(\vec{\boldsymbol{v}})
\end{aligned}$$

■

Osservazione 3.1. [1–forme invarianti in $\boldsymbol{\Omega}^1_{{}_L}(H)$ per sottogruppi di Lie $H \subset G$]

Una proprietà molto importante delle 1–forme $\underline{\boldsymbol{\omega}} \in \boldsymbol{\Omega}^1_{{}_L}(G)$ è quella di essere restringibili ai sottogruppi di Lie $H \subset G$ del gruppo di Lie G (e, ovviamente, a tutte le altre sottovarietà di G). Indicando con $j : H \longrightarrow G$ l'iniezione canonica di H in G o, equivalentemente, la restrizione $j = (\mathrm{id}_G)_{|_H}$.

Siccome la funzione j è di classe $\mathcal{C}^\infty$, possiamo definire la restrizione $\underline{\boldsymbol{\omega}}_{|_H} \in \boldsymbol{\Omega}^1(H)$ imponendo che sia $\underline{\boldsymbol{\omega}}_{|_H} = j^*(\underline{\boldsymbol{\omega}})$. La 1–forma $\underline{\boldsymbol{\omega}}_{|_H}$ è manifestamente invariante per moltiplicazione a sinistra per elementi $h \in H$ e, quindi, si ha che $\underline{\boldsymbol{\omega}}_{|_H} \in \boldsymbol{\Omega}^1_{{}_L}(H)$. Ovviamente si può avere $\underline{\boldsymbol{\omega}}_{|_H} \in \boldsymbol{\Omega}^1_{{}_L}(H)$ anche quando $\underline{\boldsymbol{\omega}} \notin \boldsymbol{\Omega}^1_{{}_L}(G)$.

Osservazione 3.2. [1–forme invarianti in $\boldsymbol{\Omega}^1_{{}_L}(GL(n;\mathbb{R}))$]

Quando si suppone che il gruppo di Lie G sia il gruppo $GL(n;\mathbb{R})$, per ogni $\underline{\boldsymbol{\omega}} \in T^*_{\mathbb{1}}(GL(n;\mathbb{R})) \equiv T^1_1(\mathbb{R}^n)$ si ha[2]

$$\underline{\boldsymbol{\omega}}_{{}_L} : x \longmapsto (x, \underline{\boldsymbol{\omega}} \cdot x^{-1}).$$

ed utilizzando le solite coordinate standard sul gruppo $GL(n;\mathbb{R})$ possiamo scrivere

$$\underline{\boldsymbol{\omega}}_{{}_L} = \omega^r_k \, \bar{x}^k_s \, dx^s_r = \mathrm{tr}\left(\omega \cdot x^{-1} \cdot d\,x\right)$$

[2] Ricordiamo che $T^1_1(\mathbb{R}^n)$ è isomorfo a $L(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ e che $(L(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n))^*$ può essere identificato con $L(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ attraverso l'operazione $(\,\cdot\,)^\sharp$ associata alla metrica naturale $(A, B) \longmapsto \mathrm{tr}(A \circ B)$ di $L(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$.

dove le $\bar{x}^k_s$ sono le componenti della matrice inversa della matrice x che ha come componenti le x^a_s. Infatti, calcolando la controimmagine $(L_g)^*(\underline{\boldsymbol{\omega}}_L)$ otteniamo

$$\begin{aligned}
(L_g)^*(\underline{\boldsymbol{\omega}}_L) &= (L_g)^*\left(\mathrm{tr}(\omega\cdot x^{-1}\cdot d\,x)\right)\\
&= \mathrm{tr}\left(\omega\cdot(g\cdot x)^{-1}\cdot d\,(g\cdot x)\right)\\
&= \mathrm{tr}\left(\omega\cdot x^{-1}\cdot g^{-1}\cdot g\cdot d\,x\right)\\
&= \mathrm{tr}\left(\omega\cdot x^{-1}\cdot d\,x\right)\\
&= \underline{\boldsymbol{\omega}}_L
\end{aligned}$$

Calcolando la controimmagine $(R_g)^*(\underline{\boldsymbol{\omega}}_L)$ otteniamo, invece,

$$\begin{aligned}
(R_g)^*(\underline{\boldsymbol{\omega}}_L) &= (R_g)^*\left(\mathrm{tr}(\omega\cdot x^{-1}\cdot d\,x)\right)\\
&= \mathrm{tr}\left(\omega\cdot(x\cdot g)^{-1}\cdot d\,(x\cdot g)\right)\\
&= \mathrm{tr}\left(\omega\cdot g^{-1}\cdot x^{-1}\cdot d\,x\cdot g\right)\\
&= \mathrm{tr}\left((g\cdot\omega\cdot g^{-1})\cdot x^{-1}\cdot d\,x\right)\\
&= (\mathrm{ad}_g(\underline{\boldsymbol{\omega}}))_L
\end{aligned}$$

Anche in questo caso, se non è strettamente necessario, continueremo a scrivere formule di tipo matriciale e non scriveremo le costanti di struttura perché saranno simboli con tre coppie di indici portando a formule inutilmente complicate.

Osservazione 3.3. [1–forme invarianti in $\mathbf{\Omega}^1_L(SO(3,\mathbb{R}))$]

Sul gruppo di Lie $SO(3,\mathbb{R})$ consideriamo come coordinate gli angoli di Eulero (θ,ϕ,ψ) definiti come si usa quando vengono studiati i moti giroscopici:

$$R(\theta,\phi,\psi) = R3(\phi)\cdot R1(\theta)\cdot R3(\psi) \tag{1}$$

dove le matrici $R1$ (rotazioni intorno al primo asse) ed $R3$ (rotazioni intorno al terzo asse) sono definite da

$$R1(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$R3(\beta) = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) & 0 \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

La rotazione che fa passare dalla base fissa alla base solidale col corpo è quindi

$$R(\theta,\phi,\psi) =$$
$$\begin{pmatrix} \cos(\phi)\cos(\psi) - \sin(\phi)\cos(\theta)\sin(\psi) & -\cos(\phi)\sin(\psi) - \sin(\phi)\cos(\theta)\cos(\psi) & \sin(\phi)\sin(\theta) \\ \sin(\phi)\cos(\psi) + \cos(\phi)\cos(\theta)\sin(\psi) & -\sin(\phi)\sin(\psi) + \cos(\phi)\cos(\theta)\cos(\psi) & -\cos(\phi)\sin(\theta) \\ \sin(\theta)\sin(\psi) & \sin(\theta)\cos(\psi) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \tag{4}$$

Le matrici (4) sono la restrizione al sottogruppo di Lie $SO(3,\mathbb{R})$ delle matrici (x^i_j) del gruppo $GL(3;\mathbb{R})$. La matrice $x^{-1}\cdot dx$, le cui componenti sono una base per le 1-forme invarianti a sinistra del gruppo $GL(3;\mathbb{R})$, si può restringere al sottogruppo di Lie $SO(3,\mathbb{R})$ ottenendo la matrice antisimmetrica

$$R(\theta,\phi,\psi)^{-1}\cdot dR(\theta,\phi,\psi) = \begin{pmatrix} 0 & -\underline{\boldsymbol{\omega}}^3_L & \underline{\boldsymbol{\omega}}^2_L \\ \underline{\boldsymbol{\omega}}^3_L & 0 & -\underline{\boldsymbol{\omega}}^1_L \\ -\underline{\boldsymbol{\omega}}^2_L & \underline{\boldsymbol{\omega}}^1_L & 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

dove le 1-forme

$$\underline{\boldsymbol{\omega}}^1_L = \sin(\psi)\sin(\theta)d\phi + \cos(\psi)d\theta \tag{6}$$

$$\underline{\boldsymbol{\omega}}^2_L = \cos(\psi)\sin(\theta)d\phi - \sin(\psi)d\theta \tag{7}$$

$$\underline{\boldsymbol{\omega}}^3_L = \cos(\theta)d\phi + d\psi \tag{8}$$

formano una base per le 1-forme invarianti per moltiplicazioni a sinistra $\underline{\boldsymbol{\lambda}} \in \boldsymbol{\Omega}^1_L(SO(3,\mathbb{R}))$.

La base duale $(\vec{\boldsymbol{\lambda}}_1, \vec{\boldsymbol{\lambda}}_2, \vec{\boldsymbol{\lambda}}_3)$

$$\vec{\boldsymbol{\lambda}}_1 = \cos(\psi)\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\sin(\psi)}{\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\phi} - \frac{\sin(\psi)\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\psi} \tag{9}$$

$$\vec{\boldsymbol{\lambda}}_2 = \sin(\psi)\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos(\psi)}{\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\phi} - \frac{\cos(\psi)\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\psi} \tag{10}$$

$$\vec{\boldsymbol{\lambda}}_3 = \frac{\partial}{\partial\psi} \tag{11}$$

della base $(\underline{\boldsymbol{\omega}}^1_L, \underline{\boldsymbol{\omega}}^2_L, \underline{\boldsymbol{\omega}}^2_L)$ fornisce una base per i campi di vettori invarianti per moltiplicazioni a sinistra $\vec{\boldsymbol{\xi}} \in \mathfrak{X}_{_L}(SO(3;\mathbb{R}))$. Le costanti di struttura c^k_{rs} si ottengono dalle identità

$$\left[\vec{\boldsymbol{\lambda}}_1, \vec{\boldsymbol{\lambda}}_2\right] = \vec{\boldsymbol{\lambda}}_3 \qquad , \qquad \left[\vec{\boldsymbol{\lambda}}_1, \vec{\boldsymbol{\lambda}}_3\right] = -\vec{\boldsymbol{\lambda}}_2 \qquad , \qquad \left[\vec{\boldsymbol{\lambda}}_2, \vec{\boldsymbol{\lambda}}_3\right] = \vec{\boldsymbol{\lambda}}_1 \tag{12}$$

o, equivalentemente, $c^k_{rs} = \delta^{kl}\,\sqrt{\delta}\,\varepsilon_{lrs} = \sqrt{\delta}\,\varepsilon_{rsl}\,\delta^{lk}$.

Osservazione 3.4. [Formula di Maurer–Cartan per le basi duali in $\boldsymbol{\Omega}^1_L(G)$]
Data una base $(\vec{\boldsymbol{e}}_1, \dots, \vec{\boldsymbol{e}}_n)$ dello spazio tangente $T_{_1}(G)$, consideriamo nello spazio cotangente $T^*_{_1}(G)$ la base duale $(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^1, \dots, \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^n)$. Le 1–forme $\underline{\boldsymbol{\theta}}^i_{_L} = (\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^i)_{_L}$ sono una base di $\boldsymbol{\Omega}^1_{_L}(G)$ ed i loro differenziali esterni sono

$$d\underline{\boldsymbol{\theta}}^i_{_L} = -\tfrac{1}{2} c^i_{rs}\, \underline{\boldsymbol{\theta}}^r_{_L} \wedge \underline{\boldsymbol{\theta}}^s_{_L}$$

dove i coefficienti c^i_{rs} sono le costanti di struttura dell'algebra di Lie $\mathfrak{X}_{_L}(G)$ rispetto alla base $\vec{\boldsymbol{\lambda}}_i = (\vec{\boldsymbol{e}}_i)_{_L}$. Questa identità, che è nota come *formula di Maurer–Cartan*, ed è stata dimostrata, in un contesto più generale, negli appunti di Calcolo sulle varietà differenziabili [8].

3.2 1-Forme invarianti per moltiplicazioni a destra

Una 1-forma $\underline{\boldsymbol{\omega}} \in \boldsymbol{\Omega}^1(G)$ è invariante per moltiplicazioni a destra se per ogni $g \in G$ si ha

$$(R_g)_*\,(\underline{\boldsymbol{\omega}}) = \underline{\boldsymbol{\omega}} \qquad \text{o, equivalentemente,} \qquad (R_g)^*\,(\underline{\boldsymbol{\omega}}) = \underline{\boldsymbol{\omega}}$$

L'insieme delle 1-forme invarianti per moltiplicazioni a destra è un sottospazio vettoriale $\mathbf{\Omega}^1_{R}(G)$ dello spazio vettoriale $\mathbf{\Omega}^1(G)$.

Siccome $(R_g)^*(\underline{\boldsymbol{\omega}}) = \underline{\boldsymbol{\omega}}$ se e solo se $T(R_g)^* \circ \underline{\boldsymbol{\omega}} = \underline{\boldsymbol{\omega}} \circ R_g$, per ogni $x \in G$ e per ogni $g \in G$ deve valere l'identità

$$\underline{\boldsymbol{\omega}}(x) = \underline{\boldsymbol{\omega}}(x \cdot g) \circ T_x(R_g)$$

Questa identità ci dice che se conosciamo il valore della 1-forma invariante $\underline{\boldsymbol{\omega}} \in \mathbf{\Omega}^1_{R}(G)$ in un punto $x \in G$ allora sappiamo esattamente quanto vale in ogni altro punto $y \in G$. In particolare, $\underline{\boldsymbol{\omega}} \in \mathbf{\Omega}^1_{R}(G)$ se e solo se

$$\forall x \in G\,, \qquad \underline{\boldsymbol{\omega}}(x) = \underline{\boldsymbol{\omega}}(1) \circ T_x(R_{x^{-1}})$$

Dato un covettore $\underline{\boldsymbol{\omega}} \in T^*_1(G)$ possiamo costruire una 1-forma invariante per moltiplicazioni a destra $\underline{\boldsymbol{\omega}}_R \in \mathbf{\Omega}^1_{R}(G)$ ponendo

$$\underline{\boldsymbol{\omega}}_R : g \longmapsto \underline{\boldsymbol{\omega}} \circ T_g(R_{g^{-1}})$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
(R_g)^*(\underline{\boldsymbol{\omega}}_R)(x) &= ((T^*(R_g))^{-1} \circ \underline{\boldsymbol{\omega}}_R \circ R_g)(x) \\
&= (T^*(R_g))^{-1}(\underline{\boldsymbol{\omega}}_R(g \cdot x)) \\
&= {}^t(T_x(R_g))(\underline{\boldsymbol{\omega}}_R(x \cdot g)) \\
&= \underline{\boldsymbol{\omega}}_R(x \cdot g) \circ T_x(R_g)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \underline{\boldsymbol{\omega}} \circ T_{(x\cdot g)}(R_{(x\cdot g)^{-1}}) \circ T_x(R_g) \\
&= \underline{\boldsymbol{\omega}} \circ T_x(R_{(x\cdot g)^{-1}} \circ R_g) \\
&= \underline{\boldsymbol{\omega}} \circ T_x(R_{(g^{-1}\cdot x^{-1})} \circ R_g) \\
&= \underline{\boldsymbol{\omega}} \circ T_x(R_{x^{-1}} \circ R_{g^{-1}} \circ R_g) \\
&= \underline{\boldsymbol{\omega}} \circ T_x(R_{x^{-1}}) \\
&= \underline{\boldsymbol{\omega}}_R(x)
\end{aligned}$$

■

Calcolando la controimmagine $(L_g)^* (\underline{\boldsymbol{\omega}}_R)$ otteniamo, invece,

$$(L_g)^* (\underline{\boldsymbol{\omega}}_R) = (\underline{\boldsymbol{\omega}} \circ \mathrm{ad}_g)_R$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
(L_g)^* (\underline{\boldsymbol{\omega}}_R)(x) &= ((T^*(L_g))^{-1} \circ \underline{\boldsymbol{\omega}}_R \circ L_g)(x) \\
&= (T^*(L_g))^{-1}(\underline{\boldsymbol{\omega}}_R(g\cdot x)) \\
&= {}^t(T_x(L_g))(\underline{\boldsymbol{\omega}}_R(g\cdot x)) \\
&= \underline{\boldsymbol{\omega}}_R(g\cdot x) \circ T_x(L_g) \\
&= \underline{\boldsymbol{\omega}} \circ T_{(g\cdot x)}(R_{(g\cdot x)^{-1}}) \circ T_x(L_g)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \underline{\boldsymbol{\omega}} \circ T_x(R_{(g\cdot x)^{-1}} \circ L_g) \\
&= \underline{\boldsymbol{\omega}} \circ T_x(R_{(x^{-1}\cdot g^{-1})} \circ L_g) \\
&= \underline{\boldsymbol{\omega}} \circ T_x(R_{g^{-1}} \circ R_{x^{-1}} \circ L_g) \\
&= \underline{\boldsymbol{\omega}} \circ T_x(R_{g^{-1}} \circ L_g \circ R_{x^{-1}}) \\
&= \underline{\boldsymbol{\omega}} \circ T_x(L_g \circ R_{g^{-1}} \circ R_{x^{-1}}) \\
&= \underline{\boldsymbol{\omega}} \circ T_x(\mathrm{Ad}_g \circ R_{x^{-1}}) \\
&= \underline{\boldsymbol{\omega}} \circ T_1(\mathrm{Ad}_g) \circ T_x(R_{x^{-1}}) \\
&= \underline{\boldsymbol{\omega}} \circ \mathrm{ad}_g \circ T_x(R_{x^{-1}}) \\
&= (\underline{\boldsymbol{\omega}} \circ \mathrm{ad}_g)_{R}(x)
\end{aligned}
$$

■

La 1-forma $\underline{\boldsymbol{\omega}}_R$ è l'unica 1-forma invariante per moltiplicazione a destra tale che il valore nell'identità $1 \in G$ sia il covettore $\underline{\boldsymbol{\omega}} \in T_1^*(G)$. L'insieme $\boldsymbol{\Omega}^1_R(G)$ delle 1-forme invarianti a per moltiplicazioni a destra su G risulta essere, quindi, un sottospazio vettoriale reale di dimensione finita $n = \dim(G)$ dello spazio vettoriale reale di dimensione infinita $\boldsymbol{\Omega}^1(G)$.

Si vede immediatamente che che lo spazio vettoriale $\boldsymbol{\Omega}^1_R(G)$ è il duale dello spazio vettoriale $\mathfrak{X}_R(G)$.

Dimostrazione. La funzione lineare che mette in dualità separante $\mathbf{\Omega}^1_R(G)$ e $\mathfrak{X}_R(G)$ è

$$g \longmapsto \vec{\boldsymbol{v}}_R(g) \rfloor \underline{\boldsymbol{\omega}}_R(g)$$

e si ha

$$\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{v}}_R(g) \rfloor \underline{\boldsymbol{\omega}}_R(g) &= \underline{\boldsymbol{\omega}}_R(g)(\vec{\boldsymbol{v}}_R(g)) \\
&= (\underline{\boldsymbol{\omega}} \circ T_g(R_{g^{-1}}))(T_1(R_g)(\vec{\boldsymbol{v}})) \\
&= (\underline{\boldsymbol{\omega}} \circ T_g(R_{g^{-1}}) \circ T_1(R_g))(\vec{\boldsymbol{v}}) \\
&= (\underline{\boldsymbol{\omega}} \circ T_1(R_{g^{-1}} \circ R_g))(\vec{\boldsymbol{v}}) \\
&= \underline{\boldsymbol{\omega}}(\vec{\boldsymbol{v}})
\end{aligned}$$

■

Osservazione 3.5. [1–forme invarianti in $\mathbf{\Omega}^1_R(H)$ per sottogruppi di Lie $H \subset G$]
Una proprietà molto importante delle 1–forme $\underline{\boldsymbol{\omega}} \in \mathbf{\Omega}^1_R(G)$ è quella di essere restringibili ai sottogruppi di Lie $H \subset G$ del gruppo di Lie G (e, ovviamente, a tutte le altre sottovarietà di G). Indicando con $j : H \longrightarrow G$ l'iniezione canonica di H in G o, equivalentemente, la restrizione $j = (\mathrm{id}_G)_{|H}$. Siccome la funzione j è di classe $\mathcal{C}^\infty$, possiamo definire la restrizione $\underline{\boldsymbol{\omega}}_{|H} \in \mathbf{\Omega}^1(H)$ imponendo che sia $\underline{\boldsymbol{\omega}}_{|H} = j^*(\underline{\boldsymbol{\omega}})$. La 1–forma $\underline{\boldsymbol{\omega}}_{|H}$ è manifestamente invariante per moltiplicazione a destra per elementi $h \in H$ e, quindi, si ha che $\underline{\boldsymbol{\omega}}_{|H} \in \mathbf{\Omega}^1_R(H)$.

Ovviamente si può avere $\underline{\boldsymbol{\omega}}_{|_H} \in \boldsymbol{\Omega}^1_{_R}(H)$ anche quando $\underline{\boldsymbol{\omega}} \notin \boldsymbol{\Omega}^1_{_R}(G)$.

Osservazione 3.6. [1–forme invarianti in $\boldsymbol{\Omega}^1_R(GL(n;\mathbb{R}))$]
Quando si suppone che il gruppo di Lie G sia il gruppo $GL(n;\mathbb{R})$, per ogni $\underline{\boldsymbol{\omega}} \in T^*_{1}(GL(n;\mathbb{R})) \equiv (T^1_1(\mathbb{R}^n))^* \equiv T^1_1(\mathbb{R}^n)$ si ha

$$\underline{\boldsymbol{\omega}}_{_R} : x \longmapsto (x, x^{-1}\cdot \underline{\boldsymbol{\omega}}).$$

ed utilizzando le solite coordinate standard sul gruppo $GL(n;\mathbb{R})$ possiamo scrivere

$$\underline{\boldsymbol{\omega}}_{_R} = \bar{x}^r_i\, \omega^i_s\, dx^s_r = \mathrm{tr}\left(x^{-1}\cdot \omega \cdot d\,x\right) = \mathrm{tr}\left(\omega \cdot d\,x \cdot x^{-1}\right)$$

dove, come nel caso precedente, le $\bar{x}^k_s$ sono le componenti della matrice inversa della matrice x che ha come componenti le x^a_s. Infatti, calcolando la controimmagine $(R_g)^*\,(\underline{\boldsymbol{\omega}}_{_R})$ otteniamo

$$\begin{aligned}
(R_g)^*\,(\underline{\boldsymbol{\omega}}_{_R}) &= (R_g)^*\left(\mathrm{tr}(\omega \cdot d\,x \cdot x^{-1})\right) \\
&= \mathrm{tr}\left(\omega\cdot d\,(x\cdot g)\cdot (x\cdot g)^{-1}\right) \\
&= \mathrm{tr}\left(\omega\cdot d\,x\cdot g \cdot g^{-1}\cdot x^{-1}\right) \\
&= \mathrm{tr}\left(\omega\cdot d\,x \cdot x^{-1}\right) \\
&= \underline{\boldsymbol{\omega}}_{_R}
\end{aligned}$$

Calcolando la controimmagine $(L_g)^*\,(\underline{\boldsymbol{\omega}}_{_R})$ otteniamo, invece,

$$(L_g)^*\,(\underline{\boldsymbol{\omega}}_{_R}) = (L_g)^*\left(\mathrm{tr}(\omega \cdot d\,x \cdot x^{-1})\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \operatorname{tr}\left(\omega \cdot d\,(g \cdot x) \cdot (g \cdot x)^{-1}\right) \\
&= \operatorname{tr}\left(\omega \cdot g \cdot d\,x \cdot x^{-1} \cdot g^{-1}\right) \\
&= \operatorname{tr}\left((g^{-1} \cdot \omega \cdot g) \cdot d\,x \cdot x^{-1}\right) \\
&= (\mathrm{ad}_{g^{-1}}(\underline{\boldsymbol{\omega}}))_{R}
\end{aligned}
$$

Anche in questo caso, se non è strettamente necessario, continueremo a scrivere formule di tipo matriciale e non scriveremo le costanti di struttura perché saranno simboli con tre coppie di indici portando a formule inutilmente complicate.

Osservazione 3.7. [1–forme invarianti in $\boldsymbol{\Omega}^1_R(SO(3,\mathbb{R}))$]
La matrice $dx \cdot x^{-1}$, le cui componenti sono una base per le 1-forme invarianti per moltiplicazione a destra del gruppo $GL(3;\mathbb{R})$, si può restringere al sottogruppo di Lie $SO(3,\mathbb{R})$ ottenendo la matrice antisimmetrica

$$
dR(\theta,\phi,\psi) \cdot R(\theta,\phi,\psi)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\underline{\boldsymbol{\omega}}^3_R & \underline{\boldsymbol{\omega}}^2_R \\ \underline{\boldsymbol{\omega}}^3_R & 0 & -\underline{\boldsymbol{\omega}}^1_R \\ -\underline{\boldsymbol{\omega}}^2_R & \underline{\boldsymbol{\omega}}^1_R & 0 \end{pmatrix} \tag{13}
$$

dove le 1-forme

$$
\underline{\boldsymbol{\omega}}^1_R = \sin(\phi)\sin(\theta)d\psi + \cos(\phi)d\theta \tag{14}
$$

$$\underline{\boldsymbol{\omega}}^2_R = -\cos(\phi)\sin(\theta)d\psi + \sin(\phi)d\theta \tag{15}$$

$$\underline{\boldsymbol{\omega}}^3_R = \cos(\theta)d\psi + d\phi \tag{16}$$

formano una base per le 1-forme invarianti per moltiplicazione a destra $\underline{\boldsymbol{\rho}} \in \boldsymbol{\Omega}^1_{_R}(SO(3,\mathbb{R}))$.

La base duale $(\vec{\boldsymbol{\rho}}_1, \vec{\boldsymbol{\rho}}_2, \vec{\boldsymbol{\rho}}_3)$

$$\vec{\boldsymbol{\rho}}_1 = -\cos(\phi)\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\sin(\psi)\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\phi} - \frac{\sin(\phi)}{\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\psi} \tag{17}$$

$$\vec{\boldsymbol{\rho}}_2 = \sin(\phi)\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos(\phi)\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\phi} - \frac{\cos(\phi)}{\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\psi} \tag{18}$$

$$\vec{\boldsymbol{\rho}}_3 = \frac{\partial}{\partial\phi} \tag{19}$$

della base $(\underline{\boldsymbol{\omega}}^1_R, \underline{\boldsymbol{\omega}}^2_R, \underline{\boldsymbol{\omega}}^2_R)$ fornisce una base per i campi di vettori invarianti per moltiplicazioni a destra $\vec{\boldsymbol{\xi}} \in \mathfrak{X}_{_R}(SO(3;\mathbb{R}))$. Le costanti di struttura $-c^k_{rs}$ si ottengono dalle identità

$$[\vec{\boldsymbol{\rho}}_1, \vec{\boldsymbol{\rho}}_2] = -\vec{\boldsymbol{\rho}}_3 \qquad , \qquad [\vec{\boldsymbol{\rho}}_1, \vec{\boldsymbol{\rho}}_3] = \vec{\boldsymbol{\rho}}_2 \qquad , \qquad [\vec{\boldsymbol{\rho}}_2, \vec{\boldsymbol{\rho}}_3] = -\vec{\boldsymbol{\rho}}_1 \tag{20}$$

o, equivalentemente, $c^k_{rs} = \delta^{kl}\sqrt{\delta}\,\varepsilon_{lrs} = \sqrt{\delta}\,\varepsilon_{rsl}\,\delta^{lk}$.

Osservazione 3.8. [Formula di Maurer–Cartan per le basi duali in $\boldsymbol{\Omega}^1_R(G)$]

Data una base $(\vec{\boldsymbol{e}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{e}}_n)$ dello spazio tangente $T_1(G)$, consideriamo nello spazio cotangente $T^*_1(G)$ la base duale $(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^1, \ldots, \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^n)$. Le 1–forme $\underline{\boldsymbol{\theta}}^i_{_R} = (\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^i)_{_R}$ sono una base di $\boldsymbol{\Omega}^1_{_R}(G)$ ed i loro differenziali esterni sono

$$d\underline{\boldsymbol{\theta}}^i_{_R} = \frac{1}{2} c^i_{rs}\, \underline{\boldsymbol{\theta}}^r_{_R} \wedge \underline{\boldsymbol{\theta}}^s_{_R}$$

dove i coefficienti $-c^i_{rs}$ sono le costanti di struttura dell'algebra di Lie $\mathfrak{X}_{_R}(G)$ rispetto alla base $\vec{\boldsymbol{\rho}}_i = (\vec{\boldsymbol{e}}_i)_{_R}$. Questa identità, che è nota come *formula di Maurer–Cartan*, è stata dimostrata, in un contesto più generale, negli appunti di Calcolo sulle varietà differenziabili [8].

4 Azioni di gruppi di Lie su varietà

In questa sezione studieremo le azioni, per moltiplicazioni a sinistra o a destra, dei gruppi di Lie su varietà.

4.1 Azioni a sinistra di gruppi di Lie su varietà

Un'*azione a sinistra* di un gruppo di Lie G su una varietà X è una funzione di classe $\mathcal{C}^\infty$

$$\begin{array}{rccc} \bar{m} : & G \times X & \longrightarrow & X \\ & (g, x) & \longmapsto & g \cdot x \end{array}$$

che gode della proprietà associativa

$$\bar{m}(g_2, \bar{m}(g_1, x)) = \bar{m}(m(g_2, g_1), x) \qquad \forall\ g_2, g_1 \in G\ \wedge\ \forall\ x \in X$$

L'azione a sinistra $\bar{m}$ induce due famiglie di moltiplicazioni analoghe alle moltiplicazioni a sinistra ed a destra sul gruppo G.

Per ogni elemento $a \in G$ possiamo definire la moltiplicazione a sinistra per l'elemento a

$$\begin{array}{rcccc} \bar{L}_a & : & X & \longrightarrow & X \\ & & x & \longmapsto & \bar{m}(a,x) \end{array}$$

e per ogni $x \in X$ possiamo definire la moltiplicazione a destra per l'elemento x

$$\begin{array}{rcccc} \bar{R}_x & : & G & \longrightarrow & X \\ & & a & \longmapsto & \bar{m}(a,x) \end{array}$$

L'associatività della moltiplicazione $\bar{m}$ ci permette di dedurre che $\forall a, b \in G$ e $\forall x \in X$ valgono le seguenti identità

$$\begin{aligned} \bar{L}_a \circ \bar{L}_b &= \bar{L}_{a \cdot b} \\ \bar{R}_x \circ R_a &= \bar{R}_{a \cdot x} \\ \bar{R}_x \circ L_b &= \bar{L}_b \circ \bar{R}_x \end{aligned}$$

Siccome si ha

$$\bar{L}_1 = \mathrm{id}_X \,,$$

le moltiplicazioni a sinistra sono dei diffeomorfismi di X con funzioni inverse

$$\left(\bar{L}_a\right)^{-1} = \bar{L}_{a^{-1}} \,.$$

Le moltiplicazioni a destra $\bar{R}_x : G \longmapsto X$ permettono di trasformare ogni vettore tangente $\vec{\boldsymbol{v}} \in T_1(G)$ in un campo di vettori $\vec{\boldsymbol{v}}_X \in \mathfrak{X}(X)$ definito da:

$$\vec{\boldsymbol{v}}_X : x \longmapsto T_1(\bar{R}_x)(\vec{\boldsymbol{v}})$$

che è analogo al campo di vettori $\vec{\boldsymbol{v}}_R \in \mathfrak{X}_R(G)$. La funzione $\vec{\boldsymbol{v}} \longmapsto \vec{\boldsymbol{v}}_X$ è lineare.

Calcolando le immagini $(\bar{L}_g)_*(\vec{\boldsymbol{v}}_X)$ si ottiene

$$(\bar{L}_g)_*(\vec{\boldsymbol{v}}_X) = (\mathrm{ad}_g(\vec{\boldsymbol{v}}))_X$$

Dimostrazione. Infatti si ha:

$$\begin{aligned}
((\bar{L}_g)_*(\vec{\boldsymbol{v}}_X))(x) &= (T(\bar{L}_g) \circ \vec{\boldsymbol{v}}_X \circ \bar{L}_{g^{-1}})(x) \\
&= T(\bar{L}_g)(\vec{\boldsymbol{v}}_X(\bar{L}_{g^{-1}}(x))) \\
&= T(\bar{L}_g)(\vec{\boldsymbol{v}}_X(g^{-1} \cdot x)) \\
&= T_{g^{-1}\cdot x}(\bar{L}_g)(\vec{\boldsymbol{v}}_X(g^{-1} \cdot x)) \\
&= T_{g^{-1}\cdot x}(\bar{L}_g)(T_1(\bar{R}_{g^{-1}\cdot x})(\vec{\boldsymbol{v}})) \\
&= T_1(\bar{L}_g \circ \bar{R}_{g^{-1}\cdot x})(\vec{\boldsymbol{v}}) \\
&= T_1(\bar{L}_g \circ \bar{R}_x \circ R_{g^{-1}})(\vec{\boldsymbol{v}}) \\
&= T_1(\bar{R}_x \circ L_g \circ R_{g^{-1}})(\vec{\boldsymbol{v}})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= T_1(\bar{R}_x \circ \mathrm{Ad}_g)(\vec{\boldsymbol{v}}) \\
&= T_1(\bar{R}_x)(\mathrm{ad}_g(\vec{\boldsymbol{v}})) \\
&= (\mathrm{ad}_g(\vec{\boldsymbol{v}}))_X(x)
\end{aligned}
$$

■

Vale la seguente proprietà

$$[\vec{\boldsymbol{v}}_X, \vec{\boldsymbol{w}}_X] = ([\vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\boldsymbol{w}}]_R)_X$$

I campi di vettori $\vec{\boldsymbol{v}}_X$ permettono di verificare se una funzione $f \in \mathcal{C}^\infty(X; \mathbb{R})$ è invariante per le moltiplicazioni a sinistra $\bar{L}_a$. L'identità $(\bar{L}_a)^*(f) = f \; \forall a \in G$ ci dice che $\forall a \in G$ e $\forall x \in X$ deve valere l'identità

$$f(x) = \left((\bar{L}_a)^*(f)\right)(x) = f(\bar{L}_a(x)) = f(\bar{R}_x(a)) \tag{21}$$

Se consideriamo una curva $\gamma : I \longrightarrow G$ possiamo, quindi affermare che $\forall x \in X$ e $\forall t \in I$

$$f(\bar{R}_x(\gamma(t))) = f(x) \tag{22}$$

Considerando curve γ basate nell'identità $1 \in G$ e definendo $\vec{\boldsymbol{v}} = \frac{d\gamma}{dt}|_{t=0} \in T_1(G)$, possiamo affermare che $\forall x \in X$ e $\forall \vec{\boldsymbol{v}} \in T_1(G)$

$$0 = \left.\frac{d(f \circ \bar{R}_x \circ \gamma)}{dt}\right|_{t=0} = T_x(f)(T_1(\bar{R}_x)(\vec{\boldsymbol{v}})) = T_x(f)(\vec{\boldsymbol{v}}_X(x)) = (\vec{\boldsymbol{v}}_X(f))(x) \tag{23}$$

o, equivalentemente,

$$\vec{\boldsymbol{v}}_X(f) = \pounds_{\vec{\boldsymbol{v}}_X}(f) = 0 \qquad\qquad \forall \vec{\boldsymbol{v}} \in T_1(G) \tag{24}$$

La condizione che coinvolge la derivata di Lie può essere estesa a tutti i campi di tensori invarianti per moltiplicazioni a sinistra sulla varietà X.

Osservazione 4.1. [Azione naturale a sinistra di $GL(n;\mathbb{R})$ su $\mathbb{R}^n$]

Quando il gruppo di Lie G è il gruppo $GL(n;\mathbb{R})$ e la varietà X è lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ si ha

$$\begin{aligned} \bar{L}_a \quad &: x \longmapsto a \cdot x \\ \bar{R}_x \quad &: a \longmapsto a \cdot x \end{aligned}$$

dove $\cdot$ indica il prodotto di matrici, la matrice a è una matrice quadrata $n \times n$ con determinante diverso da 0 ed x è una matrice colonna $n \times 1$. Il campo di vettori $\vec{\boldsymbol{v}}_X$ è

$$\vec{\boldsymbol{v}}_X : x \longmapsto (x, v \cdot x).$$

ed utilizzando le solite coordinate standard sul gruppo $GL(n;\mathbb{R})$ e su $\mathbb{R}^n$ possiamo scrivere

$$\vec{\boldsymbol{v}}_X(x) = v^r_k x^k \frac{\partial}{\partial x^r} = v^r_k x^k \, \vec{\partial}_r$$

$$\begin{aligned} [\vec{\boldsymbol{v}}_X, \vec{\boldsymbol{w}}_X] &= [v^r_k x^k \, \vec{\partial}_r, w^a_c x^c \, \vec{\partial}_a] \\ &= (v^r_k x^k \, \vec{\partial}_r)(w^a_c x^c)\vec{\partial}_a - (v \leftrightarrow w) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (v^r_k x^k)(w^a_c \delta^c_r)\vec{\partial}_a - (v \leftrightarrow w) \\
&= (w^a_c v^c_k - v^a_c w^c_k) x^k \vec{\partial}_a \\
&= ([\vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\boldsymbol{w}}]_{R})_X
\end{aligned}
$$

Osservazione 4.2. [Azione naturale a sinistra di $GL(n;\mathbb{R})$ su $\mathbb{R}^n \otimes (\mathbb{R}^m)^*$]

Quando il gruppo di Lie G è il gruppo $GL(n;\mathbb{R})$ e la varietà X è lo spazio vettoriale $L(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n) \equiv \mathbb{R}^n \otimes (\mathbb{R}^m)^*$ si ha

$$
\begin{aligned}
\bar{L}_a &: x \longmapsto a \cdot x \\
\bar{R}_x &: a \longmapsto a \cdot x
\end{aligned}
$$

dove $\cdot$ indica il prodotto di matrici, la matrice a è una matrice quadrata $n \times n$ con determinante diverso da 0 ed x è una matrice "rettangolare" $n \times m$ (n righe ed m colonne).

Il campo di vettori $\vec{\boldsymbol{v}}_X$ è

$$\vec{\boldsymbol{v}}_X : x \longmapsto (x, v \cdot x).$$

ed utilizzando le solite coordinate standard sul gruppo $GL(n;\mathbb{R})$ possiamo scrivere

$$\vec{\boldsymbol{v}}_X(x) = v^r_k x^k_\alpha \frac{\partial}{\partial x^r_\alpha} = v^r_k x^k_\alpha \, \vec{\partial}^{\,\alpha}_{\,r}$$

$$
\begin{aligned}
[\vec{\boldsymbol{v}}_X, \vec{\boldsymbol{w}}_X] &= [v^r_k x^k_\alpha \, \vec{\partial}^{\,\alpha}_{\,r}, w^a_c x^c_\beta \, \vec{\partial}^{\,\beta}_{\,a}] \\
&= (w^a_c v^c_k - v^a_c w^c_k) x^k_\beta \, \vec{\partial}^{\,\beta}_{\,a}
\end{aligned}
$$

$$= \quad ([\vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\boldsymbol{w}}]_{_R})_{X}$$

4.2 Azioni a destra di gruppi di Lie su varietà

Un'*azione a destra* di un gruppo di Lie G su una varietà X è una funzione di classe $\mathcal{C}^\infty$

$$\begin{array}{rcccc} \bar{m} & : & X \times G & \longrightarrow & X \\ & & (x,g) & \longmapsto & x \cdot g \end{array}$$

che gode della proprietà associativa

$$\bar{m}(\bar{m}(x,g_1),g_2) = \bar{m}(x, m(g_1,g_2)) \qquad \forall\ g_2, g_1 \in G\ \wedge\ \forall\ x \in X$$

L'azione a destra $\bar{m}$ induce due famiglie di moltiplicazioni analoghe alle moltiplicazioni a sinistra ed a destra sul gruppo G.

Per ogni elemento $x \in X$ possiamo definire la moltiplicazione a destra per l'elemento x

$$\begin{array}{rcccc} \bar{L}_x & : & G & \longrightarrow & X \\ & & a & \longmapsto & \bar{m}(x,a) \end{array}$$

e per ogni $a \in G$ possiamo definire la moltiplicazione a destra per l'elemento a

$$\begin{array}{rcccc} \bar{R}_a & : & X & \longrightarrow & X \\ & & x & \longmapsto & \bar{m}(x,a) \end{array}$$

L'associatività della moltiplicazione $\bar{m}$ ci permette di dedurre che $\forall a, b \in G$ e $\forall x \in X$ valgono le seguenti identità

$$\begin{aligned} \bar{R}_b \circ \bar{R}_a &= \bar{R}_{a \cdot b} \\ \bar{L}_x \circ L_a &= \bar{L}_{x \cdot a} \\ \bar{L}_x \circ R_b &= \bar{R}_b \circ \bar{L}_x \end{aligned}$$

Siccome si ha

$$\bar{R}_1 = \mathrm{id}_X\,,$$

le moltiplicazioni a sinistra sono dei diffeomorfismi di X con funzioni inverse

$$\left(\bar{R}_a\right)^{-1} = \bar{R}_{a^{-1}}\,.$$

Le moltiplicazioni a destra $\bar{L}_x : G \longmapsto X$ permettono di trasformare ogni vettore tangente $\vec{\boldsymbol{v}} \in T_1(G)$ in un campo di vettori $\vec{\boldsymbol{v}}_X \in \mathfrak{X}(X)$ definito da:

$$\vec{\boldsymbol{v}}_X : x \longmapsto T_1(\bar{L}_x)(\vec{\boldsymbol{v}})$$

che è analogo al campo di vettori $\vec{\boldsymbol{v}}_L \in \mathfrak{X}_L(G)$. La funzione $\vec{\boldsymbol{v}} \longmapsto \vec{\boldsymbol{v}}_X$ è lineare.

Calcolando le immagini $(\bar{R}_g)_*(\vec{\boldsymbol{v}}_X)$ si ottiene

$$(\bar{R}_g)_*(\vec{\boldsymbol{v}}_X) = (\mathrm{ad}_{g^{-1}}(\vec{\boldsymbol{v}}))_X$$

Dimostrazione. Infatti si ha:

$$
\begin{aligned}
((\bar{R}_g)_*(\vec{\boldsymbol{v}}_X))(x) &= (T(\bar{R}_g) \circ \vec{\boldsymbol{v}}_X \circ \bar{R}_{g^{-1}})(x) \\
&= T(\bar{R}_g)(\vec{\boldsymbol{v}}_X(\bar{R}_{g^{-1}}(x))) \\
&= T(\bar{R}_g)(\vec{\boldsymbol{v}}_X(x \cdot g^{-1})) \\
&= T_{x \cdot g^{-1}}(\bar{R}_g)(\vec{\boldsymbol{v}}_X(x \cdot g^{-1})) \\
&= T_{x \cdot g^{-1}}(\bar{R}_g)(T_1(\bar{L}_{x \cdot g^{-1}})(\vec{\boldsymbol{v}})) \\
&= T_1(\bar{R}_g \circ \bar{L}_{x \cdot g^{-1}})(\vec{\boldsymbol{v}}) \\
&= T_1(\bar{R}_g \circ \bar{L}_x \circ L_{g^{-1}})(\vec{\boldsymbol{v}}) \\
&= T_1(\bar{L}_x \circ R_g \circ L_{g^{-1}})(\vec{\boldsymbol{v}}) \\
&= T_1(\bar{L}_x \circ \mathrm{Ad}_{g^{-1}})(\vec{\boldsymbol{v}}) \\
&= T_1(\bar{L}_x)(\mathrm{ad}_{g^{-1}}(\vec{\boldsymbol{v}})) \\
&= (\mathrm{ad}_{g^{-1}}(\vec{\boldsymbol{v}}))_X(x)
\end{aligned}
$$

■

Vale la seguente proprietà

$$[\vec{\boldsymbol{v}}_X, \vec{\boldsymbol{w}}_X] = ([\vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\boldsymbol{w}}]_L)_X$$

I campi di vettori $\vec{\boldsymbol{v}}_X$ permettono di verificare se una funzione $f \in \mathcal{C}^\infty(X;\mathbb{R})$ è invariante per le moltiplicazioni a destra $\bar{R}_a$. L'identità $(\bar{R}_a)^*(f) = f \ \forall a \in G$ ci dice che $\forall a \in G$ e $\forall x \in X$ deve valere l'identità

$$f(x) = \left((\bar{R}_a)^*(f)\right)(x) = f(\bar{R}_a(x)) = f(\bar{L}_x(a)) \tag{25}$$

Se consideriamo una curva $\gamma : I \longrightarrow G$ possiamo, quindi affermare che $\forall x \in X$ e $\forall t \in I$

$$f(\bar{L}_x(\gamma(t))) = f(x) \tag{26}$$

Considerando curve γ basate nell'identità $\mathbb{1} \in G$ e definendo $\vec{\boldsymbol{v}} = \frac{d\gamma}{dt}|_{t=0} \in T_{\mathbb{1}}(G)$, possiamo affermare che $\forall x \in X$ e $\forall \vec{\boldsymbol{v}} \in T_{\mathbb{1}}(G)$

$$0 = \left.\frac{d(f \circ \bar{L}_x \circ \gamma)}{dt}\right|_{t=0} = T_x(f)(T_{\mathbb{1}}(\bar{L}_x)(\vec{\boldsymbol{v}})) = T_x(f)(\vec{\boldsymbol{v}}_X(x)) = (\vec{\boldsymbol{v}}_X(f))(x) \tag{27}$$

o, equivalentemente,

$$\vec{\boldsymbol{v}}_X(f) = \pounds_{\vec{\boldsymbol{v}}_X}(f) = 0 \qquad\qquad \forall \vec{\boldsymbol{v}} \in T_{\mathbb{1}}(G) \tag{28}$$

La condizione che coinvolge la derivata di Lie può essere estesa a tutti i campi di tensori invarianti per moltiplicazioni a destra sulla varietà X.

Osservazione 4.3. [Azione naturale a destra di $GL(n;\mathbb{R})$ su $(\mathbb{R}^n)^*$]

Quando il gruppo di Lie G è il gruppo $GL(n;\mathbb{R})$ e la varietà X è lo spazio vettoriale $(\mathbb{R}^n)^*$ si ha

$$\begin{aligned} \bar{R}_a &: x \longmapsto x \cdot a \\ \bar{L}_x &: a \longmapsto x \cdot a \end{aligned}$$

dove $\cdot$ indica il prodotto di matrici, la matrice a è una matrice quadrata $n\times n$ con determinante diverso da 0 ed x è una matrice riga $1 \times n$. Il campo di vettori $\vec{\boldsymbol{v}}_X$ è

$$\vec{\boldsymbol{v}}_X : x \longmapsto (x, x \cdot v).$$

ed utilizzando le solite coordinate standard sul gruppo $GL(n;\mathbb{R})$ e su $(\mathbb{R}^n)^*$ possiamo scrivere

$$\vec{\boldsymbol{v}}_X(x) = x_r v^r_k \frac{\partial}{\partial x_k} = x_r v^r_k\, \vec{\partial}^k$$

$$\begin{aligned}
[\vec{\boldsymbol{v}}_X, \vec{\boldsymbol{w}}_X] &= [x_r v^r_k\, \vec{\partial}^k, x_a w^a_b\, \vec{\partial}^b] \\
&= (x_r v^r_k\, \vec{\partial}^k)(x_a w^a_b)\, \vec{\partial}^b - (v \leftrightarrow w) \\
&= (x_r v^r_k)(\delta^k_a w^a_b)\, \vec{\partial}^b - (v \leftrightarrow w) \\
&= (v^r_a w^a_b - w^r_a v^a_b) x_r \vec{\partial}^b \\
&= ([\vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\boldsymbol{w}}]_L)_X
\end{aligned}$$

Osservazione 4.4. [Azione naturale a destra di $GL(m;\mathbb{R})$ su $\mathbb{R}^n \otimes (\mathbb{R}^m)^*$]

Quando il gruppo di Lie G è il gruppo $GL(m;\mathbb{R})$ e la varietà X è lo spazio vettoriale $L(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n) \equiv \mathbb{R}^n \otimes (\mathbb{R}^m)^*$ si ha

$$\begin{aligned}
\bar{R}_a &: x \longmapsto x \cdot a \\
\bar{L}_x &: a \longmapsto x \cdot a
\end{aligned}$$

dove $\cdot$ indica il prodotto di matrici, la matrice a è una matrice quadrata $m \times m$ con determinante diverso da 0 ed x è una matrice “rettangolare” $n \times m$ (n righe ed m colonne).

Il campo di vettori $\vec{\boldsymbol{v}}_X$ è

$$\vec{\boldsymbol{v}}_X : x \longmapsto (x, x \cdot v).$$

ed utilizzando le solite coordinate standard sul gruppo $GL(n;\mathbb{R})$ possiamo scrivere

$$\vec{\boldsymbol{v}}_X(x) = x^k_\alpha v^\alpha_\beta \frac{\partial}{\partial x^k_\beta} = x^k_\alpha v^\alpha_\beta\, \vec{\partial}\,^\beta_k$$

$$\begin{aligned}
[\vec{\boldsymbol{v}}_X, \vec{\boldsymbol{w}}_X] &= [x^k_\alpha v^\alpha_\beta\, \vec{\partial}\,^\beta_k, x^i_\rho w^\rho_\sigma\, \vec{\partial}\,^\sigma_i] \\
&= (x^k_\alpha v^\alpha_\beta\, \vec{\partial}\,^\beta_k (x^i_\rho w^\rho_\sigma)\, \vec{\partial}\,^\sigma_i) - (v \leftrightarrow w) \\
&= (x^k_\alpha v^\alpha_\beta (\delta^i_k \delta^\beta_\rho w^\rho_\sigma)\, \vec{\partial}\,^\sigma_i) - (v \leftrightarrow w) \\
&= (x^i_\alpha v^\alpha_\beta w^\beta_\sigma\, \vec{\partial}\,^\sigma_i) - (v \leftrightarrow w) \\
&= x^i_\alpha (v^\alpha_\beta w^\beta_\sigma)\, \vec{\partial}\,^\sigma_i - (v \leftrightarrow w) \\
&= x^i_\alpha (v^\alpha_\beta w^\beta_\sigma - w^\alpha_\beta v^\beta_\sigma)\, \vec{\partial}\,^\sigma_i \\
&= ([\vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\boldsymbol{w}}]_L)_X
\end{aligned}$$

4.3 Spazi delle orbite e stabilizzatori

L'orbita di un punto $x \in X$ per un'azione a sinistra $\bar{m} : G \times X \longrightarrow X$ è il sottoinsieme di $\mathcal{O}_x \subseteq X$ definito da

$$\mathcal{O}_x = \bar{m}(G, \{x\}) = \{y = \bar{m}(g, x) \in X \,|\, g \in G\}$$

e lo stabilizzatore del punto $x \in X$ è il sottogruppo $S_x \subseteq G$

$$S_x = \{g \in G \,|\, \bar{m}(g, x) = x\}$$

Se l'azione è un'azione a destra $\bar{m} : X \times G \longrightarrow X$, l'orbita $\mathcal{O}_x \subseteq X$ è definita da

$$\mathcal{O}_x = \bar{m}(\{x\}, G) = \{y = \bar{m}(x, g) \in X \,|\, g \in G\}$$

e lo stabilizzatore è il sottogruppo chiuso $S_x \subseteq G$

$$S_x = \{g \in G \,|\, \bar{m}(x, g) = x\}$$

Le proprietà delle azioni a sinistra sono in corrispondenza biunivoca con proprietà analoghe delle azioni a destra perché data un'azione a sinistra $\bar{m} : (g, x) \longmapsto g \cdot x$ la funzione $\bar{m}' : (x, g) \longmapsto g^{-1} \cdot x$ è un'azione a destra. Analogamente se $\bar{m} : (x, g) \longmapsto x \cdot g$ è un'azione a destra la funzione $\bar{m}' : (g, x) \longmapsto x \cdot g^{-1}$ è un'azione a sinistra.

- Se esiste un punto $x \in X$ tale che $\mathcal{O}_x = X$ diciamo che l'azione è *transitiva*; in questo caso, $\forall\, y \in X$ si ha $\mathcal{O}_y = X$.

- Se l'intersezione $\bigcap_{x \in X} S_x = \{1\}$ diremo che l'azione è *effettiva*; l'intersezione $H = \bigcap_{x \in X} S_x$ è sempre un sottogruppo normale chiuso di G.
- Se per ogni $x \in X$ si ha $S_x = \{1\}$ diremo che l'azione è *libera*.

La relazione definita da $x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow x_2 \in \mathcal{O}_{x_1}$ è una relazione di equivalenza in X. Lo spazio delle orbite è l'insieme quoziente $X/\sim$, che verrà indicato con X/G, con proiezione $\pi : X \longrightarrow X/G$. L'insieme quoziente X/G ammette una struttura di varietà differenziabile (si veda [4]) tale che la proiezione $\pi : X \longrightarrow X/G$ sia una funzione di classe $\mathcal{C}^\infty$ con mappa tangente suriettiva se e solo se il grafico della relazione di equivalenza $x \sim y \Leftrightarrow y \in \mathcal{O}_x$ è una sottovarietà chiusa di classe $\mathcal{C}^\infty$ della varietà prodotto $X \times X$.

Si dimostra (vedere [4]) che gli stabilizzatori S_x sono sottogruppi di Lie del gruppo di Lie G e che le orbite $\mathcal{O}_x$ sono sottovarietà differenziabili della varietà X che sono diffeomorfe agli spazi omogenei G/S_x.

La funzione $x \longmapsto \dim(S_x)$ è semicontinua inferiormente: se $\dim(S_x) < k$ allora esiste un intorno aperto $U \subseteq X$ del punto x tale che per ogni $y \in U$ si abbia $\dim(S_y) \leq k$. Di conseguenza, la funzione $x \longmapsto \dim(\mathcal{O}_x) = \dim(G) - \dim(S_x)$ è semicontinua superiormente.

L'insieme $X' \subseteq X$ dei punti di $x \in X$ in cui $\dim(S_x)$ raggiunge il minimo, o $\dim(\mathcal{O}_x)$ raggiunge il massimo, è un sottoinsieme aperto non vuoto ed il quoziente X'/G è una varietà. Ovviamente se la funzione $x \longmapsto \dim(S_x)$, o $x \longmapsto \dim(\mathcal{O}_x)$, è una funzione costante allora X/G è una varietà.

FINE LEZIONE 16 MMdFC (2023-04-20 ore 14:00 – 16:00)

Riferimenti bibliografici

[1] S. Kobayashi, K. Nomizu: *Foundations of Differential Geometry, Vol. I*; John Wiley & Sons, New York · Chichester · Brisbane · Toronto · Singapore, 1963.

[2] S. Kobayashi, K. Nomizu: *Foundations of Differential Geometry, Vol. II*; John Wiley & Sons, New York · Chichester · Brisbane · Toronto, 1969.

[3] J. Dieudonné: *Éléments d'analyse 1 / Fondements de l'analyse moderne*; Gauthier–Villars, Paris, 1969.

[4] J. Dieudonné: *Éléments d'analyse 3*; Gauthier–Villars, Paris, 1969.

[5] J. E. Marsden, T. Ratiu, R. Abraham: *Manifolds, tensor analysis and applications, Third Edition*; Springer–Verlag, 2001.

[6] M. Ferraris: *Appunti di algebra lineare, multilineare e tensori*; 2023.

[7] M. Ferraris: *Appunti di calcolo differenziale*; 2023.

[8] M. Ferraris: *Varietà differenziabili*; 2023.