# Appunti su gruppi di Lie e fibrati principali

Marco FERRARIS

Dipartimento di Matematica “Giuseppe Peano”
Università degli Studi di Torino

2023

**Sommario**

In questi appunti studieremo i gruppi di Lie, le azioni dei gruppi di Lie su varietà, i fibrati principali, le connessioni principali, i fibrati associati e le connessioni indotte. Per la teoria generale si veda, ad esempio, [1] e [4].

In generale considereremo gruppi moltiplicativi. Nel caso di gruppi abeliani additivi le modifiche sono ovvie: la moltiplicazione diventa la somma, l'identità è lo 0, l'inverso è l'opposto, . . . .

## 1 Gruppi di Lie

Un gruppo di Lie è una varietà differenziabile $G$, di classe $\mathcal{C}^\infty$, sulla quale è definita una struttura di gruppo tale che le operazioni di gruppo siano funzioni di classe $\mathcal{C}^\infty$. Più precisamente, l'operazione di moltiplicazione

$$
\begin{aligned}
m \ : \ G \times G &\longrightarrow G \\
(a,b) &\longmapsto a \cdot b
\end{aligned}
$$

e l'operazione di inversione

$$
\begin{aligned}
\iota \ : \ G &\longrightarrow G \\
a &\longmapsto a^{-1}
\end{aligned}
$$

devono essere di classe $\mathcal{C}^\infty$.

Possiamo combinare le due condizioni in una sola richiedendo che la funzione

$$
\begin{aligned}
\tilde{m} \ : \ G \times G &\longrightarrow G \\
(x,y) &\longmapsto x \cdot y^{-1}
\end{aligned}
$$

sia di classe $\mathcal{C}^\infty$.

### 1.1 Esempi di gruppi di Lie

**Esempio 1.1.** [Prodotto cartesiano di gruppi di Lie]

Il prodotto cartesiano di gruppi di Lie $G_1$ e $G_2$ è un gruppo di Lie: l'operazione è l'operazione del gruppo prodotto $G_1 \times G_2$

$$(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = (a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2) \qquad , \qquad (a_1, a_2)^{-1} = (a_1^{-1}, a_2^{-1})$$

e la struttura di varietà differenziabile è quella della varietà prodotto $G_1 \times G_2$.

**Esempio 1.2.** [componente connessa dell'identità]

Quando un gruppo di Lie $G$ non è connesso, la componente connessa $G^o$ dell'identità di è un sottogruppo di Lie del Gruppo di Lie $G$.

**Esempio 1.3.** [sottogruppi di Lie]

Un sottogruppo di Lie $H$ di un gruppo di Lie $G$ è un sottogruppo di $G$ che è anche una sottovarietà della varietà $G$. Come succede nel caso dei sottogruppi topologici, per sapere se un sottogruppo $H \subset G$ è un sottogruppo di Lie del gruppo di Lie $G$ basta verificare che sia un sottospazio topologico chiuso dello spazio topologico $G$ (vedere [4] per la dimostrazione).

### 1.1.1 Esempi di gruppi di Lie abeliani

**Esempio 1.4.** [Spazi vettoriali]

Tutti gli spazi vettoriali $\mathbf{E}$ di dimensione finita con l'operazione di somma sono esempi di gruppi di Lie abeliani.

**Esempio 1.5.** [Numeri reali non nulli]

Il gruppo $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ dei numeri reali non nulli, con l'operazione di moltiplicazione, è un gruppo di Lie reale di dimensione 1. La varietà $\mathbb{R}^*$ non è compatta ed ha due componenti connesse $\mathbb{R}^+$ e

$\mathbb{R}^-$. La componente connessa del numero $1 \in \mathbb{R}$ è il gruppo di Lie connesso $\mathbb{R}^+$ mentre, pur essendo diffeomorfo a $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}^-$ non è un gruppo.

**Esempio 1.6.** [Numeri complessi non nulli]

Il gruppo $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ dei numeri complessi non nulli, con l'operazione di moltiplicazione, è un gruppo di Lie reale di dimensione 2. Il gruppo $\mathbb{C}^*$ è abeliano, connesso, non compatto e non semplicemente connesso ($\mathbb{C}^*$ è anche un gruppo di Lie complesso di dimensione 1).

**Esempio 1.7.** [Numeri complessi di modulo 1]

All'interno di $\mathbb{C}^*$ c'è il sottogruppo $S^1$ formato dai numeri complessi di norma 1. Con questa struttura, il cerchio $S^1$ è un gruppo di Lie connesso, compatto e abeliano di dimensione 1.

#### 1.1.2 Esempi di gruppi di Lie non abeliani

**Esempio 1.8.** [Gruppi lineari $GL(\mathbf{E})$]

Come esempi di gruppi di Lie non abeliani ci sono tutti i gruppi $GL(\mathbf{E})$ degli automorfismi degli spazi vettoriali reali $\mathbf{E}$ di dimensione finita $n > 1$. Ogni gruppo $GL(\mathbf{E})$ è un sottoinsieme aperto denso dello spazio vettoriale $L(\mathbf{E}; \mathbf{E}) \equiv \mathbf{E} \otimes \mathbf{E}^*$, è isomorfo al gruppo $GL(n; \mathbb{R}) = GL(\mathbb{R}^n)$ ed ha dimensione $n^2$.

La funzione $\det : GL(\mathbf{E}) \longrightarrow \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ è un omomorfismo di gruppi ed è una funzione di classe $\mathcal{C}^\infty$.

**Esempio 1.9.** [Gruppi lineari $GL^+(\mathbf{E})$]
Il gruppo di Lie $GL(\mathbf{E})$ ha due componenti connesse: la componente connessa dell'identità $\mathrm{id}_\mathbf{E} \in GL(\mathbf{E})$ coincide col sottogruppo $GL^+(\mathbf{E}) = \det^{-1}(\mathbb{R}^+)$ e la seconda componente connessa, che non è un gruppo, è $GL^-(\mathbf{E}) = \det^{-1}(\mathbb{R}^-)$. Ovviamente $\dim(GL^+(\mathbf{E})) = \dim(GL(\mathbf{E})) = n^2$

**Esempio 1.10.** [Gruppi lineari speciali $SL(\mathbf{E})$]
Il nucleo $SL(\mathbf{E}) = \mathrm{Ker}(\det) = \{A \in GL^+(\mathbf{E}) \,|\, \det(A) = 1\}$ è un gruppo di Lie connesso di dimensione $n^2 - 1$, che viene detto *gruppo lineare speciale* dello spazio vettoriale $\mathbf{E}$.[1]

**Esempio 1.11.** [Gruppo dei quaternioni non nulli $\mathbb{H}^*$ e gruppo $S^3$]
Indicando con $\mathbb{H}$ il corpo dei quaternioni, il sottoinsieme $\mathbb{H}^* = \mathbb{H} \setminus \{0\}$, con l'operazione di prodotto di quaternioni, è un gruppo di Lie non abeliano di dimensione 4. All'interno di $\mathbb{H}^*$ c'è il sottogruppo $S^3$ formato dai quaternioni di norma 1. Con questa struttura, la sfera $S^3$ è un gruppo di Lie connesso, compatto e non abeliano di dimensione 3.

[1]Più avanti vedremo altri esempi di gruppi di Lie che sono sottogruppi di Lie di gruppi del tipo $GL(\mathbf{E})$ (o $GL(n;\mathbb{R})$), ma anche gruppi di Lie che non possono essere rappresentati come sottogruppi di Lie di un gruppo $GL(\mathbf{E})$.

**Esempio 1.12.** [Gruppi ortogonali $O(g)$ e $SO(g)$]

Dato un prodotto scalare $g$ su uno spazio vettoriale di dimensione finita $\mathbf{E}$, si definisce il *gruppo ortogonale* $O(g)$ del prodotto scalare $g$ come il sottogruppo di $GL(\mathbf{E})$ formato dalle funzioni lineari invertibili $A \in GL(\mathbf{E})$ tali che $g \circ (A \times A) = g$, equivalentemente

$$\forall (\vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{v}}) \in \mathbf{E} \times \mathbf{E} \qquad g(A(\vec{\boldsymbol{u}}), A(\vec{\boldsymbol{v}})) = g(\vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{v}})$$

Il *gruppo ortogonale speciale* $SO(g)$ del prodotto scalare $g$ è il sottogruppo di Lie costituito dalle applicazioni lineari $A \in O(g)$ tali che $\det(A) = 1$. Il sottoinsieme delle applicazioni lineari $A \in O(g)$ tali che $\det(A) = -1$ non è un sottogruppo, ma è una sottovarietà che è in corrispondenza biunivoca con $SL(g)$. Si ha

$$\dim(SO(g)) = \dim(O(g)) = \frac{n(n-1)}{2}\,,$$

dove $n = \dim(\mathbf{E})$.

### 1.2 Moltiplicazioni a destra ed a sinistra

Per ogni elemento $a \in G$ possiamo definire due operazioni di moltiplicazione: la moltiplicazione a sinistra per l'elemento $a$

$$\begin{array}{rcccc} L_a & : & G & \longrightarrow & G \\ & & x & \longmapsto & m(a,x) \end{array}$$

e la moltiplicazione a destra per l'elemento $a$

$$\begin{array}{rcccc} R_a & : & G & \longrightarrow & G \\ & & x & \longmapsto & m(x,a) \end{array}$$

L'associatività della moltiplicazione $m$ ci permette di dedurre che $\forall a, b \in G$ valgono le seguenti identità

$$\begin{aligned} L_a \circ L_b &= L_{a \cdot b} \\ R_a \circ R_b &= R_{b \cdot a} \\ L_a \circ R_b &= R_b \circ L_a \end{aligned}$$

Se indichiamo con $\mathbb{1}$ l'identità del gruppo $G$ si ha

$$L_{\mathbb{1}} = \mathrm{id}_G \qquad \text{e} \qquad R_{\mathbb{1}} = \mathrm{id}_G$$

e, quindi, le moltiplicazioni a destra ed a sinistra sono dei diffeomorfismi di $G$ con funzioni inverse

$$(L_a)^{-1} = L_{a^{-1}} \qquad \text{e} \qquad (R_a)^{-1} = R_{a^{-1}}$$

Per ogni elemento $g \in G$ la funzione $\mathrm{Ad}_g = L_g \circ R_{g^{-1}} = R_{g^{-1}} \circ L_g$ è l'automorfismo (di classe $\mathcal{C}^\infty$) del gruppo $G$ definito da

$$\mathrm{Ad}_g : x \longmapsto m(g, m(x, g^{-1})) \equiv m(m(g,x), g^{-1})$$

Si ha

$$\mathrm{Ad}_a \circ \mathrm{Ad}_b = \mathrm{Ad}_{a \cdot b}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}_1 &= \mathrm{id}_G \\ (\mathrm{Ad}_a)^{-1} &= \mathrm{Ad}_{a^{-1}} \end{aligned}$$

**FINE LEZIONE 15 MMdFC (2023-04-19 ore 14:00 – 16:00)**

**Osservazione 1.1.** [Moltiplicazioni a destra, a sinistra e mappa aggiunta su $GL(n;\mathbb{R})$]

Quando supponiamo che il gruppo di Lie $G$ sia il gruppo $GL(n;\mathbb{R})$ si ha

$$\begin{aligned} L_a &: x \longmapsto a \cdot x \\ R_a &: x \longmapsto x \cdot a \\ \mathrm{Ad}_a &: x \longmapsto a \cdot x \cdot a^{-1} \end{aligned}$$

dove $\cdot$ indica il prodotto di matrici e le matrici $a$ ed $x$ sono matrici quadrate $n \times n$ con determinante diverso da 0.

Le mappe tangenti $T_x(L_a)$ delle moltiplicazioni a sinistra $L_a$ sono funzioni lineari invertibili

$$T_x(L_a) : T_x(G) \longrightarrow T_{a\cdot x}(G)$$

con funzioni inverse definite da

$$(T_x(L_a))^{-1} = T_{a\cdot x}\left(L_{a^{-1}}\right)$$

In particolare, utilizzeremo abbastanza spesso le due famiglie di funzioni lineari biiettive

$$\begin{aligned} T_1(L_a) &: T_1(G) \longrightarrow T_a(G) \\ T_a(L_{a^{-1}}) &: T_a(G) \longrightarrow T_1(G) \end{aligned}$$

**Osservazione 1.2.** [Mappa tangente delle moltiplicazioni a sinistra su $GL(n;\mathbb{R})$]

Quando supponiamo che il gruppo di Lie $G$ sia il gruppo $GL(n;\mathbb{R})$ si ha

$$\begin{array}{rlcc} T_x(L_a) & : (x,v) & \longmapsto & (a\cdot x, a\cdot v) \\ T_1(L_a) & : (1,v) & \longmapsto & (a, a\cdot v) \\ T_a(L_{a^{-1}}) & : (a,w) & \longmapsto & (1, a^{-1}\cdot w) \end{array}$$

dove $\cdot$ indica il prodotto di matrici, le matrici $a$ ed $x$ sono matrici quadrate $n\times n$ con determinante diverso da 0, mentre le matrici $v$ e $w$ sono matrici quadrate $n\times n$ qualunque.

Analogamente, le mappe tangenti delle moltiplicazioni a destra $R_a$ sono funzioni lineari invertibili

$$T_x(R_a) : T_x(G) \longrightarrow T_{x\cdot a}(G)$$

con funzioni inverse definite da

$$(T_x(R_a))^{-1} = T_{x\cdot a}\left(R_{a^{-1}}\right)$$

Anche in questo caso, utilizzeremo abbastanza spesso le due famiglie di funzioni lineari biiettive

$$\begin{array}{rcccc} T_1(R_a) & : & T_1(G) & \longrightarrow & T_a(G) \\ T_a(R_{a^{-1}}) & : & T_a(G) & \longrightarrow & T_1(G) \end{array}$$

**Osservazione 1.3.** [Mappa tangente delle moltiplicazioni a destra su $GL(n;\mathbb{R})$]

Quando supponiamo che il gruppo di Lie $G$ sia il gruppo $GL(n;\mathbb{R})$ si ha

$$\begin{array}{rlcc} T_x(R_a) & : (x,v) & \longmapsto & (x\cdot a, v\cdot a) \\ T_1(R_a) & : (1,v) & \longmapsto & (a, v\cdot a) \\ T_a(R_{a^{-1}}) & : (a,w) & \longmapsto & (1, w\cdot a^{-1}) \end{array}$$

dove $\cdot$ indica il prodotto di matrici, le matrici $a$ ed $x$ sono matrici quadrate $n\times n$ con determinante diverso da 0, mentre le matrici $v$ e $w$ sono matrici quadrate $n\times n$ qualunque.

Calcolando le mappe tangenti delle funzioni $\mathrm{Ad}_g$ otteniamo

$$\begin{aligned} T_x\left(\mathrm{Ad}_g\right) &= T_x\left(L_g\circ R_{g^{-1}}\right) = T_{x\cdot g^{-1}}\left(L_g\right)\circ T_x\left(R_{g^{-1}}\right) \\ &= T_x\left(R_{g^{-1}}\circ L_g\right) = T_{g\cdot x}\left(R_{g^{-1}}\right)\circ T_x\left(L_g\right) \\ T_1\left(\mathrm{Ad}_g\right) &= T_1\left(L_g\circ R_{g^{-1}}\right) = T_{g^{-1}}\left(L_g\right)\circ T_1\left(R_{g^{-1}}\right) \\ &= T_1\left(R_{g^{-1}}\circ L_g\right) = T_g\left(R_{g^{-1}}\right)\circ T_1\left(L_g\right) \end{aligned}$$

Per quanto riguarda la funzione $\iota : G \longrightarrow G$, sappiamo che

$$\iota\circ\iota = \mathrm{id}_G \qquad , \qquad \forall x\in G\,, \quad m(\iota(x),x) = 1 = m(x,\iota(x))$$

Derivando queste identità si deduce che per ogni $x\in G$ si ha

$$T_{x^{-1}}(\iota)\circ T_x(\iota) = \mathrm{id}_{T_x(G)}$$

$$\begin{aligned} T_{x^{-1}}(R_x) \circ T_x(\iota) + T_x(L_{x^{-1}}) &= 0 \\ T_x(R_{x^{-1}}) + T_{x^{-1}}(L_x) \circ T_x(\iota) &= 0 \end{aligned}$$

Siccome per ogni $x \in G$ si ha

$$\left(T_{x^{-1}}(L_x)\right)^{-1} = T_1\left(L_{x^{-1}}\right) \qquad \text{e} \qquad \left(T_{x^{-1}}(R_x)\right)^{-1} = T_1\left(R_{x^{-1}}\right)$$

possiamo dedurre che per ogni $x \in G$

$$\begin{aligned} T_x(\iota) &= -T_1\left(R_{x^{-1}}\right) \circ T_x(L_{x^{-1}}) &= -T_x(R_{x^{-1}} \circ L_{x^{-1}}) \\ &= -T_1\left(L_{x^{-1}}\right) \circ T_x(R_{x^{-1}}) &= -T_x(L_{x^{-1}} \circ R_{x^{-1}}) \end{aligned}$$

ed, in particolare,

$$T_1(\iota) = -\mathrm{id}_{T_1(G)}$$

**Osservazione 1.4.** [Mappa tangente dell'inversione]

Quando supponiamo che il gruppo di Lie $G$ sia il gruppo $GL(n;\mathbb{R})$ si ha

$$\begin{aligned} T_x(\iota) &: (x, v) \longmapsto (x^{-1}, -\,x^{-1} \cdot v \cdot x^{-1}) \\ T_1(\iota) &: (1, v) \longmapsto (1, -\,v) \end{aligned}$$

dove $\cdot$ indica il prodotto di matrici, la matrice $x$ ha determinante diverso da 0 e la matrice $v$ è una matrice quadrata $n \times n$ qualunque.

## 2 Campi di vettori invarianti

In questa sezione studieremo i campi di vettori invarianti per moltiplicazioni a sinistra o a destra.

### 2.1 Campi di vettori invarianti per moltiplicazioni a sinistra

Un campo di vettori $\vec{X} \in \mathfrak{X}(G)$ è invariante per moltiplicazioni a sinistra se per ogni $g \in G$ si ha

$$(L_g)_*(\vec{X}) = \vec{X} \qquad \text{o, equivalentemente,} \qquad (L_g)^*(\vec{X}) = \vec{X}$$

L'insieme dei campi di vettori invarianti per moltiplicazioni a sinistra è un sottospazio vettoriale $\mathfrak{X}_L(G)$ dello spazio vettoriale $\mathfrak{X}(G)$.

Siccome $(L_g)_*(\vec{X}) = \vec{X}$ se e solo se $T(L_g) \circ \vec{X} = \vec{X} \circ L_g$, per ogni $x \in G$ e per ogni $g \in G$ deve valere l'identità

$$T_x(L_g)(\vec{X}(x)) = \vec{X}(g \cdot x)$$

Questa identità ci dice che se conosciamo il valore del campo invariante $\vec{X} \in \mathfrak{X}_L(G)$ in un punto $x \in G$ allora sappiamo esattamente quanto vale in ogni altro punto $y \in G$. In particolare, $\vec{X} \in \mathfrak{X}_L(G)$ se e solo se

$$\forall g \in G\,, \qquad \vec{X}(g) = T_1(L_g)(\vec{X}(1))$$

Dato un vettore $\vec{\boldsymbol{v}} \in T_1(G)$ possiamo costruire un campo di vettori invariante a sinistra $\vec{\boldsymbol{v}}_L \in \mathfrak{X}_L(G)$ ponendo

$$\vec{\boldsymbol{v}}_L : g \longmapsto T_1(L_g)(\vec{\boldsymbol{v}})$$

Il campo $\vec{\boldsymbol{v}}_L$ è l'unico campo di vettori invariante per moltiplicazione a sinistra tale che il valore nell'identità $1 \in G$ sia il vettore $\vec{\boldsymbol{v}} \in T_1(G)$.

L'insieme $\mathfrak{X}_L(G)$ dei campi di vettori invarianti a sinistra su $G$ risulta essere, quindi, un sottospazio vettoriale di dimensione finita $n = \dim(G)$ dello spazio vettoriale di dimensione infinita $\mathfrak{X}(G)$.

Siccome per ogni $\vec{X}, \vec{Y} \in \mathfrak{X}(G)$ e per ogni $g \in G$ si ha

$$(L_g)_* ([\vec{X}, \vec{Y}]) = [(L_g)_* (\vec{X}), (L_g)_* (\vec{Y})] ,$$

lo spazio vettoriale $\mathfrak{X}_L(G)$ è anche una sottoalgebra di Lie di dimensione finita dell'algebra di Lie di dimensione infinita $\mathfrak{X}(G)$. La struttura di algebra di Lie di $\mathfrak{X}_L(G)$ induce una struttura di algebra di Lie sullo spazio tangente $T_1(G)$ con l'operazione definita da

$$[\vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\boldsymbol{w}}]_L = [\vec{\boldsymbol{v}}_L, \vec{\boldsymbol{w}}_L](1)$$

L'*algebra di Lie* $\mathfrak{g}$ del gruppo $G$ è l'algebra di Lie $(\mathfrak{X}_L(G), [\cdot, \cdot])$ dei campi vettoriali invarianti per moltiplicazioni a sinistra, oppure l'algebra di Lie $(T_1(G), [\cdot, \cdot]_L)$.

**Osservazione 2.1.** [Costanti di struttura dell'algebra di Lie $\mathfrak{X}_L(G)$]

Data una base ordinata $(\vec{\boldsymbol{e}}_1, \dots, \vec{\boldsymbol{e}}_n) \in \mathcal{B}(T_1(G))$, possiamo estendere ogni vettore $\vec{\boldsymbol{e}}_i$ della base ad un campo di vettori $\vec{\boldsymbol{\lambda}}_i := (\vec{\boldsymbol{e}}_i)_L$ invariante per moltiplicazioni a sinistra sul gruppo $G$; ovviamente si ha $\vec{\boldsymbol{\lambda}}_i(1) = \vec{\boldsymbol{e}}_i$. I campi di vettori $\vec{\boldsymbol{\lambda}}_i$ formano una base per lo spazio vettoriale $\mathfrak{X}_L(G)$ e calcolando i commutatori dei campi di vettori $\vec{\boldsymbol{\lambda}}_i$ si ottiene

$$[\vec{\boldsymbol{\lambda}}_i, \vec{\boldsymbol{\lambda}}_j] = c^k_{ij} \vec{\boldsymbol{\lambda}}_k$$

da cui si deduce che

$$\left[v^i \vec{\boldsymbol{\lambda}}_i, w^j \vec{\boldsymbol{\lambda}}_j\right] = v^i w^j c^k_{ij}\, \vec{\boldsymbol{\lambda}}_k$$

Le costanti $c^k_{ij}$ si chiamano *costanti di struttura* dell'algebra di Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{X}_L(G)$ del gruppo $G$ e, come vedremo più avanti, sono le componenti di un campo di tensori invariante per moltiplicazioni a sinistra. Le costanti di struttura $c^k_{ij}$ soddisfano a due identità fondamentali

$$\begin{array}{rclcl} c^k_{ij} + c^k_{ji} & \equiv & 2\, c^k_{(ij)} & = & 0 \qquad \text{(antisimmetria)} \\ c^h_{ki} c^k_{rs} + c^h_{ks} c^k_{ir} + c^h_{kr} c^k_{si} & \equiv & 3\, c^h_{k[i} c^k_{rs]} & = & 0 \qquad \text{(identità di Jacobi)} \end{array}$$

che derivano direttamente dalle proprietà del commutatore di campi di vettori.

Ovviamente si ha

$$\begin{array}{rcl} [\vec{\boldsymbol{e}}_i, \vec{\boldsymbol{e}}_j]_L & = & c^k_{ij} \vec{\boldsymbol{e}}_k \\ \left[v^i \vec{\boldsymbol{e}}_i, w^j \vec{\boldsymbol{e}}_j\right]_L & = & v^i w^j c^k_{ij} \vec{\boldsymbol{e}}_k \end{array}$$

**Osservazione 2.2.** [Costanti di struttura dell'algebra di Lie $\mathfrak{X}_L(GL(n;\mathbb{R}))$]

Quando supponiamo che il gruppo di Lie $G$ sia il gruppo $GL(n;\mathbb{R})$ si ha

$$\vec{\boldsymbol{v}}_{_L} : x \longmapsto (x, x \cdot v).$$

ed utilizzando le solite coordinate standard sul gruppo $GL(n;\mathbb{R})$ possiamo scrivere

$$\vec{\boldsymbol{v}}_{_L}(x) = x^r_k v^k_s \frac{\partial}{\partial x^r_s} = x^r_k v^k_s \vec{\partial}\,^s_r$$

$$\begin{aligned} [\vec{\boldsymbol{v}}_{_L}, \vec{\boldsymbol{w}}_{_L}] &= [x^r_k v^k_s \vec{\partial}\,^s_r, x^a_c w^c_b \vec{\partial}\,^b_a] \\ &= x^a_k (v^k_c w^c_b - w^k_c v^c_b)\, \vec{\partial}\,^b_a \end{aligned}$$

$$[\vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\boldsymbol{w}}]_{_L} = (v^r_k w^k_s - w^r_k v^k_s)(\vec{\partial}\,^s_r|_1)$$

Gli $n^2$ campi di vettori

$$\vec{\boldsymbol{\lambda}}^a_b = x^c_b \frac{\partial}{\partial x^c_a} = x^c_b \vec{\partial}\,^a_c = \vec{\partial}\,^a_c \otimes x^c_b$$

sono invarianti per moltiplicazioni a sinistra e formano una base per lo spazio vettoriale $\mathfrak{X}_L(GL(n;\mathbb{R}))$.

I commutatori degli elemti della base sono

$$\begin{aligned} \left[\vec{\boldsymbol{\lambda}}^a_b, \vec{\boldsymbol{\lambda}}^r_s\right] &= \vec{\boldsymbol{\lambda}}^a_b(x^w_s)\vec{\partial}\,^r_w - \vec{\boldsymbol{\lambda}}^r_s(x^c_b)\vec{\partial}\,^a_c \\ &= x^c_b \vec{\partial}\,^a_c(x^w_s)\vec{\partial}\,^r_w - x^w_s \vec{\partial}\,^r_w(x^c_b)\vec{\partial}\,^a_c \\ &= x^c_b \delta^a_s \delta^w_c \vec{\partial}\,^r_w - x^w_s \delta^r_b \delta^c_w \vec{\partial}\,^a_c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \delta^a_s x^c_b \vec{\partial}^{\,r}_{\,c} - \delta^r_b x^c_s \vec{\partial}^{\,a}_{\,c} \\ &= \delta^a_s \vec{\boldsymbol{\lambda}}^r_b - \delta^r_b \vec{\boldsymbol{\lambda}}^s_a \end{aligned}$$

Se non è strettamente necessario, nel caso di $GL(n;\mathbb{R})$ continueremo a scrivere formule di "tipo matriciale" e non scriveremo le costanti di struttura perché saranno simboli con tre coppie di indici e portano a formule inutilmente complicate.

Calcolando le immagini $(R_g)_*$ di un campo di vettori $\vec{\boldsymbol{v}}_L$ invariante per moltiplicazioni a sinistra si ottiene

$$(R_g)_*(\vec{\boldsymbol{v}}_L) = T(R_g) \circ \vec{\boldsymbol{v}}_L \circ R_{g^{-1}} = (\mathrm{ad}_{g^{-1}}(\vec{\boldsymbol{v}}))_L$$

**Dimostrazione.** Infatti si ha:

$$\begin{aligned} \big((R_g)_*(\vec{\boldsymbol{v}}_L)\big)(x) &= (T(R_g) \circ \vec{\boldsymbol{v}}_L \circ R_{g^{-1}})(x) \\ &= T(R_g)(\vec{\boldsymbol{v}}_L(R_{g^{-1}}(x))) \\ &= T(R_g)(\vec{\boldsymbol{v}}_L(x \cdot g^{-1})) \\ &= T_{x\cdot g^{-1}}(R_g)(\vec{\boldsymbol{v}}_L(x \cdot g^{-1})) \\ &= T_{x\cdot g^{-1}}(R_g)(T_1(L_{x\cdot g^{-1}})(\vec{\boldsymbol{v}})) \\ &= T_1(R_g \circ L_{x\cdot g^{-1}})(\vec{\boldsymbol{v}}) \\ &= T_1(R_g \circ L_x \circ L_{g^{-1}})(\vec{\boldsymbol{v}}) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= T_1(L_x \circ R_g \circ L_{g^{-1}})(\vec{\boldsymbol{v}}) \\
&= (T_1(L_x) \circ T_1(R_g \circ L_{g^{-1}}))(\vec{\boldsymbol{v}}) \\
&= (T_1(L_x) \circ T_1(\mathrm{Ad}_{g^{-1}}))(\vec{\boldsymbol{v}}) \\
&= (T_1(L_x) \circ \mathrm{ad}_{g^{-1}})(\vec{\boldsymbol{v}}) \\
&= T_1(L_x)(\mathrm{ad}_{g^{-1}}(\vec{\boldsymbol{v}})) \\
&= (\mathrm{ad}_{g^{-1}}(\vec{\boldsymbol{v}}))_L(x)
\end{aligned}
$$

■

**Osservazione 2.3.** [Campi di vettori in $\vec{\boldsymbol{v}}_L \in \mathfrak{X}_L(GL(n;\mathbb{R}))$]

Con notazioni da prodotti di matrici possiamo dedurre che un campo di vettori $\vec{\boldsymbol{v}}_L$ si può scrivere nel seguente modo

$$
\vec{\boldsymbol{v}}_L = \mathrm{tr}\left(x \otimes v \otimes \frac{\partial}{\partial x}\right) = \mathrm{tr}\left(v \otimes \frac{\partial}{\partial x} \otimes x\right) = \mathrm{tr}\left(\frac{\partial}{\partial x} \otimes x \otimes v\right)
$$

Posto $R_a(x) = x \cdot a = y$ si ha $x = y \cdot a^{-1}$ e possiamo scrivere formalmente

$$
\begin{aligned}
\Big((R_a)_*(\vec{\boldsymbol{v}}_L)\Big)(y) &= \mathrm{tr}\left(\frac{\partial}{\partial(y \cdot a^{-1})} \otimes (y \cdot a^{-1}) \otimes v\right) \\
&= \mathrm{tr}\left(a \otimes \frac{\partial}{\partial y} \otimes y \otimes a^{-1} \otimes v\right) \\
&= \mathrm{tr}\left(\frac{\partial}{\partial y} \otimes y \otimes \left(a^{-1} \cdot v \cdot a\right)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \operatorname{tr}\left(\frac{\partial}{\partial y} \otimes y \otimes \Big(\mathrm{ad}_{a^{-1}}(v)\Big)\right) \\
&= \Big(\mathrm{ad}_{a^{-1}}(v)\Big)_L(y)
\end{aligned}
$$

Ovviamente, questo modo di fare i calcoli è da prendere con le molle, ma, facendo molta attenzione, si può fare.

### 2.2 Curve integrali dei campi di vettori invarianti per moltiplicazioni a sinistra

Dato un vettore $\vec{\boldsymbol{v}} \in T_1(G)$ consideriamo una curva integrale $\gamma : t \longmapsto \gamma(t)$, basata nell'identità $1 \in G$, del campo vettoriale $\vec{\boldsymbol{v}}_L \in \mathfrak{X}_L(G)$. L'equazione a cui soddisfa la curva $\gamma$ è la seguente

$$
\frac{d\gamma(t)}{dt} = \vec{\boldsymbol{v}}_L(\gamma(t)) = T_1(L_{\gamma(t)})(\vec{\boldsymbol{v}}) \qquad \text{con} \qquad \gamma(0) = 1\,.
$$

Se $\gamma$ è una curva integrale del campo di vettori $\vec{\boldsymbol{v}}_L$ allora sappiamo che $\gamma_a = (L_a)_*(\gamma) \equiv L_a \circ \gamma$ è una curva integrale del campo di vettori $(L_a)_*(\vec{\boldsymbol{v}}_L) \equiv \vec{\boldsymbol{v}}_L$ e, quindi, la curva $\gamma_a(t)$ è una curva integrale basata nel punto $a \in G$.

In particolare, la curva $\gamma$ è un sottogruppo ad un parametro di $G$ in quanto si ha

$$
\gamma(t) \cdot \gamma(\tau) = \gamma_{\gamma(t)}(\tau) = \gamma(t+\tau) = \gamma(\tau+t) = \gamma_{\gamma(\tau)}(t) = \gamma(\tau) \cdot \gamma(t)
$$

La funzione $\gamma$ può essere estesa a tutta la retta reale $\mathbb{R}$ e viene spesso indicata con $\gamma(t) = \exp(t\,\vec{\boldsymbol{v}})$. Tutti i campi di vettori $\vec{\boldsymbol{v}}_L \in \mathfrak{X}_L(G)$ sono completi.

**Attenzione!** I sottogruppi ad un parametro di un gruppo di Lie $G$ non sono necessariamente sottogruppi di Lie di $G$. L'esempio più semplice è il gruppo di Lie abeliano $G = T^2 = S^1 \times S^1$ in cui i sottogruppi ad un parametro che non sono sottovarietà sono infinitamente di più di quelli che sono sottovarietà.

**Osservazione 2.4.** [Curve integrali dei campi di vettori $\vec{\boldsymbol{v}}_L \in \mathfrak{X}_L(GL(n;\mathbb{R}))$]
Quando supponiamo che il gruppo di Lie $G$ sia il gruppo $GL(n;\mathbb{R})$ si ha che

$$T_1(GL(n;\mathbb{R})) = \{1\} \times L(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n) \equiv L(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n) \equiv T^1_1(\mathbb{R}^n) \equiv \mathrm{End}(\mathbb{R}^n) \equiv \mathfrak{gl}(n;\mathbb{R})\,.$$

Per ogni vettore $\vec{\boldsymbol{v}} = (1, v) \in T_1(GL(n;\mathbb{R}))$, la curva integrale massimale di $\vec{\boldsymbol{v}}_L$ basata nell'identità è

$$\vec{\boldsymbol{v}}_L : x \longmapsto (x, x \cdot v).$$

$$\gamma : t \longmapsto \exp(t\,v)$$

$$\gamma_a : t \longmapsto a \cdot \exp(t\,v)$$

dove $\exp : \mathfrak{gl}(n;\mathbb{R}) \longrightarrow GL(n;\mathbb{R})$ è la funzione esponenziale definita, come al solito, da

$$\exp(w) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k!}$$

La funzione esponenziale $\exp : \mathfrak{gl}(n;\mathbb{R}) \longrightarrow GL(n;\mathbb{R})$ è una funzione analitica reale la cui espressione esplicita dipende dalla dimensione $n$ attraverso il teorema di Hamilton–Cayley.

**Attenzione!** In generale $\exp(v+w) \neq \exp(v)\cdot\exp(w)$, l'uguaglianza si ha solo quando il commutatore $[v,w] = v\cdot w - w\cdot v = 0$.

### 2.3 Campi di vettori invarianti per moltiplicazioni a destra

Un campo di vettori $\vec{X} \in \mathfrak{X}(G)$ è invariante per moltiplicazioni a destra se per ogni $g \in G$ si ha

$$(R_g)_*(\vec{X}) = \vec{X} \qquad \text{o, equivalentemente,} \qquad (R_g)^*(\vec{X}) = \vec{X}$$

L'insieme dei campi di vettori invarianti per moltiplicazioni a destra è un sottospazio vettoriale $\mathfrak{X}_R(G)$ dello spazio vettoriale $\mathfrak{X}(G)$.

Siccome $(R_g)_*(\vec{X}) = \vec{X}$ se e solo se $T(R_g)\circ\vec{X} = \vec{X}\circ R_g$, per ogni $x \in G$ e per ogni $g \in G$ deve valere l'identità

$$T_x(R_g)(\vec{X}(x)) = \vec{X}(x\cdot g)$$

Questa identità ci dice che se conosciamo il valore del campo invariante $\vec{X} \in \mathfrak{X}_R(G)$ in un punto $x \in G$ allora sappiamo esattamente quanto vale in ogni altro punto $y \in G$. In particolare, $\vec{X} \in \mathfrak{X}_R(G)$ se e solo se

$$\forall g \in G\,, \qquad \vec{X}(g) = T_1(R_g)(\vec{X}(1))$$

Dato un vettore $\vec{\boldsymbol{v}} \in T_1(G)$ possiamo costruire un campo di vettori invariante a destra $\vec{\boldsymbol{v}}_R \in \mathfrak{X}_R(G)$ ponendo

$$\vec{\boldsymbol{v}}_R : g \longmapsto T_1(R_g)(\vec{\boldsymbol{v}})$$

Il campo $\vec{\boldsymbol{v}}_R$ è l'unico campo di vettori invariante per moltiplicazione a destra tale che il valore nell'identità $1 \in G$ sia il vettore $\vec{\boldsymbol{v}} \in T_1(G)$.

L'insieme $\mathfrak{X}_R(G)$ dei campi di vettori invarianti a destra su $G$ risulta essere, quindi, un sottospazio vettoriale di dimensione finita $n = \dim(G)$ dello spazio vettoriale di dimensione infinita $\mathfrak{X}(G)$.

Siccome per ogni $\vec{X}, \vec{Y} \in \mathfrak{X}(G)$ e per ogni $g \in G$ si ha

$$(R_g)_* ([\vec{X}, \vec{Y}]) = [(R_g)_* (\vec{X}), (R_g)_* (\vec{Y})] ,$$

lo spazio vettoriale $\mathfrak{X}_R(G)$ è anche una sottoalgebra di Lie di dimensione finita dell'algebra di Lie di dimensione infinita $\mathfrak{X}(G)$. La struttura di algebra di Lie di $\mathfrak{X}_R(G)$ induce una struttura di algebra di Lie sullo spazio tangente $T_1(G)$ con l'operazione definita da

$$[\vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\boldsymbol{w}}]_R = [\vec{\boldsymbol{v}}_R, \vec{\boldsymbol{w}}_R](1)$$

Quando il gruppo $G$ non è abeliano, le algebre di Lie $(\mathfrak{X}_L(G), [\cdot, \cdot])$ e $(\mathfrak{X}_R(G), [\cdot, \cdot])$ sono distinte, ma isomorfe. In questo caso, le due operazioni di commutatore $[\cdot, \cdot]_R$ e $[\cdot, \cdot]_L$ sono diverse, ma le due algebre di Lie $(T_1(G), [\cdot, \cdot]_R)$ e $(T_1(G), [\cdot, \cdot]_L)$ sono naturalmente isomorfe. Per la dimostrazione basta osservare che si ha

$$\iota_*(\vec{\boldsymbol{v}}_{L}) = -\vec{\boldsymbol{v}}_{R}$$

per ogni $\vec{\boldsymbol{v}} \in T_1(G)$.

**Osservazione 2.5.** [Commutatori fra campi di $\mathfrak{X}_L(G)$ e campi di $\mathfrak{X}_R(G)$]
Dalla proprietà commutativa $L_a \circ R_b = R_b \circ L_a$, che vale per ogni $a, b \in G$, si deduce che per ogni campo di vettori $\vec{\boldsymbol{v}}_{L} \in \mathfrak{X}_L(G)$, invariante per moltiplicazioni a sinistra, e per ogni campo di vettori $\vec{\boldsymbol{w}}_{R} \in \mathfrak{X}_R(G)$, invariante per moltiplicazioni a destra, si ha

$$[\vec{\boldsymbol{v}}_{L}, \vec{\boldsymbol{w}}_{R}] = \vec{\boldsymbol{0}}$$

**Osservazione 2.6.** [Costanti di struttura dell'algebra di Lie $\mathfrak{X}_R(G)$]
Data una base ordinata $(\vec{\boldsymbol{e}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{e}}_n) \in \mathcal{B}(T_1(G)$, possiamo estendere ogni vettore $\vec{\boldsymbol{e}}_i$ della base ad un campo di vettori $\vec{\boldsymbol{\rho}}_i := (\vec{\boldsymbol{e}}_i)_{R}$ invariante per moltiplicazioni a destra sul gruppo $G$; ovviamente si ha $\vec{\boldsymbol{\rho}}_i(1) = \vec{\boldsymbol{e}}_i$. I campi di vettori $\vec{\boldsymbol{\rho}}_i$ formano una base per lo spazio vettoriale $\mathfrak{X}_R(G)$ e calcolando i commutatori dei campi di vettori $\vec{\boldsymbol{\rho}}_i$ si ottiene

$$[\vec{\boldsymbol{\rho}}_i, \vec{\boldsymbol{\rho}}_j] = -c_{ij}^k \, \vec{\boldsymbol{\rho}}_k$$

dove le costanti $c_{ij}^k$ sono le costanti di struttura dell'algebra di Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{X}_L(G)$ del gruppo $G$ definite in precedenza.

Ovviamente si ha

$$[\vec{\boldsymbol{e}}_i, \vec{\boldsymbol{e}}_j]_{_R} = -c^k_{ij}\, \vec{\boldsymbol{e}}_k$$

**Osservazione 2.7.** [Campi di vettori appartenenti a $\mathfrak{X}_R(GL(n;\mathbb{R}))$]
Quando supponiamo che il gruppo di Lie $G$ sia il gruppo $GL(n;\mathbb{R})$ si ha

$$\vec{\boldsymbol{v}}_{_R} : x \longmapsto (x, v \cdot x).$$

ed utilizzando le solite coordinate standard sul gruppo $GL(n;\mathbb{R})$ possiamo scrivere

$$\vec{\boldsymbol{v}}_{_R}(x) = v^r_k x^k_s \frac{\partial}{\partial x^r_s} = v^r_k x^k_s\, \vec{\partial}^{\,s}_{\,r}$$

$$\begin{aligned} [\vec{\boldsymbol{v}}_{_R}, \vec{\boldsymbol{w}}_{_R}] &= [v^r_k x^k_s\, \vec{\partial}^{\,s}_{\,r}, w^a_c x^c_b\, \vec{\partial}^{\,b}_{\,a}] \\ &= (w^a_c v^c_k - v^a_c w^c_k) x^k_b\, \vec{\partial}^{\,b}_{\,a} \end{aligned}$$

$$[\vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\boldsymbol{w}}]_{_R} = (w^r_k v^k_s - v^r_k w^k_s)(\vec{\partial}^{\,s}_{\,r}|_{1}) \equiv -[\vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\boldsymbol{w}}]_{_L} \equiv -[-\vec{\boldsymbol{v}}, -\vec{\boldsymbol{w}}]_{_L}$$

Anche in questo caso, se non è strettamente necessario, continueremo a scrivere formule di tipo matriciale e non scriveremo le costanti di struttura perché saranno simboli con tre coppie di indici portando a formule inutilmente complicate.

Posto $\vec{\boldsymbol{v}}_{L}(x) = x^r_k v^k_s \vec{\partial}^{\,s}_{\,r}$ e $\vec{\boldsymbol{w}}_{R}(x) = w^a_c x^c_b \vec{\partial}^{\,b}_{\,a}$ si ha

$$
\begin{aligned}
[\vec{\boldsymbol{v}}_{L}, \vec{\boldsymbol{w}}_{R}] &= [x^r_k v^k_s \vec{\partial}^{\,s}_{\,r}, w^a_c x^c_b \vec{\partial}^{\,b}_{\,a}] \\
&= (x^r_k v^k_s \vec{\partial}^{\,s}_{\,r})(w^a_c x^c_b)\, \vec{\partial}^{\,b}_{\,a} - (w^a_c x^c_b \vec{\partial}^{\,b}_{\,a})(x^r_k v^k_s) \vec{\partial}^{\,s}_{\,r} \\
&= (x^r_k v^k_s \vec{\partial}^{\,s}_{\,r})(w^Q_c x^c_P)\, \vec{\partial}^{\,P}_{\,Q} - (w^a_c x^c_b \vec{\partial}^{\,b}_{\,a})(x^Q_k v^k_P) \vec{\partial}^{\,P}_{\,Q} \\
&= (x^r_k v^k_s w^Q_c \vec{\partial}^{\,s}_{\,r}(x^c_P))\, \vec{\partial}^{\,P}_{\,Q} - (w^a_c x^c_b v^k_P \vec{\partial}^{\,b}_{\,a}(x^Q_k)) \vec{\partial}^{\,P}_{\,Q} \\
&= (x^r_k v^k_s w^Q_c \delta^s_P \delta^c_r)\, \vec{\partial}^{\,P}_{\,Q} - (w^a_c x^c_b v^k_P \delta^b_k \delta^Q_a) \vec{\partial}^{\,P}_{\,Q} \\
&= (x^c_k v^k_P w^Q_c)\, \vec{\partial}^{\,P}_{\,Q} - (w^Q_c x^c_b v^b_P) \vec{\partial}^{\,P}_{\,Q} \\
&= x^c_I (v^I_P w^Q_c - w^Q_c v^I_P) \vec{\partial}^{\,P}_{\,Q} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Calcolando le immagini $(L_g)_*$ di un campo di vettori $\vec{\boldsymbol{v}}_{R}$ invariante per moltiplicazioni a destra si ottiene

$$(L_g)_*(\vec{\boldsymbol{v}}_{R}) = T(L_g) \circ \vec{\boldsymbol{v}}_{R} \circ L_{g^{-1}} = (\mathrm{ad}_g(\vec{\boldsymbol{v}}))_{R}$$

**Dimostrazione.** Infatti si ha:

$$
\begin{aligned}
\big((L_g)_*(\vec{\boldsymbol{v}}_{R})\big)(x) &= (T(L_g) \circ \vec{\boldsymbol{v}}_{R} \circ L_{g^{-1}})(x) \\
&= T(L_g)(\vec{\boldsymbol{v}}_{R}(L_{g^{-1}}(x))) \\
&= T_{g^{-1}\cdot x}(L_g)(\vec{\boldsymbol{v}}_{R}(g^{-1} \cdot x))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= T_{g^{-1}\cdot x}(L_g)(T_1(R_{g^{-1}\cdot x})(\vec{\boldsymbol{v}}) \\
&= T_1(L_g \circ R_{g^{-1}\cdot x})(\vec{\boldsymbol{v}}) \\
&= T_1(L_g \circ R_x \circ R_{g^{-1}})(\vec{\boldsymbol{v}}) \\
&= T_1(R_x \circ L_g \circ R_{g^{-1}})(\vec{\boldsymbol{v}}) \\
&= (T_1(R_x) \circ T_1(L_g \circ R_{g^{-1}}))(\vec{\boldsymbol{v}}) \\
&= (T_1(R_x) \circ T_1(\mathrm{Ad}_g))(\vec{\boldsymbol{v}}) \\
&= (T_1(R_x) \circ \mathrm{ad}_g)(\vec{\boldsymbol{v}}) \\
&= T_1(R_x)(\mathrm{ad}_g(\vec{\boldsymbol{v}})) \\
&= (\mathrm{ad}_g(\vec{\boldsymbol{v}}))_{R}(x)
\end{aligned}
$$

■

**Osservazione 2.8.** [Campi di vettori invarianti in $\mathfrak{X}_R(GL(n;\mathbb{R}))$]

Con notazioni da prodotti di matrici possiamo dedurre che un campo di vettori $\vec{\boldsymbol{v}}_R$ si può scrivere nel seguente modo

$$\vec{\boldsymbol{v}}_R = \mathrm{tr}\left(v \otimes x \otimes \frac{\partial}{\partial x}\right) = \mathrm{tr}\left(x \otimes \frac{\partial}{\partial x} \otimes v\right) = \mathrm{tr}\left(\frac{\partial}{\partial x} \otimes v \otimes x\right)$$

Posto $L_a(x) = a \cdot x = y$ si ha $x = a^{-1} \cdot y$ e possiamo scrivere formalmente

$$\Big((L_a)_*(\vec{\boldsymbol{v}}_R)\Big)(y) \;=\; \mathrm{tr}\left(\frac{\partial}{\partial(a^{-1}\cdot y)} \otimes v \otimes (a^{-1}\cdot y)\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \operatorname{tr}\left(\frac{\partial}{\partial y} \otimes a \otimes v \otimes a^{-1} \otimes y\right) \\
&= \operatorname{tr}\left(\frac{\partial}{\partial y} \otimes \left(a \cdot v \cdot a^{-1}\right) \otimes y\right) \\
&= \operatorname{tr}\left(\frac{\partial}{\partial y} \otimes \Big(\mathrm{ad}_a(v)\Big) \otimes y\right) \\
&= \big(\mathrm{ad}_a(v)\big)_R(y)
\end{aligned}
$$

Anche in questo caso, il modo di fare i calcoli è da prendere con le molle, ma, facendo molta attenzione, si può fare.

### 2.4 Curve integrali dei campi di vettori invarianti per moltiplicazioni a destra

Dato un vettore $\vec{\boldsymbol{v}} \in T_1(G)$ consideriamo una curva integrale $\gamma : t \longmapsto \gamma(t)$, basata nell'identità $1 \in G$, del campo vettoriale $\vec{\boldsymbol{v}}_R \in \mathfrak{X}_R(G)$. L'equazione a cui soddisfa la curva $\gamma$ è la seguente

$$
\frac{d\gamma(t)}{dt} = \vec{\boldsymbol{v}}_R(\gamma(t)) = T_1(R_{\gamma(t)})(\vec{\boldsymbol{v}}) \qquad \text{con} \qquad \gamma(0) = 1\,.
$$

Se $\gamma$ è una curva integrale del campo di vettori $\vec{\boldsymbol{v}}_R$ allora sappiamo che $\gamma_a = (R_a)_*(\gamma) \equiv R_a \circ \gamma$ è una curva integrale del campo di vettori $(R_a)_*(\vec{\boldsymbol{v}}_R) \equiv \vec{\boldsymbol{v}}_R$ e, quindi, la curva $\gamma_a(t)$ è una curva integrale basata nel punto $a \in G$.

**Dimostrazione.** Se per ogni $a \in G$ definiamo la curva $\gamma_a = R_a \circ \gamma$, allora otteniamo

$$\begin{aligned}
\frac{d\gamma_a(t)}{dt} &= T_{\gamma(t)}(R_a)\left(\frac{d\gamma(t)}{dt}\right) \\
&= T_{\gamma(t)}(R_a)\left(\vec{\boldsymbol{v}}_R(\gamma(t))\right) \\
&= T_{\gamma(t)}(R_a)\left(T_1(R_{\gamma(t)})(\vec{\boldsymbol{v}})\right) \\
&= T_1(R_a \circ R_{\gamma(t)})(\vec{\boldsymbol{v}}) \\
&= T_1(R_{\gamma(t)\cdot a})(\vec{\boldsymbol{v}}) \\
&= T_1(R_{\gamma_a(t)})(\vec{\boldsymbol{v}}) \\
&= \vec{\boldsymbol{v}}_R(\gamma_a(t))
\end{aligned}$$

■

In particolare, la curva $\gamma$ è un sottogruppo ad un parametro di $G$ che coincide col sottogruppo ad un parametro $\exp(t\,\vec{\boldsymbol{v}})$ ottenuto dal campo $\vec{\boldsymbol{v}}_L$. Tutti i campi di vettori $\vec{\boldsymbol{v}}_R \in \mathfrak{X}_R(G)$ sono completi.

**Osservazione 2.9.** [Curve integrali di campi di vettori in $\mathfrak{X}_R(GL(n;\mathbb{R}))$]

Quando supponiamo che il gruppo di Lie $G$ sia il gruppo $GL(n;\mathbb{R})$ si ha che, per ogni vettore $\vec{\boldsymbol{v}} = (1, v) \in T_1(GL(n;\mathbb{R}))$, la curva integrale massimale di $\vec{\boldsymbol{v}}_R : x \longmapsto (x, v \cdot x)$ basata nell'identità è

$$\gamma : t \longmapsto \exp(t\,v)\,.$$

e la curva integrale massimale basata nel punto $a$ è:

$$\gamma_a : t \longmapsto \exp(t\, v) \cdot a \,.$$

## 3 1-Forme invarianti

In questa sezione studieremo le 1-forme invarianti per moltiplicazioni a sinistra o a destra.

### 3.1 1-Forme invarianti per moltiplicazioni a sinistra

Una 1-forma $\underline{\boldsymbol{\omega}} \in \boldsymbol{\Omega}^1(G)$ è invariante per moltiplicazioni a sinistra se per ogni $g \in G$ si ha

$$(L_g)_* \left(\underline{\boldsymbol{\omega}}\right) = \underline{\boldsymbol{\omega}} \qquad \text{o, equivalentemente,} \qquad (L_g)^* \left(\underline{\boldsymbol{\omega}}\right) = \underline{\boldsymbol{\omega}}$$

L'insieme delle 1-forme invarianti per moltiplicazioni a sinistra è un sottospazio vettoriale $\boldsymbol{\Omega}^1_{_L}(G)$ dello spazio vettoriale $\boldsymbol{\Omega}^1(G)$.

Siccome $(L_g)^* \left(\underline{\boldsymbol{\omega}}\right) = \underline{\boldsymbol{\omega}}$ se e solo se $T(L_g)^* \circ \underline{\boldsymbol{\omega}} = \underline{\boldsymbol{\omega}} \circ L_g$, per ogni $x \in G$ e per ogni $g \in G$ deve valere l'identità

$$\underline{\boldsymbol{\omega}}(x) = \underline{\boldsymbol{\omega}}(g \cdot x) \circ T_x(L_g)$$

Questa identità ci dice che se conosciamo il valore della 1-forma invariante $\underline{\boldsymbol{\omega}} \in \boldsymbol{\Omega}^1_{_L}(G)$ in un punto $x \in G$ allora sappiamo esattamente quanto vale in ogni altro punto $y \in G$. In particolare, $\underline{\boldsymbol{\omega}} \in \boldsymbol{\Omega}^1_{_L}(G)$

se e solo se

$$\forall x \in G\,, \qquad \underline{\boldsymbol{\omega}}(x) = \underline{\boldsymbol{\omega}}(1) \circ T_x(L_{x^{-1}})$$

Dato un covettore $\underline{\boldsymbol{\omega}} \in T^*_1(G)$ possiamo costruire una 1-forma invariante a sinistra $\underline{\boldsymbol{\omega}}_L \in \boldsymbol{\Omega}^1_L(G)$ ponendo

$$\underline{\boldsymbol{\omega}}_L : g \longmapsto \underline{\boldsymbol{\omega}} \circ T_g(L_{g^{-1}})$$

**Dimostrazione.**

$$\begin{aligned}
\big((L_g)^*\,(\underline{\boldsymbol{\omega}}_L)\big)\,(x) &= \big((T^*(L_g))^{-1} \circ \underline{\boldsymbol{\omega}}_L \circ L_g\big)\,(x) \\
&= (T^*(L_g))^{-1}(\underline{\boldsymbol{\omega}}_L(g \cdot x)) \\
&= {}^t(T_x(L_g))(\underline{\boldsymbol{\omega}}_L(g \cdot x)) \\
&= \underline{\boldsymbol{\omega}}_L(g \cdot x) \circ T_x(L_g) \\
&= \underline{\boldsymbol{\omega}} \circ T_{(g\cdot x)}(L_{(g\cdot x)^{-1}}) \circ T_x(L_g) \\
&= \underline{\boldsymbol{\omega}} \circ T_x(L_{(g\cdot x)^{-1}} \circ L_g) \\
&= \underline{\boldsymbol{\omega}} \circ T_x(L_{(x^{-1}\cdot g^{-1})} \circ L_g) \\
&= \underline{\boldsymbol{\omega}} \circ T_x(L_{x^{-1}} \circ L_{g^{-1}} \circ L_g) \\
&= \underline{\boldsymbol{\omega}} \circ T_x(L_{x^{-1}}) \\
&= \underline{\boldsymbol{\omega}}_L(x)
\end{aligned}$$

■

Calcolando la controimmagine $(R_g)^*(\underline{\boldsymbol{\omega}}_{L})$ otteniamo, invece,

$$(R_g)^*(\underline{\boldsymbol{\omega}}_{L}) = (\underline{\boldsymbol{\omega}} \circ \mathrm{ad}_{g^{-1}})_{L}$$

**Dimostrazione.**

$$\begin{aligned}
\left((R_g)^*(\underline{\boldsymbol{\omega}}_{L})\right)(x) &= \left((T^*(R_g))^{-1} \circ \underline{\boldsymbol{\omega}}_{L} \circ R_g\right)(x) \\
&= (T^*(R_g))^{-1}(\underline{\boldsymbol{\omega}}_{L}(x \cdot g)) \\
&= {}^t(T_x(R_g))(\underline{\boldsymbol{\omega}}_{L}(x \cdot g)) \\
&= \underline{\boldsymbol{\omega}}_{L}(x \cdot g) \circ T_x(R_g) \\
&= \underline{\boldsymbol{\omega}} \circ T_{(x \cdot g)}(L_{(x \cdot g)^{-1}}) \circ T_x(R_g) \\
&= \underline{\boldsymbol{\omega}} \circ T_x(L_{(x \cdot g)^{-1}} \circ R_g) \\
&= \underline{\boldsymbol{\omega}} \circ T_x(L_{(g^{-1} \cdot x^{-1})} \circ R_g) \\
&= \underline{\boldsymbol{\omega}} \circ T_x(L_{g^{-1}} \circ L_{x^{-1}} \circ R_g) \\
&= \underline{\boldsymbol{\omega}} \circ T_x(L_{g^{-1}} \circ R_g \circ L_{x^{-1}}) \\
&= \underline{\boldsymbol{\omega}} \circ T_x(\mathrm{Ad}_{g^{-1}} \circ L_{x^{-1}}) \\
&= \underline{\boldsymbol{\omega}} \circ T_{1}(\mathrm{Ad}_{g^{-1}}) \circ T_x(L_{x^{-1}}) \\
&= \underline{\boldsymbol{\omega}} \circ \mathrm{ad}_{g^{-1}} \circ T_x(L_{x^{-1}})
\end{aligned}$$

$$= \quad (\underline{\boldsymbol{\omega}} \circ \mathrm{ad}_{g^{-1}})_{L}(x)$$

■

La 1-forma $\underline{\boldsymbol{\omega}}_L$ è l'unica 1-forma invariante per moltiplicazione a sinistra tale che il valore nell'identità $1 \in G$ sia il covettore $\underline{\boldsymbol{\omega}} \in T_1^*(G)$. L'insieme $\boldsymbol{\Omega}^1_L(G)$ delle 1-forme invarianti a per moltiplicazioni a sinistra su $G$ risulta essere, quindi, un sottospazio vettoriale reale di dimensione finita $n = \dim(G)$ dello spazio vettoriale reale di dimensione infinita $\boldsymbol{\Omega}^1(G)$.

Si vede immediatamente che che lo spazio vettoriale $\boldsymbol{\Omega}^1_L(G)$ è il duale dello spazio vettoriale $\mathfrak{X}_L(G)$.

**Dimostrazione.** La funzione lineare che mette in dualità separante $\boldsymbol{\Omega}^1_L(G)$ e $\mathfrak{X}_L(G)$ è

$$g \longmapsto \vec{\boldsymbol{v}}_L(g) \lrcorner\, \underline{\boldsymbol{\omega}}_L(g)$$

e si ha

$$\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{v}}_L(g) \lrcorner\, \underline{\boldsymbol{\omega}}_L(g) &= \underline{\boldsymbol{\omega}}_L(g)(\vec{\boldsymbol{v}}_L(g)) \\
&= (\underline{\boldsymbol{\omega}} \circ T_g(L_{g^{-1}}))\,(T_1(L_g)(\vec{\boldsymbol{v}})) \\
&= (\underline{\boldsymbol{\omega}} \circ T_g(L_{g^{-1}}) \circ T_1(L_g))\,(\vec{\boldsymbol{v}}) \\
&= (\underline{\boldsymbol{\omega}} \circ T_1(L_{g^{-1}} \circ L_g))\,(\vec{\boldsymbol{v}}) \\
&= \underline{\boldsymbol{\omega}}(\vec{\boldsymbol{v}})
\end{aligned}$$

■

**Osservazione 3.1.** [1–forme invarianti in $\mathbf{\Omega}^1_{_L}(H)$ per sottogruppi di Lie $H \subset G$]

Una proprietà molto importante delle 1–forme $\underline{\boldsymbol{\omega}} \in \mathbf{\Omega}^1_{_L}(G)$ è quella di essere restringibili ai sottogruppi di Lie $H \subset G$ del gruppo di Lie $G$ (e, ovviamente, a tutte le altre sottovarietà di $G$). Indicando con $j : H \longrightarrow G$ l'iniezione canonica di $H$ in $G$ o, equivalentemente, la restrizione $j = (\mathrm{id}_G)_{|_H}$.

Siccome la funzione $j$ è di classe $\mathcal{C}^\infty$, possiamo definire la restrizione $\underline{\boldsymbol{\omega}}_{|_H} \in \mathbf{\Omega}^1(H)$ imponendo che sia $\underline{\boldsymbol{\omega}}_{|_H} = j^*(\underline{\boldsymbol{\omega}})$. La 1–forma $\underline{\boldsymbol{\omega}}_{|_H}$ è manifestamente invariante per moltiplicazione a sinistra per elementi $h \in H$ e, quindi, si ha che $\underline{\boldsymbol{\omega}}_{|_H} \in \mathbf{\Omega}^1_{_L}(H)$. Ovviamente si può avere $\underline{\boldsymbol{\omega}}_{|_H} \in \mathbf{\Omega}^1_{_L}(H)$ anche quando $\underline{\boldsymbol{\omega}} \notin \mathbf{\Omega}^1_{_L}(G)$.

**Osservazione 3.2.** [1–forme invarianti in $\mathbf{\Omega}^1_{_L}(GL(n;\mathbb{R}))$]

Quando si suppone che il gruppo di Lie $G$ sia il gruppo $GL(n;\mathbb{R})$, per ogni $\underline{\boldsymbol{\omega}} \in T^*_{_1}(GL(n;\mathbb{R})) \equiv T^1_1(\mathbb{R}^n)$ si ha[2]

$$\underline{\boldsymbol{\omega}}_{_L} : x \longmapsto (x, \underline{\boldsymbol{\omega}} \cdot x^{-1}).$$

ed utilizzando le solite coordinate standard sul gruppo $GL(n;\mathbb{R})$ possiamo scrivere

$$\underline{\boldsymbol{\omega}}_{_L} = \omega^r_k\, \bar{x}^k_s\, dx^s_r = \mathrm{tr}\left(\omega \cdot x^{-1} \cdot d\,x\right)$$

[2] Ricordiamo che $T^1_1(\mathbb{R}^n)$ è isomorfo a $L(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ e che $(L(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n))^*$ può essere identificato con $L(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ attraverso l'operazione $(\,\cdot\,)^\sharp$ associata alla metrica naturale $(A,B) \longmapsto \mathrm{tr}(A \circ B)$ di $L(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$.

dove le $\bar{x}^k_s$ sono le componenti della matrice inversa della matrice $x$ che ha come componenti le $x^a_s$. Infatti, calcolando la controimmagine $(L_g)^*(\underline{\boldsymbol{\omega}}_L)$ otteniamo

$$\begin{aligned}
(L_g)^*(\underline{\boldsymbol{\omega}}_L) &= (L_g)^*\left(\operatorname{tr}(\omega\cdot x^{-1}\cdot d\,x)\right)\\
&= \operatorname{tr}\left(\omega\cdot(g\cdot x)^{-1}\cdot d\,(g\cdot x)\right)\\
&= \operatorname{tr}\left(\omega\cdot x^{-1}\cdot g^{-1}\cdot g\cdot d\,x\right)\\
&= \operatorname{tr}\left(\omega\cdot x^{-1}\cdot d\,x\right)\\
&= \underline{\boldsymbol{\omega}}_L
\end{aligned}$$

Calcolando la controimmagine $(R_g)^*(\underline{\boldsymbol{\omega}}_L)$ otteniamo, invece,

$$\begin{aligned}
(R_g)^*(\underline{\boldsymbol{\omega}}_L) &= (R_g)^*\left(\operatorname{tr}(\omega\cdot x^{-1}\cdot d\,x)\right)\\
&= \operatorname{tr}\left(\omega\cdot(x\cdot g)^{-1}\cdot d\,(x\cdot g)\right)\\
&= \operatorname{tr}\left(\omega\cdot g^{-1}\cdot x^{-1}\cdot d\,x\cdot g\right)\\
&= \operatorname{tr}\left((g\cdot\omega\cdot g^{-1})\cdot x^{-1}\cdot d\,x\right)\\
&= (\operatorname{ad}_g(\underline{\boldsymbol{\omega}}))_L
\end{aligned}$$

Anche in questo caso, se non è strettamente necessario, continueremo a scrivere formule di tipo matriciale e non scriveremo le costanti di struttura perché saranno simboli con tre coppie di indici portando a formule inutilmente complicate.

**Osservazione 3.3.** [1–forme invarianti in $\mathbf{\Omega}^1_L(SO(3,\mathbb{R}))$]
Sul gruppo di Lie $SO(3,\mathbb{R})$ consideriamo come coordinate gli angoli di Eulero $(\theta, \phi, \psi)$ definiti come si usa quando vengono studiati i moti giroscopici:

$$R(\theta, \phi, \psi) = R3(\phi) \cdot R1(\theta) \cdot R3(\psi) \tag{1}$$

dove le matrici $R1$ (rotazioni intorno al primo asse) ed $R3$ (rotazioni intorno al terzo asse) sono definite da

$$R1(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$R3(\beta) = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) & 0 \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

La rotazione che fa passare dalla base fissa alla base solidale col corpo è quindi

$$R(\theta, \phi, \psi) =$$
$$\begin{pmatrix} \cos(\phi)\cos(\psi) - \sin(\phi)\cos(\theta)\sin(\psi) & -\cos(\phi)\sin(\psi) - \sin(\phi)\cos(\theta)\cos(\psi) & \sin(\phi)\sin(\theta) \\ \sin(\phi)\cos(\psi) + \cos(\phi)\cos(\theta)\sin(\psi) & -\sin(\phi)\sin(\psi) + \cos(\phi)\cos(\theta)\cos(\psi) & -\cos(\phi)\sin(\theta) \\ \sin(\theta)\sin(\psi) & \sin(\theta)\cos(\psi) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \tag{4}$$

Le matrici (4) sono la restrizione al sottogruppo di Lie $SO(3,\mathbb{R})$ delle matrici $(x^i_j)$ del gruppo $GL(3;\mathbb{R})$. La matrice $x^{-1}\cdot dx$, le cui componenti sono una base per le 1-forme invarianti a sinistra del gruppo $GL(3;\mathbb{R})$, si può restringere al sottogruppo di Lie $SO(3,\mathbb{R})$ ottenendo la matrice antisimmetrica

$$R(\theta,\phi,\psi)^{-1}\cdot dR(\theta,\phi,\psi)=\begin{pmatrix} 0 & -\underline{\boldsymbol{\omega}}^3_L & \underline{\boldsymbol{\omega}}^2_L \\ \underline{\boldsymbol{\omega}}^3_L & 0 & -\underline{\boldsymbol{\omega}}^1_L \\ -\underline{\boldsymbol{\omega}}^2_L & \underline{\boldsymbol{\omega}}^1_L & 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

dove le 1-forme

$$\underline{\boldsymbol{\omega}}^1_L = \sin(\psi)\sin(\theta)d\phi+\cos(\psi)d\theta \tag{6}$$
$$\underline{\boldsymbol{\omega}}^2_L = \cos(\psi)\sin(\theta)d\phi-\sin(\psi)d\theta \tag{7}$$
$$\underline{\boldsymbol{\omega}}^3_L = \cos(\theta)d\phi+d\psi \tag{8}$$

formano una base per le 1-forme invarianti per moltiplicazioni a sinistra $\underline{\boldsymbol{\lambda}}\in\boldsymbol{\Omega}^1_L(SO(3,\mathbb{R}))$.

La base duale $(\vec{\boldsymbol{\lambda}}_1,\vec{\boldsymbol{\lambda}}_2,\vec{\boldsymbol{\lambda}}_3)$

$$\vec{\boldsymbol{\lambda}}_1 = \cos(\psi)\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\sin(\psi)}{\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\phi}-\frac{\sin(\psi)\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\psi} \tag{9}$$
$$\vec{\boldsymbol{\lambda}}_2 = \sin(\psi)\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\cos(\psi)}{\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\phi}-\frac{\cos(\psi)\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\psi} \tag{10}$$
$$\vec{\boldsymbol{\lambda}}_3 = \frac{\partial}{\partial\psi} \tag{11}$$

della base $(\underline{\boldsymbol{\omega}}^1_L, \underline{\boldsymbol{\omega}}^2_L, \underline{\boldsymbol{\omega}}^2_L)$ fornisce una base per i campi di vettori invarianti per moltiplicazioni a sinistra $\vec{\boldsymbol{\xi}} \in \mathfrak{X}_{_L}(SO(3;\mathbb{R}))$. Le costanti di struttura $c^k_{rs}$ si ottengono dalle identità

$$\left[\vec{\boldsymbol{\lambda}}_1, \vec{\boldsymbol{\lambda}}_2\right] = \vec{\boldsymbol{\lambda}}_3 \qquad , \qquad \left[\vec{\boldsymbol{\lambda}}_1, \vec{\boldsymbol{\lambda}}_3\right] = -\vec{\boldsymbol{\lambda}}_2 \qquad , \qquad \left[\vec{\boldsymbol{\lambda}}_2, \vec{\boldsymbol{\lambda}}_3\right] = \vec{\boldsymbol{\lambda}}_1 \tag{12}$$

o, equivalentemente, $c^k_{rs} = \delta^{kl}\sqrt{\delta}\,\varepsilon_{lrs} = \sqrt{\delta}\,\varepsilon_{rsl}\,\delta^{lk}$.

**Osservazione 3.4.** [Formula di Maurer–Cartan per le basi duali in $\boldsymbol{\Omega}^1_L(G)$]
Data una base $(\vec{\boldsymbol{e}}_1, \dots, \vec{\boldsymbol{e}}_n)$ dello spazio tangente $T_{_1}(G)$, consideriamo nello spazio cotangente $T^*_{_1}(G)$ la base duale $(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^1, \dots, \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^n)$. Le 1–forme $\underline{\boldsymbol{\theta}}^i_{_L} = (\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^i)_{_L}$ sono una base di $\boldsymbol{\Omega}^1_{_L}(G)$ ed i loro differenziali esterni sono

$$d\underline{\boldsymbol{\theta}}^i_{_L} = -\tfrac{1}{2}c^i_{rs}\,\underline{\boldsymbol{\theta}}^r_{_L} \wedge \underline{\boldsymbol{\theta}}^s_{_L}$$

dove i coefficienti $c^i_{rs}$ sono le costanti di struttura dell'algebra di Lie $\mathfrak{X}_{_L}(G)$ rispetto alla base $\vec{\boldsymbol{\lambda}}_i = (\vec{\boldsymbol{e}}_i)_{_L}$. Questa identità, che è nota come *formula di Maurer–Cartan*, ed è stata dimostrata, in un contesto più generale, negli appunti di Calcolo sulle varietà differenziabili [8].

### 3.2 1-Forme invarianti per moltiplicazioni a destra

Una 1-forma $\underline{\boldsymbol{\omega}} \in \boldsymbol{\Omega}^1(G)$ è invariante per moltiplicazioni a destra se per ogni $g \in G$ si ha

$$(R_g)_*\,(\underline{\boldsymbol{\omega}}) = \underline{\boldsymbol{\omega}} \qquad \text{o, equivalentemente,} \qquad (R_g)^*\,(\underline{\boldsymbol{\omega}}) = \underline{\boldsymbol{\omega}}$$

L'insieme delle 1-forme invarianti per moltiplicazioni a destra è un sottospazio vettoriale $\boldsymbol{\Omega}^1_R(G)$ dello spazio vettoriale $\boldsymbol{\Omega}^1(G)$.

Siccome $(R_g)^*(\underline{\boldsymbol{\omega}}) = \underline{\boldsymbol{\omega}}$ se e solo se $T(R_g)^* \circ \underline{\boldsymbol{\omega}} = \underline{\boldsymbol{\omega}} \circ R_g$, per ogni $x \in G$ e per ogni $g \in G$ deve valere l'identità

$$\underline{\boldsymbol{\omega}}(x) = \underline{\boldsymbol{\omega}}(x \cdot g) \circ T_x(R_g)$$

Questa identità ci dice che se conosciamo il valore della 1-forma invariante $\underline{\boldsymbol{\omega}} \in \boldsymbol{\Omega}^1_R(G)$ in un punto $x \in G$ allora sappiamo esattamente quanto vale in ogni altro punto $y \in G$. In particolare, $\underline{\boldsymbol{\omega}} \in \boldsymbol{\Omega}^1_R(G)$ se e solo se

$$\forall x \in G\,, \qquad \underline{\boldsymbol{\omega}}(x) = \underline{\boldsymbol{\omega}}(\mathbb{1}) \circ T_x(R_{x^{-1}})$$

Dato un covettore $\underline{\boldsymbol{\omega}} \in T^*_{\mathbb{1}}(G)$ possiamo costruire una 1-forma invariante per moltiplicazioni a destra $\underline{\boldsymbol{\omega}}_R \in \boldsymbol{\Omega}^1_R(G)$ ponendo

$$\underline{\boldsymbol{\omega}}_R : g \longmapsto \underline{\boldsymbol{\omega}} \circ T_g(R_{g^{-1}})$$

**Dimostrazione.**

$$\begin{aligned}
(R_g)^*(\underline{\boldsymbol{\omega}}_R)(x) &= ((T^*(R_g))^{-1} \circ \underline{\boldsymbol{\omega}}_R \circ R_g)(x) \\
&= (T^*(R_g))^{-1}(\underline{\boldsymbol{\omega}}_R(g \cdot x)) \\
&= {}^t(T_x(R_g))(\underline{\boldsymbol{\omega}}_R(x \cdot g)) \\
&= \underline{\boldsymbol{\omega}}_R(x \cdot g) \circ T_x(R_g)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \underline{\boldsymbol{\omega}} \circ T_{(x\cdot g)}(R_{(x\cdot g)^{-1}}) \circ T_x(R_g) \\
&= \underline{\boldsymbol{\omega}} \circ T_x(R_{(x\cdot g)^{-1}} \circ R_g) \\
&= \underline{\boldsymbol{\omega}} \circ T_x(R_{(g^{-1}\cdot x^{-1})}) \circ R_g) \\
&= \underline{\boldsymbol{\omega}} \circ T_x(R_{x^{-1}} \circ R_{g^{-1}} \circ R_g) \\
&= \underline{\boldsymbol{\omega}} \circ T_x(R_{x^{-1}}) \\
&= \underline{\boldsymbol{\omega}}_R(x)
\end{aligned}
$$

■

Calcolando la controimmagine $(L_g)^* \, (\underline{\boldsymbol{\omega}}_R)$ otteniamo, invece,

$$(L_g)^* \, (\underline{\boldsymbol{\omega}}_R) = (\underline{\boldsymbol{\omega}} \circ \mathrm{ad}_g)_R$$

**Dimostrazione.**

$$
\begin{aligned}
(L_g)^* \, (\underline{\boldsymbol{\omega}}_R)(x) &= ((T^*(L_g))^{-1} \circ \underline{\boldsymbol{\omega}}_R \circ L_g)(x) \\
&= (T^*(L_g))^{-1}(\underline{\boldsymbol{\omega}}_R(g\cdot x)) \\
&= {}^t(T_x(L_g))(\underline{\boldsymbol{\omega}}_R(g\cdot x)) \\
&= \underline{\boldsymbol{\omega}}_R(g\cdot x) \circ T_x(L_g) \\
&= \underline{\boldsymbol{\omega}} \circ T_{(g\cdot x)}(R_{(g\cdot x)^{-1}}) \circ T_x(L_g)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \underline{\boldsymbol{\omega}} \circ T_x(R_{(g\cdot x)^{-1}} \circ L_g) \\
&= \underline{\boldsymbol{\omega}} \circ T_x(R_{(x^{-1}\cdot g^{-1})} \circ L_g) \\
&= \underline{\boldsymbol{\omega}} \circ T_x(R_{g^{-1}} \circ R_{x^{-1}} \circ L_g) \\
&= \underline{\boldsymbol{\omega}} \circ T_x(R_{g^{-1}} \circ L_g \circ R_{x^{-1}}) \\
&= \underline{\boldsymbol{\omega}} \circ T_x(L_g \circ R_{g^{-1}} \circ R_{x^{-1}}) \\
&= \underline{\boldsymbol{\omega}} \circ T_x(\mathrm{Ad}_g \circ R_{x^{-1}}) \\
&= \underline{\boldsymbol{\omega}} \circ T_1(\mathrm{Ad}_g) \circ T_x(R_{x^{-1}}) \\
&= \underline{\boldsymbol{\omega}} \circ \mathrm{ad}_g \circ T_x(R_{x^{-1}}) \\
&= (\underline{\boldsymbol{\omega}} \circ \mathrm{ad}_g)_R(x)
\end{aligned}
$$

■

La 1-forma $\underline{\boldsymbol{\omega}}_R$ è l'unica 1-forma invariante per moltiplicazione a destra tale che il valore nell'identità $1 \in G$ sia il covettore $\underline{\boldsymbol{\omega}} \in T_1^*(G)$. L'insieme $\boldsymbol{\Omega}^1_R(G)$ delle 1-forme invarianti a per moltiplicazioni a destra su $G$ risulta essere, quindi, un sottospazio vettoriale reale di dimensione finita $n = \dim(G)$ dello spazio vettoriale reale di dimensione infinita $\boldsymbol{\Omega}^1(G)$.

Si vede immediatamente che che lo spazio vettoriale $\boldsymbol{\Omega}^1_R(G)$ è il duale dello spazio vettoriale $\mathfrak{X}_R(G)$.

**Dimostrazione.** La funzione lineare che mette in dualità separante $\boldsymbol{\Omega}^1_R(G)$ e $\mathfrak{X}_R(G)$ è

$$g \longmapsto \vec{\boldsymbol{v}}_R(g) \lrcorner\, \underline{\boldsymbol{\omega}}_R(g)$$

e si ha

$$\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{v}}_R(g) \lrcorner\, \underline{\boldsymbol{\omega}}_R(g) &= \underline{\boldsymbol{\omega}}_R(g)(\vec{\boldsymbol{v}}_R(g)) \\
&= (\underline{\boldsymbol{\omega}} \circ T_g(R_{g^{-1}}))(T_1(R_g)(\vec{\boldsymbol{v}})) \\
&= (\underline{\boldsymbol{\omega}} \circ T_g(R_{g^{-1}}) \circ T_1(R_g))(\vec{\boldsymbol{v}}) \\
&= (\underline{\boldsymbol{\omega}} \circ T_1(R_{g^{-1}} \circ R_g))(\vec{\boldsymbol{v}}) \\
&= \underline{\boldsymbol{\omega}}(\vec{\boldsymbol{v}})
\end{aligned}$$

■

**Osservazione 3.5.** [1–forme invarianti in $\boldsymbol{\Omega}^1_R(H)$ per sottogruppi di Lie $H \subset G$]
Una proprietà molto importante delle 1–forme $\underline{\boldsymbol{\omega}} \in \boldsymbol{\Omega}^1_R(G)$ è quella di essere restringibili ai sottogruppi di Lie $H \subset G$ del gruppo di Lie $G$ (e, ovviamente, a tutte le altre sottovarietà di $G$). Indicando con $j : H \longrightarrow G$ l'iniezione canonica di $H$ in $G$ o, equivalentemente, la restrizione $j = (\mathrm{id}_G)_{|H}$. Siccome la funzione $j$ è di classe $\mathcal{C}^\infty$, possiamo definire la restrizione $\underline{\boldsymbol{\omega}}_{|H} \in \boldsymbol{\Omega}^1(H)$ imponendo che sia $\underline{\boldsymbol{\omega}}_{|H} = j^*(\underline{\boldsymbol{\omega}})$. La 1–forma $\underline{\boldsymbol{\omega}}_{|H}$ è manifestamente invariante per moltiplicazione a destra per elementi $h \in H$ e, quindi, si ha che $\underline{\boldsymbol{\omega}}_{|H} \in \boldsymbol{\Omega}^1_R(H)$.

Ovviamente si può avere $\underline{\boldsymbol{\omega}}_{|_H} \in \boldsymbol{\Omega}^1_{_R}(H)$ anche quando $\underline{\boldsymbol{\omega}} \notin \boldsymbol{\Omega}^1_{_R}(G)$.

**Osservazione 3.6.** [1–forme invarianti in $\boldsymbol{\Omega}^1_R(GL(n;\mathbb{R}))$]
Quando si suppone che il gruppo di Lie $G$ sia il gruppo $GL(n;\mathbb{R})$, per ogni $\underline{\boldsymbol{\omega}} \in T^*_{_1}(GL(n;\mathbb{R})) \equiv (T^1_1(\mathbb{R}^n))^* \equiv T^1_1(\mathbb{R}^n)$ si ha

$$\underline{\boldsymbol{\omega}}_{_R} : x \longmapsto (x, x^{-1} \cdot \underline{\boldsymbol{\omega}}).$$

ed utilizzando le solite coordinate standard sul gruppo $GL(n;\mathbb{R})$ possiamo scrivere

$$\underline{\boldsymbol{\omega}}_{_R} = \bar{x}^r_i \, \omega^i_s \, dx^s_r = \operatorname{tr}\left(x^{-1} \cdot \omega \cdot d\,x\right) = \operatorname{tr}\left(\omega \cdot d\,x \cdot x^{-1}\right)$$

dove, come nel caso precedente, le $\bar{x}^k_s$ sono le componenti della matrice inversa della matrice $x$ che ha come componenti le $x^a_s$. Infatti, calcolando la controimmagine $(R_g)^*\left(\underline{\boldsymbol{\omega}}_{_R}\right)$ otteniamo

$$\begin{aligned}
(R_g)^*\left(\underline{\boldsymbol{\omega}}_{_R}\right) &= (R_g)^*\left(\operatorname{tr}(\omega \cdot d\,x \cdot x^{-1})\right) \\
&= \operatorname{tr}\left(\omega \cdot d\,(x \cdot g) \cdot (x \cdot g)^{-1}\right) \\
&= \operatorname{tr}\left(\omega \cdot d\,x \cdot g \cdot g^{-1} \cdot x^{-1}\right) \\
&= \operatorname{tr}\left(\omega \cdot d\,x \cdot x^{-1}\right) \\
&= \underline{\boldsymbol{\omega}}_{_R}
\end{aligned}$$

Calcolando la controimmagine $(L_g)^*\left(\underline{\boldsymbol{\omega}}_{_R}\right)$ otteniamo, invece,

$$(L_g)^*\left(\underline{\boldsymbol{\omega}}_{_R}\right) = (L_g)^*\left(\operatorname{tr}(\omega \cdot d\,x \cdot x^{-1})\right)$$

$$\begin{aligned} &= \operatorname{tr}\left(\omega \cdot d\,(g \cdot x) \cdot (g \cdot x)^{-1}\right) \\ &= \operatorname{tr}\left(\omega \cdot g \cdot d\,x \cdot x^{-1} \cdot g^{-1}\right) \\ &= \operatorname{tr}\left((g^{-1} \cdot \omega \cdot g) \cdot d\,x \cdot x^{-1}\right) \\ &= (\operatorname{ad}_{g^{-1}}(\underline{\boldsymbol{\omega}}))_{R} \end{aligned}$$

Anche in questo caso, se non è strettamente necessario, continueremo a scrivere formule di tipo matriciale e non scriveremo le costanti di struttura perché saranno simboli con tre coppie di indici portando a formule inutilmente complicate.

**Osservazione 3.7.** [1–forme invarianti in $\boldsymbol{\Omega}^1_{R}(SO(3,\mathbb{R}))$]
La matrice $dx \cdot x^{-1}$, le cui componenti sono una base per le 1-forme invarianti per moltiplicazione a destra del gruppo $GL(3;\mathbb{R})$, si può restringere al sottogruppo di Lie $SO(3,\mathbb{R})$ ottenendo la matrice antisimmetrica

$$dR(\theta,\phi,\psi) \cdot R(\theta,\phi,\psi)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\underline{\boldsymbol{\omega}}^3_R & \underline{\boldsymbol{\omega}}^2_R \\ \underline{\boldsymbol{\omega}}^3_R & 0 & -\underline{\boldsymbol{\omega}}^1_R \\ -\underline{\boldsymbol{\omega}}^2_R & \underline{\boldsymbol{\omega}}^1_R & 0 \end{pmatrix} \tag{13}$$

dove le 1-forme

$$\underline{\boldsymbol{\omega}}^1_R = \sin(\phi)\sin(\theta)d\psi + \cos(\phi)d\theta \tag{14}$$

$$\underline{\boldsymbol{\omega}}^2_R = -\cos(\phi)\sin(\theta)d\psi + \sin(\phi)d\theta \tag{15}$$

$$\underline{\boldsymbol{\omega}}^3_R = \cos(\theta)d\psi + d\phi \tag{16}$$

formano una base per le 1-forme invarianti per moltiplicazione a destra $\underline{\boldsymbol{\rho}} \in \boldsymbol{\Omega}^1_{_R}(SO(3,\mathbb{R}))$.

La base duale $(\vec{\boldsymbol{\rho}}_1, \vec{\boldsymbol{\rho}}_2, \vec{\boldsymbol{\rho}}_3)$

$$\vec{\boldsymbol{\rho}}_1 = -\cos(\phi)\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\sin(\psi)\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\phi} - \frac{\sin(\phi)}{\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\psi} \tag{17}$$

$$\vec{\boldsymbol{\rho}}_2 = \sin(\phi)\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos(\phi)\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\phi} - \frac{\cos(\phi)}{\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\psi} \tag{18}$$

$$\vec{\boldsymbol{\rho}}_3 = \frac{\partial}{\partial\phi} \tag{19}$$

della base $(\underline{\boldsymbol{\omega}}^1_R, \underline{\boldsymbol{\omega}}^2_R, \underline{\boldsymbol{\omega}}^2_R)$ fornisce una base per i campi di vettori invarianti per moltiplicazioni a destra $\vec{\boldsymbol{\xi}} \in \mathfrak{X}_{_R}(SO(3;\mathbb{R}))$. Le costanti di struttura $-c^k_{rs}$ si ottengono dalle identità

$$[\vec{\boldsymbol{\rho}}_1, \vec{\boldsymbol{\rho}}_2] = -\vec{\boldsymbol{\rho}}_3 \qquad , \qquad [\vec{\boldsymbol{\rho}}_1, \vec{\boldsymbol{\rho}}_3] = \vec{\boldsymbol{\rho}}_2 \qquad , \qquad [\vec{\boldsymbol{\rho}}_2, \vec{\boldsymbol{\rho}}_3] = -\vec{\boldsymbol{\rho}}_1 \tag{20}$$

o, equivalentemente, $c^k_{rs} = \delta^{kl}\sqrt{\delta}\,\varepsilon_{lrs} = \sqrt{\delta}\,\varepsilon_{rsl}\,\delta^{lk}$.

**Osservazione 3.8.** [Formula di Maurer–Cartan per le basi duali in $\boldsymbol{\Omega}^1_R(G)$]

Data una base $(\vec{\boldsymbol{e}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{e}}_n)$ dello spazio tangente $T_1(G)$, consideriamo nello spazio cotangente $T^*_1(G)$ la base duale $(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^1, \ldots, \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^n)$. Le 1–forme $\underline{\boldsymbol{\theta}}^i_{_R} = (\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^i)_{_R}$ sono una base di $\boldsymbol{\Omega}^1_{_R}(G)$ ed i loro differenziali esterni sono

$$d\underline{\boldsymbol{\theta}}^i_{_R} = \frac{1}{2} c^i_{rs}\, \underline{\boldsymbol{\theta}}^r_{_R} \wedge \underline{\boldsymbol{\theta}}^s_{_R}$$

dove i coefficienti $-c^i_{rs}$ sono le costanti di struttura dell'algebra di Lie $\mathfrak{X}_{_R}(G)$ rispetto alla base $\vec{\boldsymbol{\rho}}_i = (\vec{\boldsymbol{e}}_i)_{_R}$. Questa identità, che è nota come *formula di Maurer–Cartan*, è stata dimostrata, in un contesto più generale, negli appunti di Calcolo sulle varietà differenziabili [8].

## 4 Azioni di gruppi di Lie su varietà

In questa sezione studieremo le azioni, per moltiplicazioni a sinistra o a destra, dei gruppi di Lie su varietà.

### 4.1 Azioni a sinistra di gruppi di Lie su varietà

Un'*azione a sinistra* di un gruppo di Lie $G$ su una varietà $X$ è una funzione di classe $\mathcal{C}^\infty$

$$\begin{array}{rccc} \bar{m} : & G \times X & \longrightarrow & X \\ & (g, x) & \longmapsto & g \cdot x \end{array}$$

che gode della proprietà associativa

$$\bar{m}(g_2, \bar{m}(g_1, x)) = \bar{m}(m(g_2, g_1), x) \qquad \forall\ g_2, g_1 \in G\ \wedge\ \forall\ x \in X$$

L'azione a sinistra $\bar{m}$ induce due famiglie di moltiplicazioni analoghe alle moltiplicazioni a sinistra ed a destra sul gruppo $G$.

Per ogni elemento $a \in G$ possiamo definire la moltiplicazione a sinistra per l'elemento $a$

$$\begin{array}{rcccc} \bar{L}_a & : & X & \longrightarrow & X \\ & & x & \longmapsto & \bar{m}(a,x) \end{array}$$

e per ogni $x \in X$ possiamo definire la moltiplicazione a destra per l'elemento $x$

$$\begin{array}{rcccc} \bar{R}_x & : & G & \longrightarrow & X \\ & & a & \longmapsto & \bar{m}(a,x) \end{array}$$

L'associatività della moltiplicazione $\bar{m}$ ci permette di dedurre che $\forall a, b \in G$ e $\forall x \in X$ valgono le seguenti identità

$$\begin{aligned} \bar{L}_a \circ \bar{L}_b &= \bar{L}_{a \cdot b} \\ \bar{R}_x \circ R_a &= \bar{R}_{a \cdot x} \\ \bar{R}_x \circ L_b &= \bar{L}_b \circ \bar{R}_x \end{aligned}$$

Siccome si ha

$$\bar{L}_1 = \mathrm{id}_X \,,$$

le moltiplicazioni a sinistra sono dei diffeomorfismi di $X$ con funzioni inverse

$$\left(\bar{L}_a\right)^{-1} = \bar{L}_{a^{-1}} \,.$$

Le moltiplicazioni a destra $\bar{R}_x : G \longmapsto X$ permettono di trasformare ogni vettore tangente $\vec{\boldsymbol{v}} \in T_1(G)$ in un campo di vettori $\vec{\boldsymbol{v}}_X \in \mathfrak{X}(X)$ definito da:

$$\vec{\boldsymbol{v}}_X : x \longmapsto T_1(\bar{R}_x)(\vec{\boldsymbol{v}})$$

che è analogo al campo di vettori $\vec{\boldsymbol{v}}_R \in \mathfrak{X}_R(G)$. La funzione $\vec{\boldsymbol{v}} \longmapsto \vec{\boldsymbol{v}}_X$ è lineare.

Calcolando le immagini $(\bar{L}_g)_*(\vec{\boldsymbol{v}}_X)$ si ottiene

$$(\bar{L}_g)_*(\vec{\boldsymbol{v}}_X) = (\mathrm{ad}_g(\vec{\boldsymbol{v}}))_X$$

**Dimostrazione.** Infatti si ha:

$$\begin{aligned}
((\bar{L}_g)_*(\vec{\boldsymbol{v}}_X))(x) &= (T(\bar{L}_g) \circ \vec{\boldsymbol{v}}_X \circ \bar{L}_{g^{-1}})(x) \\
&= T(\bar{L}_g)(\vec{\boldsymbol{v}}_X(\bar{L}_{g^{-1}}(x))) \\
&= T(\bar{L}_g)(\vec{\boldsymbol{v}}_X(g^{-1} \cdot x)) \\
&= T_{g^{-1}\cdot x}(\bar{L}_g)(\vec{\boldsymbol{v}}_X(g^{-1} \cdot x)) \\
&= T_{g^{-1}\cdot x}(\bar{L}_g)(T_1(\bar{R}_{g^{-1}\cdot x})(\vec{\boldsymbol{v}})) \\
&= T_1(\bar{L}_g \circ \bar{R}_{g^{-1}\cdot x})(\vec{\boldsymbol{v}}) \\
&= T_1(\bar{L}_g \circ \bar{R}_x \circ R_{g^{-1}})(\vec{\boldsymbol{v}}) \\
&= T_1(\bar{R}_x \circ L_g \circ R_{g^{-1}})(\vec{\boldsymbol{v}})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= T_1(\bar{R}_x \circ \mathrm{Ad}_g)(\vec{\boldsymbol{v}}) \\
&= T_1(\bar{R}_x)(\mathrm{ad}_g(\vec{\boldsymbol{v}})) \\
&= (\mathrm{ad}_g(\vec{\boldsymbol{v}}))_X(x)
\end{aligned}
$$

■

Vale la seguente proprietà

$$[\vec{\boldsymbol{v}}_X, \vec{\boldsymbol{w}}_X] = ([\vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\boldsymbol{w}}]_R)_X$$

I campi di vettori $\vec{\boldsymbol{v}}_X$ permettono di verificare se una funzione $f \in \mathcal{C}^\infty(X;\mathbb{R})$ è invariante per le moltiplicazioni a sinistra $\bar{L}_a$. L'identità $(\bar{L}_a)^*(f) = f\ \forall a \in G$ ci dice che $\forall a \in G$ e $\forall x \in X$ deve valere l'identità

$$f(x) = \left((\bar{L}_a)^*(f)\right)(x) = f(\bar{L}_a(x)) = f(\bar{R}_x(a)) \tag{21}$$

Se consideriamo una curva $\gamma : I \longrightarrow G$ possiamo, quindi affermare che $\forall x \in X$ e $\forall t \in I$

$$f(\bar{R}_x(\gamma(t))) = f(x) \tag{22}$$

Considerando curve $\gamma$ basate nell'identità $1 \in G$ e definendo $\vec{\boldsymbol{v}} = \frac{d\gamma}{dt}|_{t=0} \in T_1(G)$, possiamo affermare che $\forall x \in X$ e $\forall \vec{\boldsymbol{v}} \in T_1(G)$

$$0 = \left.\frac{d(f \circ \bar{R}_x \circ \gamma)}{dt}\right|_{t=0} = T_x(f)(T_1(\bar{R}_x)(\vec{\boldsymbol{v}})) = T_x(f)(\vec{\boldsymbol{v}}_X(x)) = (\vec{\boldsymbol{v}}_X(f))(x) \tag{23}$$

o, equivalentemente,

$$\vec{\boldsymbol{v}}_X(f) = \pounds_{\vec{\boldsymbol{v}}_X}(f) = 0 \qquad\qquad \forall \vec{\boldsymbol{v}} \in T_1(G) \tag{24}$$

La condizione che coinvolge la derivata di Lie può essere estesa a tutti i campi di tensori invarianti per moltiplicazioni a sinistra sulla varietà $X$.

**Osservazione 4.1.** [Azione naturale a sinistra di $GL(n;\mathbb{R})$ su $\mathbb{R}^n$]

Quando il gruppo di Lie $G$ è il gruppo $GL(n;\mathbb{R})$ e la varietà $X$ è lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ si ha

$$\begin{aligned} \bar{L}_a &: x \longmapsto a \cdot x \\ \bar{R}_x &: a \longmapsto a \cdot x \end{aligned}$$

dove $\cdot$ indica il prodotto di matrici, la matrice $a$ è una matrice quadrata $n \times n$ con determinante diverso da 0 ed $x$ è una matrice colonna $n \times 1$. Il campo di vettori $\vec{\boldsymbol{v}}_X$ è

$$\vec{\boldsymbol{v}}_X : x \longmapsto (x, v \cdot x).$$

ed utilizzando le solite coordinate standard sul gruppo $GL(n;\mathbb{R})$ e su $\mathbb{R}^n$ possiamo scrivere

$$\vec{\boldsymbol{v}}_X(x) = v^r_k x^k \frac{\partial}{\partial x^r} = v^r_k x^k \, \vec{\partial}_r$$

$$\begin{aligned} [\vec{\boldsymbol{v}}_X, \vec{\boldsymbol{w}}_X] &= [v^r_k x^k \, \vec{\partial}_r, w^a_c x^c \, \vec{\partial}_a] \\ &= (v^r_k x^k \, \vec{\partial}_r)(w^a_c x^c)\vec{\partial}_a - (v \leftrightarrow w) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (v^r_k x^k)(w^a_c \delta^c_r)\vec{\partial}_a - (v \leftrightarrow w) \\
&= (w^a_c v^c_k - v^a_c w^c_k) x^k \vec{\partial}_a \\
&= ([\vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\boldsymbol{w}}]_{R})_X
\end{aligned}
$$

**Osservazione 4.2.** [Azione naturale a sinistra di $GL(n;\mathbb{R})$ su $\mathbb{R}^n \otimes (\mathbb{R}^m)^*$]

Quando il gruppo di Lie $G$ è il gruppo $GL(n;\mathbb{R})$ e la varietà $X$ è lo spazio vettoriale $L(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n) \equiv \mathbb{R}^n \otimes (\mathbb{R}^m)^*$ si ha

$$
\begin{aligned}
\bar{L}_a &: x \longmapsto a \cdot x \\
\bar{R}_x &: a \longmapsto a \cdot x
\end{aligned}
$$

dove $\cdot$ indica il prodotto di matrici, la matrice $a$ è una matrice quadrata $n \times n$ con determinante diverso da 0 ed $x$ è una matrice "rettangolare" $n \times m$ ($n$ righe ed $m$ colonne).

Il campo di vettori $\vec{\boldsymbol{v}}_X$ è

$$\vec{\boldsymbol{v}}_X : x \longmapsto (x, v \cdot x).$$

ed utilizzando le solite coordinate standard sul gruppo $GL(n;\mathbb{R})$ possiamo scrivere

$$\vec{\boldsymbol{v}}_X(x) = v^r_k x^k_\alpha \frac{\partial}{\partial x^r_\alpha} = v^r_k x^k_\alpha \, \vec{\partial}{}^{\,\alpha}_{\,r}$$

$$
\begin{aligned}
[\vec{\boldsymbol{v}}_X, \vec{\boldsymbol{w}}_X] &= [v^r_k x^k_\alpha \, \vec{\partial}{}^{\,\alpha}_{\,r}, w^a_c x^c_\beta \, \vec{\partial}{}^{\,\beta}_{\,a}] \\
&= (w^a_c v^c_k - v^a_c w^c_k) x^k_\beta \, \vec{\partial}{}^{\,\beta}_{\,a}
\end{aligned}
$$

$$= \quad ([\vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\boldsymbol{w}}]_{R})_X$$

### 4.2 Azioni a destra di gruppi di Lie su varietà

Un'*azione a destra* di un gruppo di Lie $G$ su una varietà $X$ è una funzione di classe $\mathcal{C}^\infty$

$$\begin{array}{rcl} \bar{m} \ : \ X \times G & \longrightarrow & X \\ (x, g) & \longmapsto & x \cdot g \end{array}$$

che gode della proprietà associativa

$$\bar{m}(\bar{m}(x, g_1), g_2) = \bar{m}(x, m(g_1, g_2)) \qquad \forall\ g_2, g_1 \in G \ \wedge \ \forall\ x \in X$$

L'azione a destra $\bar{m}$ induce due famiglie di moltiplicazioni analoghe alle moltiplicazioni a sinistra ed a destra sul gruppo $G$.

Per ogni elemento $x \in X$ possiamo definire la moltiplicazione a destra per l'elemento $x$

$$\begin{array}{rcl} \bar{L}_x \ : \ G & \longrightarrow & X \\ a & \longmapsto & \bar{m}(x, a) \end{array}$$

e per ogni $a \in G$ possiamo definire la moltiplicazione a destra per l'elemento $a$

$$\begin{array}{rcl} \bar{R}_a \ : \ X & \longrightarrow & X \\ x & \longmapsto & \bar{m}(x, a) \end{array}$$

L'associatività della moltiplicazione $\bar{m}$ ci permette di dedurre che $\forall a, b \in G$ e $\forall x \in X$ valgono le seguenti identità

$$\begin{aligned} \bar{R}_b \circ \bar{R}_a &= \bar{R}_{a \cdot b} \\ \bar{L}_x \circ L_a &= \bar{L}_{x \cdot a} \\ \bar{L}_x \circ R_b &= \bar{R}_b \circ \bar{L}_x \end{aligned}$$

Siccome si ha

$$\bar{R}_1 = \mathrm{id}_X \, ,$$

le moltiplicazioni a sinistra sono dei diffeomorfismi di $X$ con funzioni inverse

$$\left(\bar{R}_a\right)^{-1} = \bar{R}_{a^{-1}} \, .$$

Le moltiplicazioni a destra $\bar{L}_x : G \longmapsto X$ permettono di trasformare ogni vettore tangente $\vec{\boldsymbol{v}} \in T_1(G)$ in un campo di vettori $\vec{\boldsymbol{v}}_X \in \mathfrak{X}(X)$ definito da:

$$\vec{\boldsymbol{v}}_X : x \longmapsto T_1(\bar{L}_x)(\vec{\boldsymbol{v}})$$

che è analogo al campo di vettori $\vec{\boldsymbol{v}}_L \in \mathfrak{X}_L(G)$. La funzione $\vec{\boldsymbol{v}} \longmapsto \vec{\boldsymbol{v}}_X$ è lineare.

Calcolando le immagini $(\bar{R}_g)_*(\vec{\boldsymbol{v}}_X)$ si ottiene

$$(\bar{R}_g)_*(\vec{\boldsymbol{v}}_X) = (\mathrm{ad}_{g^{-1}}(\vec{\boldsymbol{v}}))_X$$

**Dimostrazione.** Infatti si ha:

$$\begin{aligned}
((\bar{R}_g)_*(\vec{\boldsymbol{v}}_X))(x) &= (T(\bar{R}_g)\circ\vec{\boldsymbol{v}}_X\circ\bar{R}_{g^{-1}})(x)\\
&= T(\bar{R}_g)(\vec{\boldsymbol{v}}_X(\bar{R}_{g^{-1}}(x)))\\
&= T(\bar{R}_g)(\vec{\boldsymbol{v}}_X(x\cdot g^{-1}))\\
&= T_{x\cdot g^{-1}}(\bar{R}_g)(\vec{\boldsymbol{v}}_X(x\cdot g^{-1}))\\
&= T_{x\cdot g^{-1}}(\bar{R}_g)(T_1(\bar{L}_{x\cdot g^{-1}})(\vec{\boldsymbol{v}}))\\
&= T_1(\bar{R}_g\circ\bar{L}_{x\cdot g^{-1}})(\vec{\boldsymbol{v}})\\
&= T_1(\bar{R}_g\circ\bar{L}_x\circ L_{g^{-1}})(\vec{\boldsymbol{v}})\\
&= T_1(\bar{L}_x\circ R_g\circ L_{g^{-1}})(\vec{\boldsymbol{v}})\\
&= T_1(\bar{L}_x\circ\mathrm{Ad}_{g^{-1}})(\vec{\boldsymbol{v}})\\
&= T_1(\bar{L}_x)(\mathrm{ad}_{g^{-1}}(\vec{\boldsymbol{v}}))\\
&= (\mathrm{ad}_{g^{-1}}(\vec{\boldsymbol{v}}))_X(x)
\end{aligned}$$

■

Vale la seguente proprietà

$$[\vec{\boldsymbol{v}}_X,\vec{\boldsymbol{w}}_X]=([\vec{\boldsymbol{v}},\vec{\boldsymbol{w}}]_L)_X$$

I campi di vettori $\vec{\boldsymbol{v}}_X$ permettono di verificare se una funzione $f \in \mathcal{C}^\infty(X;\mathbb{R})$ è invariante per le moltiplicazioni a destra $\bar{R}_a$. L'identità $(\bar{R}_a)^*(f) = f$ $\forall a \in G$ ci dice che $\forall a \in G$ e $\forall x \in X$ deve valere l'identità

$$f(x) = \left((\bar{R}_a)^*(f)\right)(x) = f(\bar{R}_a(x)) = f(\bar{L}_x(a)) \tag{25}$$

Se consideriamo una curva $\gamma : I \longrightarrow G$ possiamo, quindi affermare che $\forall x \in X$ e $\forall t \in I$

$$f(\bar{L}_x(\gamma(t))) = f(x) \tag{26}$$

Considerando curve $\gamma$ basate nell'identità $\mathbb{1} \in G$ e definendo $\vec{\boldsymbol{v}} = \frac{d\gamma}{dt}|_{t=0} \in T_{\mathbb{1}}(G)$, possiamo affermare che $\forall x \in X$ e $\forall \vec{\boldsymbol{v}} \in T_{\mathbb{1}}(G)$

$$0 = \left.\frac{d(f \circ \bar{L}_x \circ \gamma)}{dt}\right|_{t=0} = T_x(f)(T_{\mathbb{1}}(\bar{L}_x)(\vec{\boldsymbol{v}})) = T_x(f)(\vec{\boldsymbol{v}}_X(x)) = (\vec{\boldsymbol{v}}_X(f))(x) \tag{27}$$

o, equivalentemente,

$$\vec{\boldsymbol{v}}_X(f) = \pounds_{\vec{\boldsymbol{v}}_X}(f) = 0 \qquad\qquad \forall \vec{\boldsymbol{v}} \in T_{\mathbb{1}}(G) \tag{28}$$

La condizione che coinvolge la derivata di Lie può essere estesa a tutti i campi di tensori invarianti per moltiplicazioni a destra sulla varietà $X$.

**Osservazione 4.3.** [Azione naturale a destra di $GL(n;\mathbb{R})$ su $(\mathbb{R}^n)^*$]

Quando il gruppo di Lie $G$ è il gruppo $GL(n;\mathbb{R})$ e la varietà $X$ è lo spazio vettoriale $(\mathbb{R}^n)^*$ si ha

$$\begin{aligned} \bar{R}_a &: x \longmapsto x \cdot a \\ \bar{L}_x &: a \longmapsto x \cdot a \end{aligned}$$

dove $\cdot$ indica il prodotto di matrici, la matrice $a$ è una matrice quadrata $n \times n$ con determinante diverso da 0 ed $x$ è una matrice riga $1 \times n$. Il campo di vettori $\vec{\boldsymbol{v}}_X$ è

$$\vec{\boldsymbol{v}}_X : x \longmapsto (x, x \cdot v).$$

ed utilizzando le solite coordinate standard sul gruppo $GL(n;\mathbb{R})$ e su $(\mathbb{R}^n)^*$ possiamo scrivere

$$\vec{\boldsymbol{v}}_X(x) = x_r v_k^r \frac{\partial}{\partial x_k} = x_r v_k^r \vec{\partial}^k$$

$$\begin{aligned}
[\vec{\boldsymbol{v}}_X, \vec{\boldsymbol{w}}_X] &= [x_r v_k^r \vec{\partial}^k, x_a w_b^a \vec{\partial}^b] \\
&= (x_r v_k^r \vec{\partial}^k)(x_a w_b^a) \vec{\partial}^b - (v \leftrightarrow w) \\
&= (x_r v_k^r)(\delta_a^k w_b^a) \vec{\partial}^b - (v \leftrightarrow w) \\
&= (v_a^r w_b^a - w_a^r v_b^a) x_r \vec{\partial}^b \\
&= ([\vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\boldsymbol{w}}]_L)_X
\end{aligned}$$

**Osservazione 4.4.** [Azione naturale a destra di $GL(m;\mathbb{R})$ su $\mathbb{R}^n \otimes (\mathbb{R}^m)^*$]

Quando il gruppo di Lie $G$ è il gruppo $GL(m;\mathbb{R})$ e la varietà $X$ è lo spazio vettoriale $L(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n) \equiv \mathbb{R}^n \otimes (\mathbb{R}^m)^*$ si ha

$$\begin{aligned}
\bar{R}_a &: x \longmapsto x \cdot a \\
\bar{L}_x &: a \longmapsto x \cdot a
\end{aligned}$$

dove $\cdot$ indica il prodotto di matrici, la matrice $a$ è una matrice quadrata $m \times m$ con determinante diverso da 0 ed $x$ è una matrice "rettangolare" $n \times m$ ($n$ righe ed $m$ colonne).

Il campo di vettori $\vec{\boldsymbol{v}}_X$ è

$$\vec{\boldsymbol{v}}_X : x \longmapsto (x, x \cdot v).$$

ed utilizzando le solite coordinate standard sul gruppo $GL(n;\mathbb{R})$ possiamo scrivere

$$\vec{\boldsymbol{v}}_X(x) = x^k_\alpha v^\alpha_\beta \frac{\partial}{\partial x^k_\beta} = x^k_\alpha v^\alpha_\beta \, \vec{\partial}\,^\beta_k$$

$$\begin{aligned}
[\vec{\boldsymbol{v}}_X, \vec{\boldsymbol{w}}_X] &= [x^k_\alpha v^\alpha_\beta \, \vec{\partial}\,^\beta_k, x^i_\rho w^\rho_\sigma \, \vec{\partial}\,^\sigma_i] \\
&= (x^k_\alpha v^\alpha_\beta \, \vec{\partial}\,^\beta_k (x^i_\rho w^\rho_\sigma) \, \vec{\partial}\,^\sigma_i) - (v \leftrightarrow w) \\
&= (x^k_\alpha v^\alpha_\beta (\delta^i_k \delta^\beta_\rho w^\rho_\sigma) \, \vec{\partial}\,^\sigma_i) - (v \leftrightarrow w) \\
&= (x^i_\alpha v^\alpha_\beta w^\beta_\sigma \, \vec{\partial}\,^\sigma_i) - (v \leftrightarrow w) \\
&= x^i_\alpha (v^\alpha_\beta w^\beta_\sigma) \, \vec{\partial}\,^\sigma_i - (v \leftrightarrow w) \\
&= x^i_\alpha (v^\alpha_\beta w^\beta_\sigma - w^\alpha_\beta v^\beta_\sigma) \, \vec{\partial}\,^\sigma_i \\
&= ([\vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\boldsymbol{w}}]_L)_X
\end{aligned}$$

### 4.3 Spazi delle orbite e stabilizzatori

L'orbita di un punto $x \in X$ per un'azione a sinistra $\bar{m} : G \times X \longrightarrow X$ è il sottoinsieme di $\mathcal{O}_x \subseteq X$ definito da

$$\mathcal{O}_x = \bar{m}(G, \{x\}) = \{y = \bar{m}(g, x) \in X \,|\, g \in G\}$$

e lo stabilizzatore del punto $x \in X$ è il sottogruppo $S_x \subseteq G$

$$S_x = \{g \in G \,|\, \bar{m}(g, x) = x\}$$

Se l'azione è un'azione a destra $\bar{m} : X \times G \longrightarrow X$, l'orbita $\mathcal{O}_x \subseteq X$ è definita da

$$\mathcal{O}_x = \bar{m}(\{x\}, G) = \{y = \bar{m}(x, g) \in X \,|\, g \in G\}$$

e lo stabilizzatore è il sottogruppo chiuso $S_x \subseteq G$

$$S_x = \{g \in G \,|\, \bar{m}(x, g) = x\}$$

Le proprietà delle azioni a sinistra sono in corrispondenza biunivoca con proprietà analoghe delle azioni a destra perché data un'azione a sinistra $\bar{m} : (g, x) \longmapsto g{\cdot}x$ la funzione $\bar{m}' : (x, g) \longmapsto g^{-1}{\cdot}x$ è un'azione a destra. Analogamente se $\bar{m} : (x, g) \longmapsto x{\cdot}g$ è un'azione a destra la funzione $\bar{m}' : (g, x) \longmapsto x{\cdot}g^{-1}$ è un'azione a sinistra.

- Se esiste un punto $x \in X$ tale che $\mathcal{O}_x = X$ diciamo che l'azione è *transitiva*; in questo caso, $\forall\, y \in X$ si ha $\mathcal{O}_y = X$.

- Se l'intersezione $\bigcap_{x\in X} S_x = \{1\}$ diremo che l'azione è *effettiva*; l'intersezione $H = \bigcap_{x\in X} S_x$ è sempre un sottogruppo normale chiuso di $G$.

- Se per ogni $x \in X$ si ha $S_x = \{1\}$ diremo che l'azione è *libera*.

La relazione definita da $x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow x_2 \in \mathcal{O}_{x_1}$ è una relazione di equivalenza in $X$. Lo spazio delle orbite è l'insieme quoziente $X/\sim$, che verrà indicato con $X/G$, con proiezione $\pi : X \longrightarrow X/G$. L'insieme quoziente $X/G$ ammette una struttura di varietà differenziabile (si veda [4]) tale che la proiezione $\pi : X \longrightarrow X/G$ sia una funzione di classe $\mathcal{C}^\infty$ con mappa tangente suriettiva se e solo se il grafico della relazione di equivalenza $x \sim y \Leftrightarrow y \in \mathcal{O}_x$ è una sottovarietà chiusa di classe $\mathcal{C}^\infty$ della varietà prodotto $X \times X$.

Si dimostra (vedere [4]) che gli stabilizzatori $S_x$ sono sottogruppi di Lie del gruppo di Lie $G$ e che le orbite $\mathcal{O}_x$ sono sottovarietà differenziabili della varietà $X$ che sono diffeomorfe agli spazi omogenei $G/S_x$.

La funzione $x \longmapsto \dim(S_x)$ è semicontinua inferiormente: se $\dim(S_x) < k$ allora esiste un intorno aperto $U \subseteq X$ del punto $x$ tale che per ogni $y \in U$ si abbia $\dim(S_y) \leq k$. Di conseguenza, la funzione $x \longmapsto \dim(\mathcal{O}_x) = \dim(G) - \dim(S_x)$ è semicontinua superiormente.

L'insieme $X' \subseteq X$ dei punti di $x \in X$ in cui $\dim(S_x)$ raggiunge il minimo, o $\dim(\mathcal{O}_x)$ raggiunge il massimo, è un sottoinsieme aperto non vuoto ed il quoziente $X'/G$ è una varietà. Ovviamente se la funzione $x \longmapsto \dim(S_x)$, o $x \longmapsto \dim(\mathcal{O}_x)$, è una funzione costante allora $X/G$ è una varietà.

# FINE LEZIONE 16 MMdFC (2023-04-20 ore 14:00 – 16:00)

**Osservazione 4.5.** [Azioni sui quozienti di gruppi rispetto a sottogruppi]

Quando $H$ è un sottogruppo di Lie di un gruppo di Lie $G$, possiamo considerare due azioni di $H$ su $G$, una a sinistra ed una a destra

$$\begin{aligned} m_{L} &: H \times G \longrightarrow G \\ m_{R} &: G \times H \longrightarrow G \end{aligned}$$

che si deducono dalla moltiplicazione $m : G \times G \longrightarrow G$. La due azioni sono azioni libere che ammettono varietà quoziente indicata con $H\backslash G$, per l'azione a sinistra, e $G/H$, per l'azione a destra.

Quando il sottogruppo di Lie $H$ è un sottogruppo normale la varietà delle orbite è il gruppo quoziente $G/H$, che è un gruppo di Lie, altrimenti la varietà quoziente è uno spazio omogeneo con un'azione a sinistra

$$\begin{aligned} G \times G/H &\longrightarrow G/H \\ (g, [x]) &\longmapsto [g \cdot x] \end{aligned}$$

oppure con un'azione a destra

$$\begin{aligned} H\backslash G \times G &\longrightarrow H\backslash G \\ ([x], g) &\longmapsto [x \cdot g] \end{aligned}$$

Le due azioni sono ben definite per l'associatività dell'operazione di moltiplicazione del gruppo.

## 5 Fibrati principali

Un fibrato principale con gruppo di struttura $G$ è una varietà fibrata $(P, M, \pi)$ dotata di un'azione libera a destra $P \times G \longrightarrow P$ con varietà delle orbite $M$. Le fibre $P_x = \pi^{-1}(x)$ sopra ai punti $x \in M$ sono diffeomorfe al gruppo $G$ perché su di esse l'azione di $G$ su $P$ induce un'azione libera e transitiva.

Fra i fibrati principali ci sono i fibrati principali banali dove $P = M \times G$ e l'azione è definita da

$$\begin{array}{ccc} (M \times G) \times G & \longrightarrow & M \times G \\ ((x, g), \gamma) & \longmapsto & (x, g \cdot \gamma) \end{array}$$

Un isomorfismo di fibrati principali con gruppo di struttura $G$ è un isomorfismo di varietà fibrate

$$\begin{tikzcd} P_1 \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\pi_1"'] & P_2 \arrow[d, "\pi_2"] \\ M \arrow[r, "f"'] & M \end{tikzcd}$$

tale che per ogni $p \in P_1$ e per ogni $g \in G$ sia $F(p \cdot g) = F(p) \cdot g$.

Anche se nella maggior parte dei casi si richiede che sia $f = \mathrm{id}_M$, il diffeomorfismo $f \in \mathrm{Diff}(M)$ non deve necessariamente coincidere con $\mathrm{id}_M$.

Si dimostra facilmente che un fibrato principale $(P, M, \pi)$ con gruppo di struttura $G$ è un fibrato differenziale $(P, M, \pi, G)$ con fibra tipo $G$. Su aperti "abbastanza piccoli" $U \subset M$ si possono definire sezioni locali $\sigma : U \longrightarrow \pi^{-1}(U)$ di classe $\mathcal{C}^\infty$, ma, come vedremo più avanti, non è detto che esistano sezioni globali $\sigma : M \longrightarrow P$ di classe $\mathcal{C}^\infty$ (o anche solo continue).

Dato un sistema di coordinate $(W, \psi) = (W, x^\alpha, y^i)$, attorno ad un punto $p \in P$, fibrate su un sistema di coordinate $(U, \varphi) = (U, x^\alpha)$, attorno al punto $\pi(p) \in M$, una sezione locale $\sigma : U \longrightarrow W \subseteq \pi^{-1}(U)$

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[rrr, "\psi"] \arrow[d, "\pi"] & & & \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"'] \\
U \arrow[u, bend left, "\sigma"] \arrow[rrr, "\varphi"'] & & & \mathbb{R}^m \arrow[u, bend right, "\psi\circ\sigma\circ\varphi^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

è definita univocamente da una sezione del tipo

$$\psi \circ \sigma \circ \varphi^{-1} : (x^\alpha) \longmapsto (x^\alpha, \sigma^i(x^\beta))\,.$$

Fissata una sezione locale $\sigma : U \longrightarrow W$, possiamo definire la funzione

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}_\sigma :\ U \times G &\longrightarrow \pi^{-1}(U) \\
(x, g) &\longmapsto \sigma(x) \cdot g
\end{aligned}$$

che risulta essere un isomorfismo di fibrati principali con gruppo di struttura $G$. L'isomorfismo

$$\psi_\sigma = (\bar{\psi}_\sigma)^{-1} : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times G$$

è una trivializzazione locale della varietà fibrata $(P, M, \pi)$. Quindi un fibrato principale è effettivamente un fibrato differenziale che è banale se e solo se ammette una sezione globale di classe $\mathcal{C}^\infty$.

Se consideriamo due trivializzazioni distinte $\psi_1 : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times G$ e $\psi_2 : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times G$ su un aperto $U \subseteq M$, le due funzioni

$$\psi_{21} = \psi_2 \circ (\psi_1)^{-1} : U \times G \longrightarrow U \times G$$

e

$$\psi_{12} = \psi_1 \circ (\psi_2)^{-1} : U \times G \longrightarrow U \times G$$

sono isomorfismi di fibrati principali banali e, quindi, devono esistere due funzioni $\bar{\psi}_{21}, \bar{\psi}_{12} \in \mathcal{C}^\infty(U; G)$ tali che per ogni punto $x \in U$ sia $\bar{\psi}_{12}(x) = (\bar{\psi}_{21}(x))^{-1}$ e che

$$\psi_{21}(x, g_1) = (x, \bar{\psi}_{21}(x) \cdot g_1) = (x, L_{\bar{\psi}_{21}(x)}(g_1))$$

e

$$\psi_{12}(x, g_2) = (x, \bar{\psi}_{12}(x) \cdot g_2) = (x, L_{\bar{\psi}_{12}(x)}(g_2))$$

per ogni $x \in U$ e per ogni $g_1, g_2 \in G$. Considerando le sezioni locali $\sigma_i : U \longrightarrow \pi^{-1}(U)$ associate alle trivializzazioni locali (cioè: le sezioni locali definite da $\sigma_i(x) = (\psi_i)^{-1}(x, \mathbb{1})$), possiamo affermare che $\sigma_i(x) = \sigma_j(x) \cdot \psi_{ji}(x)$.

Le mappe tangenti $T_1(\bar{L}_p) : T_1(G) \longrightarrow V_p(P)$, che sono lineari e biiettive, permettono di costruire un isomorfismo

$$P \times T_1(G) \longrightarrow V(P)$$

di fibrati vettoriali su $P$

$$\begin{array}{ccc} P \times T_1(G) & \longrightarrow & V(P) \\ \big(p, \vec{\boldsymbol{v}}\big) & \longmapsto & T_1(\bar{L}_p)(\vec{\boldsymbol{v}}) \equiv \vec{\boldsymbol{v}}_P(p) \end{array}$$

I campi di vettori del tipo $\vec{\boldsymbol{v}}_P$, che sono definiti da

$$\vec{\boldsymbol{v}}_P(p) = T_1(\bar{L}_p)(\vec{\boldsymbol{v}})\,,$$

sono campi di vettori verticali. Rappresentando il campo di vettori $\vec{\boldsymbol{v}}_P$ in una trivializzazione otteniamo

$$\vec{\boldsymbol{v}}_P(x,g) = v^i\,\vec{\boldsymbol{\lambda}}_i(g)$$

ed l'espressione è indipendente dalla trivializzazione utilizzata.

**Esempio 5.1.** [Il fibrato delle basi $L(M)$]

Data una varietà $M$, di classe $\mathcal{C}^\infty$ e dimensione $m$, definiamo il fibrato delle basi della varietà come l'unione (per costruzione disgiunta)

$$L(M) = \bigcup_{x \in M} \mathcal{B}(T_x(M))$$

di tutte le basi degli spazi tangenti ai punti della varietà. L'insieme $L(M)$ ha una struttura naturale di varietà fibrata su $M$ in quanto è un sottoinsieme aperto, e denso, del prodotto cartesiano fibrato $T(M) \times_M \cdots \times_M T(M)$ di $m$ copie del fibrato tangente $T(M)$

$$L(M) \subset T(M) \times_M \cdots \times_M T(M)$$

che si proietta su $M$.

Su ognuna delle fibre $\mathcal{B}(T_x(M))$ di $L(M)$ c'è un'azione a destra differenziabile, libera e transitiva del gruppo di Lie $GL(m;\mathbb{R})$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}(T_x(M)) \times GL(m;\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{B}(T_x(M)) \\ \big((\vec{\boldsymbol{e}}_i), (g^r_s)\big) & \longmapsto & (\vec{\boldsymbol{e}}'_k) = (\vec{\boldsymbol{e}}_a\, g^a_k) \end{array}$$

Sulla varietà fibrata $\lambda_M : L(M) \longrightarrow M$ c'è un'azione libera naturale, a destra, del gruppo di Lie $GL(m;\mathbb{R})$ che induce una struttura di fibrato principale con gruppo di struttura $GL(m;\mathbb{R})$.

Sul fibrato principale $\lambda_M : L(M) \longrightarrow M$ ci sono delle coordinate fibrate "naturali" $\big(x^\alpha, e^\alpha_a\big)$ che sono indotte dai sistemi di coordinate fibrate naturali $(x^\alpha, v^\alpha)$ su $T(M)$. Con queste coordinate i vettori della base sono

$$\vec{\boldsymbol{e}}_a = e^\alpha_a \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \qquad \text{con} \qquad \det(e^\alpha_a) \neq 0\,,$$

e l'azione di $GL(m;\mathbb{R})$ su $L(M)$ è data da

$$\Big(\big(x^\alpha, e^\beta_b\big), \big(g^r_s\big)\Big) \longmapsto \big(x^\alpha, e^\beta_a\, g^a_k\big)$$

Le coordinate fibrate naturali $(x^\alpha, e^\alpha_a)$ corrispondono a delle trivializzazioni locali del fibrato principale $\lambda_M : L(M) \longrightarrow M$ e le trasformazioni di coordinate fibrate naturali sono del tipo:

$$\left(x^\alpha, e^\beta_b\right) \longmapsto \left(x'^{\alpha'}, e'^{\beta'}_b\right) = \left(x'^{\alpha'}(x), \frac{\partial x'^{\beta'}}{\partial x^\beta}(x)\, e^\beta_b\right)$$

Le basi per i vettori associate ai sistemi di coordinate $(\partial_\alpha, \partial^b_\beta)$, sono legate da leggi di trasformazione del tipo

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial}{\partial e^\beta_b}\right) = \left(\frac{\partial x'^{\alpha'}}{\partial x^\alpha}\frac{\partial}{\partial x'^{\alpha'}}, \frac{\partial^2 x'^{\beta'}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} e^\beta_b \frac{\partial}{\partial e'^{\beta'}_b} + \frac{\partial x'^{\beta'}}{\partial x^\beta}\frac{\partial}{\partial e'^{\beta'}_b}\right)$$

Per le basi duali si ha

$$\left(dx'^{\alpha'}, de'^{\beta'}_b\right) = \left(\frac{\partial x'^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} dx^\alpha, \frac{\partial^2 x'^{\beta'}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} e^\beta_b dx^\alpha + \frac{\partial x'^{\beta'}}{\partial x^\beta} de^\beta_b\right)$$

Le moltiplicazioni a destra $\bar{R}_g : L(M) \to L(M)$ e le moltiplicazioni a sinistra $\bar{L}_p : GL(m;\mathbb{R}) \to L(M)$ sono definite da:

$$\begin{aligned} \bar{R}_g \; &: \; \left(x^\alpha, e^\beta_b\right) \longmapsto \left(x^\alpha, e^\beta_a\, g^a_k\right) \\ \bar{L}_p \; &: \; \left(g^r_s\right) \longmapsto \left(x^\alpha, e^\beta_a\, g^a_k\right) \qquad \text{con } p = (x, e) \end{aligned}$$

mentre i campi di vettori $\vec{\boldsymbol{v}}_{L(M)}$ sono rappresentati da

$$\vec{\boldsymbol{v}}_{L(M)}(x, e) = e^\beta_a\, v^a_k \frac{\partial}{\partial e^\beta_k} = v^a_k\, e^\beta_a\, \vec{\partial}^{\,k}_\beta = v^a_k\, \vec{\boldsymbol{\lambda}}^k_a$$

I campi di vettori verticali $\vec{\boldsymbol{\lambda}}^k_a$ sono globalmente ben definiti e sono una base per il modulo $\mathfrak{X}_V(P)$.

**Esempio 5.2.** [Il fibrato principale $S^3 \longrightarrow S^2$]

L'insieme $M = \mathbb{C} \times \mathbb{C} \setminus \{(0,0)\}$ può essere visto come una varietà differenziabile reale di dimensione 4 ed il gruppo abeliano $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ come un gruppo di Lie reale di dimensione 2.

Sulla varietà $M$ possiamo considerare l'azione differenziabile a destra del gruppo di Lie $\mathbb{C}^*$ definita da

$$(z_1, z_2) \cdot w = (z_1 \cdot w, z_2 \cdot w) \tag{29}$$

L'azione è libera ed ammette come varietà[3] quoziente la sfera $S^2$. La funzione analitica reale

$$\begin{array}{rccc} \pi \; : & M & \longrightarrow & \mathbb{C} \times \mathbb{R} \\ & (z_1, z_2) & \longmapsto & \left( \frac{2 z_1 \bar{z}_2}{|z_1|^2 + |z_2|^2}, \frac{|z_2|^2 - |z_1|^2}{|z_1|^2 + |z_2|^2} \right) \end{array}$$

definisce una delle possibili proiezioni naturali della varietà $M$ sullo spazio delle orbite $S^2 \subset \mathbb{C} \times \mathbb{R}$

$$\pi : M \longrightarrow S^2$$

e $(M, S^2, \pi)$ è un fibrato principale con gruppo di struttura $\mathbb{C}^*$.

Se consideriamo la restrizione dell'azione (29) al caso in cui $(z_1, z_2) \in S^3 \subset M$ (cioè: $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$) e $w \in U(1) \subset \mathbb{C}^*$ (cioè: $|w| = 1$) abbiamo una proiezione

$$\begin{array}{rccc} \pi \; : & M \supset S^3 & \longrightarrow & S^2 \subset \mathbb{C} \times \mathbb{R} \\ & (z_1, z_2) & \longmapsto & \left( 2 z_1 \bar{z}_2, |z_2|^2 - |z_1|^2 \right) \end{array} \tag{30}$$

[3] Lo spazio quoziente $M/\mathbb{C}^*$ è lo spazio proiettivo complesso $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ o, equivalentemente, la sfera $S^2$ vista come sfera di Riemann.

Per vedere che la proiezione (30) è suriettiva possiamo osservare che

1. i punti di $S^3$ che si proiettano sul polo nord $(0,1) \in S^2$ sono tutti i punti del tipo $(0,u)$ tali che $u \in U(1)$;

2. i punti di $S^3$ che si proiettano sul polo sud $(0,-1) \in S^2$ sono tutti i punti del tipo $(u,0)$ tali che $u \in U(1)$;

3. se il punto $(w,r) \in S^2 \setminus \{(0,1),(0,-1)\}$, allora esiste un angolo $\psi$ tale che $|w| = \sin(2\psi)$, $r = \cos(2\psi)$ e $(w,r) = (\sin(2\psi)\,\tilde{w}, \cos(2\psi))$, con $\tilde{w} \in U(1)$; possiamo allora dire che i punti di $S^3$ che si proiettano su $(w,r)$ sono i punti del tipo $(\sin(\psi)\,\tilde{w}\,u, \cos(\psi)\,u)$ con $u \in U(1)$.

L'azione a destra (29) di $U(1)$ su $S^3$ definisce una struttura di fibrato principale con gruppo di struttura $U(1) = S^1$. Questo fibrato non ammette sezioni globali di classe $\mathcal{C}^\infty$ perché, altrimenti, la varietà $S^3$ sarebbe diffeomorfa a $S^2 \times S^1$ e questo non è possibile.

**Esempio 5.3.** [Il fibrato principale $S^7 \longrightarrow S^4$]

Indichiamo con $\mathbb{H}$ il corpo dei quaternioni di Hamilton. L'insieme $M = \mathbb{H} \times \mathbb{H} \setminus \{(0,0)\}$ può essere visto come una varietà differenziabile reale di dimensione 8 ed il gruppo $\mathbb{H}^* = \mathbb{H} \setminus \{0\}$ come un gruppo di Lie reale, non abeliano, di dimensione 4.

Sulla varietà $M$ possiamo considerare l'azione differenziabile a destra del gruppo di Lie $\mathbb{H}^*$ definita da

$$(z_1, z_2) \cdot w = (z_1 \cdot w, z_2 \cdot w) \tag{31}$$

L'azione è libera ed ammette come varietà quoziente la sfera $S^4$. La funzione analitica reale

$$\begin{array}{rccc} \pi : & M & \longrightarrow & \mathbb{H} \times \mathbb{R} \\ & (z_1, z_2) & \longmapsto & \left( \frac{2z_1\bar{z}_2}{|z_1|^2+|z_2|^2}, \frac{|z_2|^2-|z_1|^2}{|z_1|^2+|z_2|^2} \right) \end{array}$$

definisce una delle possibili proiezioni naturali della varietà $M$ sullo spazio delle orbite $S^4 \subset \mathbb{H} \times \mathbb{R}$

$$\pi : M \longrightarrow S^4$$

e $(M, S^4, \pi)$ è un fibrato principale con gruppo di struttura $\mathbb{H}^*$.

Se consideriamo la restrizione dell'azione (33) al caso in cui $(z_1, z_2) \in S^7 \subset M$ (cioè: $|z_1|^2+|z_2|^2 = 1$) e $w \in S^3 \subset \mathbb{H}^*$ (cioè: $|w| = 1$) abbiamo una proiezione

$$\begin{array}{rccc} \pi : & M \supset S^7 & \longrightarrow & S^4 \subset \mathbb{H} \times \mathbb{R} \\ & (z_1, z_2) & \longmapsto & \left(2z_1\bar{z}_2, |z_2|^2 - |z_1|^2\right) \end{array} \tag{32}$$

Per vedere che la proiezione (32) è suriettiva possiamo osservare che

1. i punti di $S^7$ che si proiettano sul polo nord $(0, 1) \in S^4$ sono tutti i punti del tipo $(0, u)$ tali che $u \in S^3$;

2. i punti di $S^7$ che si proiettano sul polo sud $(0,-1) \in S^4$ sono tutti i punti del tipo $(u,0)$ tali che $u \in S^3$;

3. se il punto $(w,r) \in S^4 \setminus \{(0,1),(0,-1)\}$, allora esiste un angolo $\psi$ tale che $|w| = \sin(2\psi)$, $r = \cos(2\psi)$ e $(w,r) = (\sin(2\psi)\,\tilde{w}, \cos(2\psi))$, con $\tilde{w} \in S^3$; possiamo allora dire che i punti di $S^7$ che si proiettano su $(w,r)$ sono i punti del tipo $(\sin(\psi)\,\tilde{w}\,u, \cos(\psi)\,u)$ con $u \in S^3$.

L'azione a destra (33) di $S^3$ su $S^7$ definisce una struttura di fibrato principale con gruppo di struttura[4] $S^3$ e base $S^4$. Questo fibrato non ammette sezioni globali di classe $\mathcal{C}^\infty$ perché, altrimenti, la varietà $S^7$ sarebbe diffeomorfa a $S^4 \times S^3$ e questo non è possibile.

**Esempio 5.4.** [Il fibrato (non principale) $S^{15} \longrightarrow S^8$]

Quando proviamo a ripetere lo stesso ragionamento sostituendo il corpo $\mathbb{H}$ dei quaternioni con l'algebra non associativa $\mathbb{O}$ degli ottonioni il procedimento non funziona perché, a causa della non associatività dell'operazione di prodotto su $\mathbb{O}^*$ e su $S^7$, la funzione

$$(z_1, z_2) \cdot w = (z_1 \cdot w, z_2 \cdot w) \tag{33}$$

non è un'azione.

[4] ricordiamo che il gruppo di Lie $S^3$ è isomorfo al gruppo di Lie $SU(2)$.

Definiamo ancora $M = \mathbb{O} \times \mathbb{O} \setminus \{(0,0)\}$ ma il fibrato

$$\begin{array}{rcl} \pi \ : \ M \supset S^{15} & \longrightarrow & S^8 \subset \mathbb{O} \times \mathbb{R} \\ (z_1, z_2) & \longmapsto & \big(2z_1\bar{z}_2, |z_2|^2 - |z_1|^2\big) \end{array} \tag{34}$$

che si ottiene non è più un fibrato principale perché $S^7$ non è un gruppo.

Per vedere che la proiezione (34) è suriettiva possiamo possiamo procedere come abbiamo fatto nel caso $S^3 \longrightarrow S^2$ e $S^7 \longrightarrow S^4$

1. i punti di $S^{15}$ che si proiettano sul polo nord $(0,1) \in S^8$ sono tutti i punti del tipo $(0,u)$ tali che $u \in S^7$;
2. i punti di $S^{15}$ che si proiettano sul polo sud $(0,-1) \in S^8$ sono tutti i punti del tipo $(u,0)$ tali che $u \in S^7$;
3. se il punto $(w,r) \in S^8 \setminus \{(0,1),(0,-1)\}$, allora esiste un angolo $\psi$ tale che $|w| = \sin(2\psi)$, $r = \cos(2\psi)$ e $(w,r) = (\sin(2\psi)\,\tilde{w}, \cos(2\psi))$, con $\tilde{w} \in S^7$; possiamo allora dire che i punti di $S^{15}$ che si proiettano su $(w,r)$ sono i punti del tipo $(\sin(\psi)\,\tilde{w}\,u, \cos(\psi)\,u)$ con $u \in S^7$.

### 5.1 Campi di tensori invarianti sui fibrati principali

L'azione a destra $P \times G \longrightarrow P$ del gruppo di struttura $G$ su un fibrato principale $(P, M, \pi)$ permette di considerare campi di tensori su $P$ che sono invarianti rispetto a tutte le moltiplicazioni a destra

$\bar{R}_g : P \longrightarrow P$.

Le funzioni invarianti sono tutte e sole le controimmagini $\pi^*(f) = f \circ \pi$ delle funzioni $f \in \mathcal{C}^\infty(M; \mathbb{R})$. Per verificare se una funzione $f \in \mathcal{C}^\infty(M; \mathbb{R})$ è invariante per l'azione a destra di $G$ su $P$ bisogna verificare che per ogni $g \in G$ sia $(\bar{R}_g)^*(f) = f$. Quindi per ogni punto $p \in P$ sia

$$\big((\bar{R}_g)^*(f)\big)(p) = f\big(\bar{R}_g)(p)\big) = f\big(\bar{L}_p)(g)\big)$$

Se consideriamo ora una curva $t \longmapsto \gamma(t)$ basata nell'identità $\mathbb{1} \in G$ e difiniamo $\vec{\boldsymbol{v}} = \left(\frac{d\gamma(t)}{dt}\right)_{|t=0} \in T_{\mathbb{1}}G$, si ha che deve essere $\vec{\boldsymbol{v}}_P(f) = 0$ per ogni $\vec{\boldsymbol{v}} \in T_{\mathbb{1}}G$.

Per studiare le 1-forme ed i campi di vettori invarianti per l'azione del gruppo $G$ conviene rappresentare gli oggetti attraverso trivializzazioni locali $\psi : \pi^{-1}(U) \xrightarrow{\qquad\qquad} U \times G$ del fibrato principale, tali che sull'aperto $U \subseteq M$ ci sia un sistema di coordinate $(U, x^1, \ldots, x^m)$.

### 5.1.1 Campi di vettori invarianti sui fibrati principali

Dato un campo di vettori $\vec{\xi} \in \mathfrak{X}(P)$, consideriamo il campo di vettori $\psi_*(\vec{\xi}) \in \mathfrak{X}(U \times G)$ che si può scrivere come segue

$$\psi_*(\vec{\xi}) = \xi^\alpha(x, g)\vec{\partial}_\alpha + \tilde{\xi}^k(x, g)\vec{\boldsymbol{\rho}}_k(g)$$

dove $(\vec{\boldsymbol{\rho}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{\rho}}_n)$ è una base per $\mathfrak{X}_R(G)$. Con un abuso molto diffuso di notazione identificheremo sempre il campo di vettori $\vec{\xi}$ col campo di vettori $\psi_*(\vec{\xi})$.

Come sappiamo, la moltiplicazione a destra $\bar{R}_\gamma : U \times G \longrightarrow U \times G$ è definita

$$\bar{R}_\gamma = \mathrm{id}_U \times R_\gamma : (x,g) \longmapsto \big(x, R_\gamma(g)\big) = \big(x, g\cdot\gamma\big)$$

L'immagine del campo $\psi_*(\vec{\xi})$ attraverso la moltiplicazione a destra

$$\begin{array}{rcccl} \bar{R}_\gamma = \mathrm{id}_U \times R_\gamma & : & U \times G & \longrightarrow & U \times G \\ & & (x,g) & \longmapsto & \big(x, R_\gamma(g)\big) = \big(x, g\cdot\gamma\big) \end{array}$$

è definita da

$$\begin{aligned} (\bar{R}_\gamma)_*(\vec{\xi}) &= (\bar{R}_\gamma)_*\Big(\xi^\alpha(x,g)\vec{\partial}_\alpha + \tilde{\xi}^k(x,g)\vec{\boldsymbol{\rho}}_k(g)\Big) \\ &= (\bar{R}_\gamma)_*\Big(\xi^\alpha(x,g)\Big)\vec{\partial}_\alpha + (\bar{R}_\gamma)_*\Big(\tilde{\xi}^k(x,g)\Big)\vec{\boldsymbol{\rho}}_k(g) \\ &= \xi^\alpha\big(x, g\cdot\gamma^{-1}\big)\vec{\partial}_\alpha + \tilde{\xi}^k\big(x, g\cdot\gamma^{-1}\big)\vec{\boldsymbol{\rho}}_k(g) \end{aligned}$$

Quindi il campo $\vec{\xi}$ è invariante se e solo se i coefficienti $\xi^\alpha$ e $\tilde{\xi}^k$ non dipendono dal punto $g \in G$, cioè:

$$\vec{\xi} = \xi^\alpha(x)\vec{\partial}_\alpha + \tilde{\xi}^k(x)\vec{\boldsymbol{\rho}}_k(g)$$

In particolare, i campi di vettori $\vec{\xi}$ invarianti sono campi proiettabili.

**Esempio 5.5.** [Campi di vettori invarianti su $L(M)$]
Scegliendo di lavorare con sistemi di coordinate fibrate naturali $(x^\alpha, e^\beta_k)$ su un aperto $(\lambda_M)^{-1}(U)$, definiamo i coefficienti $\theta^a_\alpha$ come le componenti della matrice inversa della matrice $(e^\beta_b)$: cioè tali che

$$\theta^a_\sigma\, e^\sigma_b = \delta^a_b \qquad \text{e} \qquad e^\beta_k \theta^k_\alpha = \delta^\beta_\alpha$$

Un campo di vettori $\vec{\xi} \in \mathfrak{X}(L(M))$ avrà un'espressione del tipo

$$\begin{aligned} \vec{\xi} &= \xi^\beta(x,e)\partial_\beta + \xi^\beta_k(x,e)\,\partial^k_\beta \\ &= \xi^\beta(x,e)\partial_\beta + \xi^\beta_k(x,e)\,\theta^b_\beta\,\vec{\boldsymbol{\lambda}}^k_b \\ &= \xi^\beta(x,e)\partial_\beta + \xi^\beta_k(x,e)\,\theta^k_\alpha\,\vec{\boldsymbol{\rho}}^\alpha_\beta \end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato i campi di vettori verticali globali

$$\vec{\boldsymbol{\lambda}}^a_b = e^\sigma_b \frac{\partial}{\partial e^\sigma_a} = e^\sigma_b \vec{\partial}^{\,a}_{\sigma}$$

che sono una base di $\mathfrak{X}_L(GL(m;\mathbb{R}))$ ed i campi di vettori verticali locali

$$\vec{\boldsymbol{\rho}}^\alpha_\beta = e^\alpha_s \frac{\partial}{\partial e^\beta_s} = e^\alpha_s\,\vec{\partial}^{\,s}_{\beta}$$

che sono una base di $\mathfrak{X}_R(GL(m;\mathbb{R}))$.

Il campo di vettori $\vec{\xi}$ è invariante per le moltiplicazioni a destra $\bar{R}_g$ se e solo se

$$\vec{\xi} = \xi^\beta(x)\partial_\beta + \xi^\beta_\alpha(x)\,\vec{\boldsymbol{\rho}}^\alpha_\beta = \xi^\beta(x)\partial_\beta + \xi^\beta_\alpha(x)\,e^\alpha_k\,\vec{\partial}^{\,k}_{\beta}$$

I campi di vettori del tipo $\vec{\boldsymbol{v}}_P$ sono campi di vettori verticali definiti da

$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{v}}_P \;:\; & P & \longmapsto\quad & T(P) \\ & (x^\alpha, e^\beta_a) & \longmapsto\quad & (x^\alpha, e^\beta_a, 0, e^\beta_a\,v^a_k) \end{aligned}$$

o, equivalentemente, da

$$\vec{\boldsymbol{v}}_P(x,e) = e^\beta_a\, v^a_k\, \frac{\partial}{\partial e^\beta_k} = v^a_k\, e^\sigma_a\, \vec{\partial}^{\,k}_{\sigma} = v^a_k\, \vec{\boldsymbol{\lambda}}^k_a$$

e, in generale, non sono invarianti per le moltiplicazioni a destra $\bar{R}_g$.

#### 5.1.2 1–forme invarianti sui fibrati principali

Quando vengono rappresentate attraverso una trivializzazione locale $\psi$, le 1–forme invarianti per le moltiplicazioni a destra $\bar{R}_\gamma$ su un fibrato principale $(P, M, \pi)$ sono 1–forme del tipo

$$\underline{\boldsymbol{\omega}} = \omega_\alpha(x) dx^\alpha + \omega_i(x) \underline{\boldsymbol{\theta}}^i_R(g)$$

Ovviamente le 1–forme orizzontali $\underline{\boldsymbol{\omega}} \in \boldsymbol{\Omega}^1_H(P)$ sono invarianti per le moltiplicazioni a destra $\bar{R}_\gamma$, ma ci sono 1–forme invarianti che non sono orizzontali.

**Esempio 5.6.** [1–forme invarianti su $L(M)$]

Scegliendo di lavorare con sistemi di coordinate fibrate naturali $(x^\alpha, e^\beta_k)$ su un aperto $(\lambda_M)^{-1}(U)$, definiamo i coefficienti $\theta^a_\alpha$ come le componenti della matrice inversa della matrice $(e^\beta_b)$: cioè tali che

$$\theta^a_\sigma\, e^\sigma_b = \delta^a_b \qquad \text{e} \qquad e^\beta_k \theta^k_\alpha = \delta^\beta_\alpha$$

Una 1–forma $\underline{\boldsymbol{\omega}} \in \boldsymbol{\Omega}^1(L(M))$ avrà un'espressione del tipo

$$\underline{\boldsymbol{\omega}} \;\; = \;\; \omega_\beta(x,e) dx^\beta + \tilde{\omega}^k_\beta(x,e)\, de^\beta_k$$

$$
\begin{aligned}
&= \omega_\beta(x,e)dx^\beta + \tilde{\omega}^k_\beta(x,e)\, e^\beta_i\, (\underline{\boldsymbol{\theta}}_L)^i_k \\
&= \omega_\beta(x,e)dx^\beta + \tilde{\omega}^k_\beta(x,e)\, e^\alpha_k\, (\underline{\boldsymbol{\theta}}_R)^\beta_\alpha
\end{aligned}
$$

dove abbiamo utilizzato 1–forme locali

$$
(\underline{\boldsymbol{\theta}}_R)^\beta_\alpha = \theta^i_\alpha\, de^\beta_i \qquad (\underline{\boldsymbol{\theta}}_R = de \otimes e^{-1}) \tag{35}
$$

e le 1–forme locali

$$
(\underline{\boldsymbol{\theta}}_L)^i_k = \theta^i_\alpha\, de^\alpha_k \qquad (\underline{\boldsymbol{\theta}}_L = e^{-1} \otimes de)\,. \tag{36}
$$

La 1–forma $\underline{\boldsymbol{\omega}}$ è invariante per le moltiplicazioni a destra $\bar{R}_g$ se e solo se

$$
\underline{\boldsymbol{\omega}} = \omega_\beta(x)dx^\beta + \tilde{\omega}^\alpha_\beta(x)\,(\underline{\boldsymbol{\theta}}_R(e))^\beta_\alpha = \omega_\beta(x)dx^\beta + \tilde{\omega}^\alpha_\beta(x)\,\theta^i_\alpha\, de^\beta_i
$$

#### 5.1.3 Connessioni principali sui fibrati principali

Una connessione su un fibrato principale $(P, M, \pi)$ con gruppo di struttura $G$ è una *connessione principale* se la distribuzione $H(P) = \cup_{p\in P} H_p(P)$ dei sottospazi orizzontali è invariante sotto l'azione di tutte le moltiplicazioni a destra $\bar{R}_g$

$$
\forall g \in G \quad T(\bar{R}_g)(H(P)) = H(P) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall g \in G, \forall p \in P \quad T(\bar{R}_g)(H_p(P)) = H_{p\cdot g}(P)
$$

Usando una trivializzazione locale $\psi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times G$, campi di vettori $\vec{D}_\alpha = \partial_\alpha - \Gamma^i_\alpha(x,y)\partial_i \in H_p$, che sono una base per i vettori orizzontali in $H_p$ si possono sempre riscrivere come

$$\vec{D}_\alpha = \partial_\alpha - \tilde{\Gamma}^k_\alpha(x,g)\,\vec{\boldsymbol{\rho}}_k(g)$$

Affinché una connessione sia una connessione principale è necessario e sufficiente che per ogni $\gamma \in G$ deve essere $(\bar{R}_\gamma)_*(\vec{D}_\alpha) = \vec{D}_\alpha$ e, quindi, i coefficienti $\tilde{\Gamma}^i_\alpha(x,g)$ devono essere indipendenti dal punto $g \in G$. Cioè, deve essere

$$\vec{D}_\alpha = \partial_\alpha - A^k_\alpha(x)\,\vec{\boldsymbol{\rho}}_k(g)$$

I coefficienti $A^k_\alpha(x)$ sono le *componenti* della connessione principale (rispetto alla base locale $\vec{\boldsymbol{\rho}}_k(g)$ che dipende dalla trivializzazione $\psi$).

Per ogni campo di vettori $\vec{\xi} \in \mathfrak{X}(M)$ il sollevamento orizzontale $\vec{\xi}_{_H} \in \mathfrak{X}_H(P)$ di $\vec{\xi}$ è il campo di vettori proiettabile

$$\xi^\mu(x)\,\vec{D}_\mu = \xi^\mu(x)\Big(\partial_\mu - A^k_\mu(x)\,\vec{\boldsymbol{\rho}}_k(g)\Big)$$

che è invariante per le moltiplicazioni a destra $\bar{R}_\gamma$. I coefficienti $A^k_\mu(x)$ non sono le componenti di un tensore, ma le differenze di connessioni principali sono 1–forme orizzontali a valori in $V(P)$. Cioè: le differenze di connessioni principali sono elementi di $\mathfrak{X}_V(P) \otimes \boldsymbol{\Omega}^1_H(P)$.

Il tensore di curvatura della connessione $A^i_\mu$ si ottiene calcolando i commutatori

$$\Big[\vec{D}_\mu, \vec{D}_\nu\Big] \;=\; \Big[\partial_\mu - A^i_\mu(x)\,\vec{\boldsymbol{\rho}}_i(g), \partial_\nu - A^j_\nu(x)\,\vec{\boldsymbol{\rho}}_j(g)\Big]$$

$$
\begin{aligned}
&= [\partial_\mu, \partial_\nu] - (\partial_\mu A^j_\nu(x))\,\vec{\boldsymbol{\rho}}_j(g) + (\partial_\nu A^i_\mu(x))\,\vec{\boldsymbol{\rho}}_i(g) + A^i_\mu(x)\,A^j_\nu(x)\ \left[\vec{\boldsymbol{\rho}}_i(g), \vec{\boldsymbol{\rho}}_j(g)\right] \\
&= -(\partial_\mu A^k_\nu(x) - \partial_\nu A^k_\mu(x))\vec{\boldsymbol{\rho}}_k(g) - A^i_\mu(x)\,A^j_\nu(x) c^k_{ij}\vec{\boldsymbol{\rho}}_k(g) \\
&= -\left(\partial_\mu A^k_\nu(x) - \partial_\nu A^k_\mu(x) + c^k_{ij} A^i_\mu(x)\,A^j_\nu(x)\right)\vec{\boldsymbol{\rho}}_k(g) \\
&= -F^k_{\mu\nu}(x)\,\vec{\boldsymbol{\rho}}_k(g)
\end{aligned}
$$

Il tensore di curvatura, che è anch'esso invariante per le moltiplicazioni a destra $\bar{R}_\gamma$, ha come componenti i coefficienti

$$F^k_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A^k_\nu(x) - \partial_\nu A^k_\mu(x) + c^k_{ij} A^i_\mu(x)\,A^j_\nu(x)$$

che sono le componenti di una 2–forma orizzontale a valori in $V(P)$. Cioè, si ha:

$$\underline{\boldsymbol{F}}(x,g) = \tfrac{1}{2} F^k_{\mu\nu}(x)\,dx^\mu \wedge dx^\nu \otimes \vec{\boldsymbol{\rho}}_k(g)$$

La base anolonoma $(\vec{D}_\mu, \vec{\boldsymbol{\rho}}_k(g))$ di $\mathfrak{X}(P)$ ha come base duale la base $(dx^\alpha, \underline{\boldsymbol{\omega}}^i)$ di $\boldsymbol{\Omega}^1(P)$ dove le 1–forme $\underline{\boldsymbol{\omega}}^i$ sono definite da

$$\underline{\boldsymbol{\omega}}^i = A^i_\alpha(x) dx^\alpha + \underline{\boldsymbol{\theta}}^i_R(g)$$

I differenziali $d\underline{\boldsymbol{\omega}}^i$ sono

$$
\begin{aligned}
d\underline{\boldsymbol{\omega}}^i &= dA^i_\alpha(x) \wedge dx^\alpha + d\underline{\boldsymbol{\theta}}^i_R(g) \\
&= \partial_\mu A^i_\nu(x) dx^\mu \wedge dx^\nu + \tfrac{1}{2} c^i_{rs}\,\underline{\boldsymbol{\theta}}^r_R(g) \wedge \underline{\boldsymbol{\theta}}^s_R(g) \\
&= \tfrac{1}{2}\Big(\partial_\mu A^i_\nu(x) - \partial_\nu A^i_\nu(x)\Big) dx^\mu \wedge dx^\nu + \tfrac{1}{2} c^i_{rs}\left(\underline{\boldsymbol{\omega}}^r - A^r_\mu(x) dx^\mu\right) \wedge \left(\underline{\boldsymbol{\omega}}^s - A^s_\nu(x) dx^\nu\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \tfrac{1}{2}\Big(\partial_\mu A^i_\nu(x) - \partial_\nu A^i_\mu(x) + c^i_{rs} A^r_\mu(x) A^s_\nu(x)\Big) dx^\mu \wedge dx^\nu \\
&\quad -c^i_{rs}\,\underline{\boldsymbol{\omega}}^r \wedge A^s_\nu(x) dx^\nu + \tfrac{1}{2} c^i_{rs}\,\underline{\boldsymbol{\omega}}^r \wedge \underline{\boldsymbol{\omega}}^s \\
&= \tfrac{1}{2} F^i_{\mu\nu}(x)\, dx^\mu \wedge dx^\nu - c^i_{rs}\,\underline{\boldsymbol{\omega}}^r \wedge A^s_\nu(x) dx^\nu + \tfrac{1}{2} c^i_{rs}\,\underline{\boldsymbol{\omega}}^r \wedge \underline{\boldsymbol{\omega}}^s
\end{aligned}
$$

La parte orizzontale dei differenziali $d\underline{\boldsymbol{\omega}}^i$ ci danno le 2–forme di curvatura

$$
\underline{\boldsymbol{F}}^i(x) = \tfrac{1}{2} F^i_{\mu\nu}(x)\, dx^\mu \wedge dx^\nu
$$

**Esempio 5.7.** [Connessioni principali sui fibrati $L(M)$]

Data una connessione lineare sul fibrato tangente $T(M)$ di una varietà $M$, i campi orizzontali definiti nel paragrafo 11.3 di [8] permettono di costruire un campo orizzontale sul fibrato $L(M)$. Lavorando con sistemi di coordinate fibrate naturali $(x^\alpha, e^\beta_k)$ su un aperto $(\lambda_M)^{-1}(U)$, la base $\vec{D}_\mu$ per i vettori orizzontali in un punto di coordinate $(x^\alpha, e^\beta_k)$ è definita da:

$$
\vec{D}_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \Gamma^\alpha{}_{\beta\mu}(x) e^\beta_k \frac{\partial}{\partial e^\alpha_k} = \vec{\partial}_\mu - \Gamma^\alpha{}_{\beta\mu}(x) \vec{\boldsymbol{\rho}}^\beta_\alpha(e) \tag{37}
$$

Le 1–forme $\underline{\boldsymbol{\omega}}^\alpha_\beta$ della base duale sono, quindi, definite da

$$
\underline{\boldsymbol{\omega}}^\alpha_\beta = \big(\underline{\boldsymbol{\theta}}_R(e)\big)^\alpha_\beta + \Gamma^\alpha{}_{\beta\mu}(x) dx^\mu = \theta^i_\beta\, de^\alpha_i + \Gamma^\alpha{}_{\beta\mu}(x) dx^\mu \tag{38}
$$

Calcolando i commutatori $\left[\vec{D}_\mu, \vec{D}_\nu\right]$ si ottiene

$$
\left[\vec{D}_\mu, \vec{D}_\nu\right] = -R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}(x) \vec{\boldsymbol{\rho}}^\beta_\alpha(e) \tag{39}
$$

mentre dai differenziali delle forme $\underline{\boldsymbol{\omega}}^{\alpha}_{\beta}$ si ottongono le 2–forme di curvatura

$$\underline{\boldsymbol{\Omega}}^{\alpha}_{\beta} = d\,\underline{\boldsymbol{\omega}}^{\alpha}_{\beta} + \underline{\boldsymbol{\omega}}^{\alpha}_{\sigma} \wedge \underline{\boldsymbol{\omega}}^{\sigma}_{\beta} = \tfrac{1}{2} R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}(x)\, dx^{\mu} \wedge dx^{\nu} \tag{40}$$

## 6 Fibrati associati a fibrati principali

Dato un fibrato principale $(P, M, \pi, G)$ consideriamo un'azione a sinistra

$$\rho : G \times Y \longrightarrow Y$$

del gruppo di Lie $G$ su una varietà $Y$. Con l'azione $\rho$ possiamo definire un'azione a destra

$$\begin{array}{rcccc} \tilde{\rho} & : & (P \times Y) \times G & \longrightarrow & (P \times Y) \\ & & ((p, y), g) & \longmapsto & (p \cdot g, \rho(g^{-1}, y)) \end{array}$$

sulla varietà prodotto $P \times Y$. L'azione a destra $\tilde{\rho}$ è libera ed ammette varietà quoziente

$$P \times_{\rho} Y := (P \times Y)/G$$

che ha una struttura naturale di fibrato su $M$ con fibra tipo $Y$. Il fibrato $P \times_{\rho} Y$ viene detto *fibrato associato* al fibrato principale $P$ attraverso l'azione $\tilde{\rho}$.

**Dimostrazione.**

Se consideriamo una trivializzazione locale $\psi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times G$

$$\begin{array}{rcccc} \psi & : & \pi^{-1}(U) & \longrightarrow & U \times G \\ & & p & \longmapsto & (\pi(p), \gamma) \end{array}$$

su di un aperto $U \subseteq M$, possiamo rappresentare l'azione $\tilde{\rho}$ come segue

$$\begin{array}{rcccc} \tilde{\rho} & : & ((U \times G) \times Y) \times G & \longrightarrow & (U \times G) \times Y \\ & & (((x, \gamma), y), g) & \longmapsto & ((x, \gamma \cdot g), \rho(g^{-1}, y)) \end{array}$$

Consideriamo ora la funzione $\tilde{\pi}_\rho : (U \times G) \times Y \longrightarrow U \times Y$ definita da

$$\tilde{\pi}_\rho : ((x, \gamma), y) \longmapsto (x, \tilde{y} = \rho(\gamma, y))$$

La funzione $\tilde{\pi}_\rho$, che è suriettiva con mappa tangente suriettiva, è manifestamente costante sulle orbite dell'azione $\tilde{\rho}$ che coincidono con le fibre della proiezione $\tilde{\pi}_\rho$. Inoltre, le coppie $(x, \tilde{y})$ costituiscono una trivializzazione locale del fibrato $\pi_\rho : P \times_\rho Y \longrightarrow M$.

■

**Esempio 6.1.** [fibrato banale]

Se l'azione a sinistra $\rho : G \times Y \longrightarrow Y$ è l'azione banale $\rho : (g, y) \longmapsto y$ allora il fibrato $\pi_\rho : P \times_\rho Y \longrightarrow M$ è il fibrato banale $\mathrm{pr}_1 : M \times Y \longrightarrow M$.

**Esempio 6.2.** [fibrato vettoriale]

Se la varietà $Y$ è uno spazio vettoriale di dimensione finita e l'azione a sinistra $\rho : G \times Y \longrightarrow Y$ è una rappresentazione lineare allora il fibrato $\pi_\rho : P \times_\rho Y \longrightarrow M$ ha una struttura naturale di fibrato vettoriale su $M$.

**Esempio 6.3.** [fibrato affine]

Se la varietà $Y$ è uno spazio affine di dimensione finita e l'azione a sinistra $\rho : G \times Y \longrightarrow Y$ è una rappresentazione affine allora il fibrato $\pi_\rho : P \times_\rho Y \longrightarrow M$ ha una struttura naturale di fibrato affine su $M$.

**Esempio 6.4.** [fibrato principale]

Se $Y = G$ e l'azione a sinistra $\rho : G \times Y \longrightarrow Y$ è la moltiplicazione a sinistra allora il fibrato $\pi_\rho : P \times_\rho Y \longrightarrow M$ ha una struttura naturale di fibrato principale su $M$ che è isomorfa a quella del fibrato principale $P$.

**Esempio 6.5.** [fibrato di gruppi di Lie]

Se $Y = G$ e l'azione a sinistra $\rho : G \times Y \longrightarrow Y$ è la rappresentazione aggiunta $\rho : (g, y) \longmapsto \mathrm{Ad}_g(y)$ allora le fibre del fibrato $\pi_\rho : P \times_\rho Y \longrightarrow M$ hanno una struttura naturale di gruppo di Lie isomorfa a quella di $G$ e si ha una struttura di fibrato di gruppi di Lie su $M$.

**Esempio 6.6.** [fibrato di algebre di Lie]

Se $Y = \mathfrak{g}$ e l'azione a sinistra $\rho : G \times Y \longrightarrow Y$ è la rappresentazione aggiunta $\rho : (g, y) \longmapsto \mathrm{ad}_g(y)$ allora le fibre del fibrato $\pi_\rho : P \times_\rho Y \longrightarrow M$ hanno una struttura naturale di algebra di Lie isomorfa a quella dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ di $G$ e si ha una struttura di fibrato di algebre di Lie su $M$.

**FINE LEZIONE 17 MMdFC (2023-04-26 ore 16:00 – 18:00)**

**Esempio 6.7.** [fibrato degli scalari]

Se $P = L(M)$, se $Y = \mathbb{R}$ e se l'azione $\rho$ è l'azione banale

$$\begin{array}{rcccl} \rho & : & GL(m;\mathbb{R}) \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (g,s) & \longmapsto & s \end{array}$$

allora il fibrato $\pi_\rho : P \times_\rho Y \longrightarrow M$ ha una struttura naturale di fibrato vettoriale su $M$ che è isomorfa a quella del fibrato banale $\mathrm{pr}_1 : M \times \mathbb{R} \longrightarrow M$.

**Esempio 6.8.** [fibrato tangente]

Se $P = L(M)$, se $Y = \mathbb{R}^m$ e se l'azione $\rho$ è l'azione naturale a sinistra

$$\begin{array}{rcccl} \rho & : & GL(m;\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^m & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & & (g,v) & \longmapsto & g(v) \end{array}$$

allora il fibrato $\pi_\rho : P \times_\rho Y \longrightarrow M$ ha una struttura naturale di fibrato vettoriale su $M$ che è isomorfa a quella del fibrato tangente $\tau_M : T(M) \longrightarrow M$.

Basta infatti considerare la proiezione

$$\begin{array}{rcccl} \pi & : & L(M) \times \mathbb{R}^m & \longrightarrow & T(M) \\ & & ((x^\alpha, e_i^\beta), v^j) & \longmapsto & (x^\alpha, e_k^\beta v^k) \end{array}$$

che è invariante rispetto all'azione $(L(M) \times \mathbb{R}^m) \times GL(m;\mathbb{R}) \longrightarrow L(M) \times \mathbb{R}^m$.

**Esempio 6.9.** [fibrato cotangente]

Se $P = L(M)$, se $Y = (\mathbb{R}^m)^*$ e se l'azione $\rho$ è l'azione naturale a sinistra

$$\begin{array}{rccc} \rho \ : & GL(m;\mathbb{R}) \times (\mathbb{R}^m)^* & \longrightarrow & (\mathbb{R}^m)^* \\ & (g,\omega) & \longmapsto & \omega \circ (g^{-1}) \end{array}$$

allora il fibrato $\pi_\rho : P \times_\rho Y \longrightarrow M$ ha una struttura naturale di fibrato vettoriale su $M$ che è isomorfa a quella del fibrato cotangente $\pi_M : T^*(M) \longrightarrow M$.

Basta infatti considerare la proiezione

$$\begin{array}{rccc} \pi \ : & L(M) \times (\mathbb{R}^m)^* & \longrightarrow & T^*(M) \\ & ((x^\alpha, e_i^\beta), \omega_j) & \longmapsto & (x^\alpha, \omega_k \theta^k_\beta) \end{array}$$

che è invariante rispetto all'azione $(L(M) \times (\mathbb{R}^m)^*) \times GL(m;\mathbb{R}) \longrightarrow L(M) \times (\mathbb{R}^m)^*$.

**Esempio 6.10.** [fibrati di tensori]

Se $P = L(M)$, se $Y = T^p_q(\mathbb{R}^m) \equiv L((\mathbb{R}^m)^{\otimes q}; (\mathbb{R}^m)^{\otimes p})$ e se l'azione $\rho$ è l'azione naturale a sinistra

$$\begin{array}{rccc} \rho \ : & GL(m;\mathbb{R}) \times T^p_q(\mathbb{R}^m) & \longrightarrow & T^p_q(\mathbb{R}^m) \\ & (g,t) & \longmapsto & (g)^{\otimes p} \circ t \circ (g^{-1})^{\otimes q} \end{array}$$

allora il fibrato $\pi_\rho : P \times_\rho Y \longrightarrow M$ ha una struttura naturale di fibrato vettoriale su $M$ che è isomorfa a quella del fibrato cotangente $\pi : T^p_q(M) \longrightarrow M$.

Basta infatti considerare la proiezione

$$\begin{array}{rcl} \pi \; : \; L(M) \times T^p_q(\mathbb{R}^m) & \longrightarrow & T^p_q(M) \\ ((x,e),t) & \longmapsto & \left(x, \left(e\right)^{\otimes p} \circ t \circ \left(e^{-1}\right)^{\otimes q}\right) \end{array}$$

che è invariante rispetto all'azione $(L(M) \times T^p_q(\mathbb{R}^m) \times GL(m;\mathbb{R}) \longrightarrow L(M) \times T^p_q(\mathbb{R}^m)$.

**Esempio 6.11.** [fibrati di densità tensoriali]

Se $P = L(M)$, se $Y = T^p_q(\mathbb{R}^m) \equiv L((\mathbb{R}^m)^{\otimes q}; (\mathbb{R}^m)^{\otimes p})$ e se l'azione $\rho$ è l'azione "naturale" a sinistra

$$\begin{array}{rcl} \rho \; : \; GL(m;\mathbb{R}) \times T^p_q(\mathbb{R}^m) & \longrightarrow & T^p_q(\mathbb{R}^m) \\ (g,t) & \longmapsto & (\det(g)^{-w}) \left(g\right)^{\otimes p} \circ t \circ \left(g^{-1}\right)^{\otimes q} \end{array}$$

allora il fibrato associato $\pi_\rho : P \times_\rho Y \longrightarrow M$ ha una struttura naturale di fibrato vettoriale $\overset{(w)}{D}T^p_q(M) \longrightarrow M$ che viene detto *fibrato delle densità tensoriali $p$ volte controvarianti, $q$ volte covarianti e di peso $w$.* Ovviamente si ha $\overset{(0)}{D}T^p_q(M) \equiv T^p_q(M)$.

Si dimostra facilmente che

- il prodotto tensoriale fibrato $\overset{(w)}{D}T^p_q(M) \otimes_M \overset{(z)}{D}T^r_s(M)$ è isomorfo al fibrato $\overset{(w+z)}{D}T^{p+r}_{q+s}(M)$;
- il fibrato duale del fibrato $\overset{(w)}{D}T^p_q(M)$ è il fibrato $\overset{(-w)}{D}T^q_p(M)$;
- i simboli di Levi–Civita $\varepsilon_{i_1 \dots i_m}$ sono le componenti di una densità tensoriale $m$ volte covariante, antisimmetrica e di peso $-1$;

- i simboli di Levi–Civita $\varepsilon^{i_1 \dots i_m}$ sono le componenti di una densità tensoriale $m$ volte controvariante, antisimmetrica e di peso 1

- il determinante $\det(t_{ij}(x))$ della matrice delle componenti di un campo di tensori due volte covariante $t = t_{ij}(x) dx^i \otimes dx^j$ è una densità scalare di peso 2 e che $\sqrt{|\det(t_{ij}(x))|}$ è una densità scalare di peso 1;

- il determinante $\det(t^{ij}(x))$ della matrice delle componenti di un campo di tensori due volte controvariante $t = t^{ij}(x) \partial_i \otimes \partial_j$ è una densità scalare di peso $-2$ e che $\sqrt{|\det(t^{ij}(x))|}$ è una densità scalare di peso $-1$.

Quando $p = 1$ e $q = 0$ avremo il fibrato delle *densità vettoriali* di peso $w$; $p = 0$ e $q = 0$ avremo il fibrato delle *densità scalari* di peso $w$.

**Osservazione 6.1.** [Densità tensoriali]

Le densità tensoriali su una varietà $M$ sono definite come sezioni di certi fibrati vettoriali associati al fibrato delle basi $L(M)$. Le azioni $\rho$ che producono rappresentazioni lineari del gruppo di Lie $GL(m;\mathbb{R})$, su spazi vettoriali del tipo $T^p_q(\mathbb{R}^m)$, che differiscono da quelle solite per il prodotto di una potenza del determinante $\det(g)$ dell'elemento $g \in GL(m;\mathbb{R})$:

$$\begin{array}{rcl} \rho \ : \ GL(m;\mathbb{R}) \times T^p_q(\mathbb{R}^m) & \longrightarrow & T^p_q(\mathbb{R}^m) \\ (g^r_k, t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}) & \longmapsto & (\det(g)^{-w})\, g^{r_1}_{i_1} \cdots g^{r_p}_{i_p}\, t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}\, \bar{g}^{j_1}_{s_1} \cdots \bar{g}^{j_q}_{s_q} \end{array}$$

Il fibrato associato $L(M) \times_\rho T^p_q(\mathbb{R}^m)$ è il fibrato vettoriale su $M$ le cui sezioni sono le densità tensoriali $p$-volte controvarianti, $q$-volte covarianti di peso $w$. Quando $p = 1$ e $q = 0$ le chiameremo densità vettoriali di peso $w$; $p = 0$ e $q = 0$ le chiameremo densità scalari di peso $w$.

### 6.1 Connessioni indotte sui fibrati associati

Consideriamo un fibrato $\pi_\rho : P \times_\rho Y \longrightarrow M$ e scegliamo una connessione principale sul fibrato principale $P$. Scelta una trivializzazione locale $\psi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times G$ sul dominio $U$ di una carta $(U, x^1, \dots, x^m)$ di $M$, consideriamo la base

$$\vec{D}_\alpha = \partial_\alpha - A^k_\alpha(x)\, \vec{\boldsymbol{\rho}}_k(g)$$

per i campi di vettori orizzontali sul fibrato $P$. I campi di vettori $\vec{D}_\alpha$ possono essere estesi a campi vettoriali $\vec{D}'_\alpha$ sul prodotto cartesiano $(U \times G) \times Y$ aggiungendo ad essi il campo di vettori $\vec{\mathbf{0}} \in \mathfrak{X}(Y)$

$$\vec{D}'_\alpha = \partial_\alpha - A^k_\alpha(x)\, \vec{\boldsymbol{\rho}}_k(g) + \vec{\mathbf{0}}$$

Si può dimostrare che i campi di vettori $\vec{D}'_\alpha$ così definiti si proiettano su campi di vettori $\vec{D}''_\alpha$ sulla varietà quoziente $P \times_\rho Y$

**Dimostrazione.**

Per prima cosa osserviamo che si ha

$$\tilde{y} = \rho(g, y) = \bar{L}'_g(y) = \bar{R}'_y(g)$$

e che

$$\bar{R}'_y(R_g(\gamma)) = \bar{R}'_y(\gamma \cdot g) = \rho((\gamma \cdot g), y) = \rho(\gamma, \rho(g, y)) = \bar{R}'_{\rho(g,y)}(\gamma) = \bar{R}'_{\tilde{y}}(\gamma)$$

Da queste identità si deduce che se consideriamo il diffeomorfismo

$$\begin{array}{cccc} \chi \ : & U \times G \times Y & \longrightarrow & U \times G \times Y \\ & (x, g, y) & \longmapsto & (x, g, \tilde{y}) \end{array}$$

si ha

$$\chi_*(\vec{D}'_\alpha) = \partial_\alpha - A^k_\alpha(x)\, \vec{\boldsymbol{\rho}}_k(g) - A^k_\alpha(x) \Big( (\vec{\boldsymbol{e}}_k)_Y(\tilde{y}) \Big)$$

dove ricordiamo che $\vec{\boldsymbol{\rho}}_k(g) = (T_1(R_g))(\vec{\boldsymbol{e}}_k)$ e che $(\vec{\boldsymbol{e}}_k)_Y(\tilde{y}) = (T_1(\bar{R}'_{\tilde{y}}))(\vec{\boldsymbol{e}}_k)$, essendo $(\vec{\boldsymbol{e}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{e}}_n) \in \mathcal{B}(T_1(G))$.

Il campo $\chi_*(\vec{D}'_\alpha) \in \mathfrak{X}(U \times G \times Y)$ si proietta sul campo $\vec{D}''_\alpha \in \mathfrak{X}(U \times Y)$ definito da:

$$\vec{D}''_\alpha = \partial_\alpha - A^k_\alpha(x) \Big( (e_k)_Y(\tilde{y}) \Big)$$

e questo conclude la dimostrazione.

■

**Esempio 6.12.** [connessioni indotte sul fibrato tangente]

Consideriamo l'azione a sinistra

$$\begin{array}{cccc} \rho \ : & GL(m;\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^m & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & (g, v) & \longmapsto & g(v) \end{array}$$

che ci permette di ottenere il fibrato tangente $T(M)$ come fibrato associato $L(M)\times_\rho \mathbb{R}^m$.

Per ogni connessione principale sul fibrato $L(M)$, sappiamo che, in un sistema di cordinate fibrate naturali $(x^\alpha, e^\beta_b)$, la connessione ha i sottospazi orizzontali generati da campi di vettori del tipo

$$\vec{D}_\mu = \partial_\mu - \Gamma^\alpha_{\beta\mu}(x)\vec{\boldsymbol{\rho}}^\beta_\alpha = \partial_\mu - \Gamma^\alpha_{\beta\mu}(x)e^\beta_s\,\vec{\partial}^{\,s}_{\ \alpha} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \Gamma^\alpha_{\beta\mu}(x)e^\beta_s\frac{\partial}{\partial e^\alpha_s}$$

dove i coefficienti $\Gamma^\alpha_{\beta\mu}(x)$ sono le componenti di una connessione lineare sul fibrato tangente $T(M)$.

La trasformazione di coordinate

$$\begin{array}{rccc} \chi \ : & L(M)\times\mathbb{R}^m & \longrightarrow & L(M)\times\mathbb{R}^m \\ & ((x^\alpha, e^\beta_i), v^j) & \longmapsto & ((x^\alpha, e^\beta_i), \tilde{v}^\beta)\,, \end{array}$$

dove si è posto $\tilde{v}^\beta = e^\beta_k v^k$ ci permette di dedurre immediatamente che

$$\vec{D}_\mu(\tilde{v}^\sigma) = -\Gamma^\alpha_{\beta\mu}(x)e^\beta_s\frac{\partial\left(e^\sigma_k v^k\right)}{\partial e^\alpha_s} = -\Gamma^\alpha_{\beta\mu}(x)e^\beta_s\delta^\sigma_\alpha\delta^s_k v^k = -\Gamma^\sigma_{\beta\mu}(x)e^\beta_s v^s = -\Gamma^\sigma_{\beta\mu}(x)\tilde{v}^\beta$$

e che si ha

$$\vec{D}'_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \Gamma^\alpha_{\beta\mu}(x)e^\beta_s\frac{\partial}{\partial e^\alpha_s} - \Gamma^\sigma_{\beta\mu}(x)\tilde{v}^\beta\frac{\partial}{\partial\tilde{v}^\sigma}$$

e che

$$\vec{D}''_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \Gamma^\sigma_{\beta\mu}(x)\tilde{v}^\beta\frac{\partial}{\partial\tilde{v}^\sigma}$$

**Esempio 6.13.** [connessioni indotte sul fibrato cotangente]

Consideriamo l'azione a sinistra

$$\begin{array}{rccc} \rho \ : & GL(m;\mathbb{R}) \times (\mathbb{R}^m)^* & \longrightarrow & (\mathbb{R}^m)^* \\ & (g,\omega) & \longmapsto & \omega \circ g^{-1} \end{array}$$

che ci permette di ottenere il fibrato tangente $T(M)$ come fibrato associato $L(M) \times_\rho \mathbb{R}^m$.

La trasformazione di coordinate

$$\begin{array}{rccc} \chi \ : & L(M) \times (\mathbb{R}^m)^* & \longrightarrow & L(M) \times (\mathbb{R}^m)^* \\ & ((x^\alpha, e^\beta_i), \omega_j) & \longmapsto & ((x^\alpha, e^\beta_i), \tilde{\omega}_\beta)\,, \end{array}$$

dove si è posto $\tilde{\omega}_\beta = \omega_k \theta^k_\beta$ ci permette di dedurre immediatamente che

$$\vec{D}_\mu(\tilde{\omega}_\sigma) = -\Gamma^\alpha_{\beta\mu}(x) e^\beta_s \frac{\partial\,(\omega_k \theta^k_\sigma)}{\partial e^\alpha_s} = \Gamma^\alpha_{\beta\mu}(x) e^\beta_s \theta^k_\lambda \delta^\lambda_\alpha \delta^s_i \theta^i_\sigma \omega_k = \Gamma^\lambda_{\beta\mu}(x) e^\beta_s \theta^k_\lambda \delta^s_i \theta^i_\sigma \omega_k = \Gamma^\lambda_{\sigma\mu}(x) \tilde{\omega}_\lambda$$

e che si ha

$$\vec{D}'_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \Gamma^\alpha_{\beta\mu}(x) e^\beta_s \frac{\partial}{\partial e^\alpha_s} + \Gamma^\lambda_{\sigma\mu}(x) \tilde{\omega}_\lambda \frac{\partial}{\partial \tilde{\omega}_\sigma}$$

e che

$$\vec{D}''_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \Gamma^\lambda_{\sigma\mu}(x) \tilde{\omega}_\lambda \frac{\partial}{\partial \tilde{\omega}_\sigma}$$

**Esempio 6.14.** [connessioni indotte sui fibrati di densità scalari]

Consideriamo l'azione a sinistra

$$\begin{array}{rccc} \rho \ : & GL(m;\mathbb{R}) \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (g, X) & \longmapsto & (\det(g)^{-w})\, X \end{array}$$

che ci permette di ottenere il fibrato $\overset{(w)}{DS}(M)$ delle densità scalari di peso $w$ come fibrato associato $L(M) \times_\rho \mathbb{R}$.

La trasformazione di coordinate

$$\begin{array}{rccc} \chi \ : & L(M) \times \mathbb{R} & \longrightarrow & L(M) \times \mathbb{R} \\ & ((x^\alpha, e_i^\beta), X) & \longmapsto & ((x^\alpha, e_i^\beta), \tilde{X})\,, \end{array}$$

dove si è posto $\tilde{X} = \det(e_a^\alpha)^{-w} X = \det(\theta_\alpha^a)^w X$ ci permette di dedurre immediatamente che

$$\vec{D}_\mu(\tilde{X}) = -\Gamma^\alpha_{\beta\mu}(x) e_s^\beta \frac{\partial\left(\det(e_r^\sigma)^{-w} X\right)}{\partial e_s^\alpha} = +w\Gamma^\alpha_{\beta\mu}(x) e_s^\beta \det(e_r^\sigma)^{-w} \theta_\alpha^s X = +w\Gamma^\alpha_{\alpha\mu}(x)\tilde{X}$$

e che si ha

$$\vec{D}'_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \Gamma^\alpha_{\beta\mu}(x) e_s^\beta \frac{\partial}{\partial e_s^\alpha} + w\Gamma^\alpha_{\alpha\mu}(x)\tilde{X}\frac{\partial}{\partial \tilde{X}}$$

e che

$$\vec{D}''_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} + w\Gamma^\alpha_{\alpha\mu}(x)\tilde{X}\frac{\partial}{\partial \tilde{X}}$$

**Osservazione 6.2.** [Densità scalari]

Per le densità scalari di peso $w$, l'azione a sinistra su $\mathbb{R}$ è

$$\begin{array}{rcl} \rho \ : \ GL(m;\mathbb{R}) \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (g^r_k, \omega) & \longmapsto & (\det(g)^{-w})\,\omega \end{array}$$

e l'azione a destra attraverso cui si costruisce il fibrato associato $L(M) \times_\rho \mathbb{R}$ è

$$\begin{array}{rcl} \rho \ : \ L(M) \times \mathbb{R} \times GL(m;\mathbb{R}) & \longrightarrow & L(M) \times \mathbb{R} \\ ((x^\alpha, e^\lambda_k, \omega), g^r_s) & \longmapsto & (x^\alpha, e^\lambda_k\, g^k_s, (\det(g)^w)\,\omega) \end{array}$$

La trasformazione di coordinate

$$(x^\alpha, e^\lambda_k, \omega) \longmapsto (x^\alpha, e^\lambda_k, \tilde{\omega} = \big(\det(e^\lambda_k)^{-w}\big)\,\omega)$$

su $L(M) \times \mathbb{R}$ ci permette di dire che le coordinate fibrate naturali su $L(M) \times_\rho \mathbb{R}$ sono $(x^\alpha, \tilde{\omega})$. Cambiando il sistema di coordinate su $M$ si ottiene una legge di trasformazione di coordinate fibrate naturali $(x, \tilde{\omega}) \longmapsto (x'(x), \tilde{\omega}'(x, \tilde{\omega}))$ dove

$$\tilde{\omega}' = \det\,(e')^{-w}\,\omega = \det\left(\frac{\partial x'}{\partial x} e\right)^{-w} \omega = \det\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)^{-w} \tilde{\omega} = \det\left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right)^{w} \tilde{\omega}$$

Un campo di vettori $\vec{\xi} \in \mathfrak{X}(M)$ induce il campo di vettori

$$L(\vec{\xi}) = \xi^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\nu} e^\nu_k \frac{\partial}{\partial e^\alpha_k}$$

che, a sua volta, induce il campo di vettori

$$\xi^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} - w\,\frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\nu} \tilde{\omega} \frac{\partial}{\partial \tilde{\omega}}$$

sul fibrato $L(M) \times_\rho \mathbb{R}$.

La derivata di Lie di una sezione $x \longmapsto \tilde{\omega}(x)$ è data da:

$$\pounds_{\vec{\xi}}(\tilde{\omega}) = \xi^\sigma \partial_\sigma \tilde{\omega} + w\, \tilde{\omega}\, \partial_\sigma \xi^\sigma$$

Una connessione lineare $\Gamma^\alpha_{\beta\mu}$ su $M$ induce una base per i campi di vettori orizzontali

$$\vec{D}_\mu = \partial_\mu - \Gamma^\alpha_{\beta\mu} e^\beta_k \partial^k_\alpha$$

di una connessione principale sul fibrato principale $L(M)$. I campi $\vec{D}_\mu$ inducono i campi di vettori

$$\vec{D}'_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} + w\, \Gamma^\alpha_{\alpha\mu} \tilde{\omega} \frac{\partial}{\partial \tilde{\omega}}$$

che sono una base per i vettori orizzontali della la connessione lineare indotta da $\Gamma$ sul fibrato vettoriale $L(M) \times_\rho \mathbb{R}$. La derivata covariante $\nabla_{\vec{\xi}} \tilde{\omega}$ di una sezione $\tilde{\omega}$ di $L(M) \times_\rho \mathbb{R}$ è

$$\nabla_{\vec{\xi}} \tilde{\omega} = \xi^\mu \nabla_\mu \tilde{\omega} = \xi^\mu (\partial_\mu \tilde{\omega} - w\, \Gamma^\alpha_{\alpha\mu} \tilde{\omega})$$

Su una varietà $M$ orientata, le densità scalari di peso 1 sono in corrispondenza biunivoca con le $m$–forme

$$\tilde{\omega}(x) \longmapsto \tilde{\omega}(x)\, ds(x)$$

(ovviamente, si devono utilizzare solo carte orientate positivamente).

Se consideriamo due densità scalari $\underline{\boldsymbol{\omega}}_1$, di peso $w_1$, e $\underline{\boldsymbol{\omega}}_2$, di peso $w_2$, allora il prodotto tensoriale $\underline{\boldsymbol{\omega}}_1 \otimes \underline{\boldsymbol{\omega}}_2$ è una densità scalare di peso $w_1 + w_2$. Siccome le densità scalari di peso 0 sono le funzioni

$f \in \mathfrak{F}(M)$, le densità scalari di peso $-w$ sono le sezioni del fibrato duale di quello le cui sezioni sono le densità scalari di peso $w$.

Per le derivate di Lie $\pounds_{\vec{\xi}}(\cdot)$ e per le derivate covarianti $\nabla_{\vec{\xi}}(\cdot)$ valgono le solite regole che valgono per le derivate di Lie e le derivate covarianti dei campi di tensori. In particolare delle regole di tipo Leibnitz:

$$\begin{aligned}
\pounds_{\vec{\xi}}(\underline{\boldsymbol{\omega}}_1 \otimes \underline{\boldsymbol{\omega}}_2) &= \pounds_{\vec{\xi}}(\underline{\boldsymbol{\omega}}_1) \otimes \underline{\boldsymbol{\omega}}_2 + \underline{\boldsymbol{\omega}}_1 \otimes \pounds_{\vec{\xi}}(\underline{\boldsymbol{\omega}}_2) \\
\nabla_{\vec{\xi}}(\underline{\boldsymbol{\omega}}_1 \otimes \underline{\boldsymbol{\omega}}_2) &= \nabla_{\vec{\xi}}(\underline{\boldsymbol{\omega}}_1) \otimes \underline{\boldsymbol{\omega}}_2 + \underline{\boldsymbol{\omega}}_1 \otimes \nabla_{\vec{\xi}}(\underline{\boldsymbol{\omega}}_2)
\end{aligned}$$

**Osservazione 6.3.** [Densità vettoriali]

Per le densità vettoriali di peso $w$, l'azione a sinistra su $\mathbb{R}^m$ è

$$\begin{array}{rccc}
\rho \ : & GL(m;\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^m & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\
& (g^r_k, \omega^i) & \longmapsto & (\det(g)^{-w})\, g^s_k\, \omega^k
\end{array}$$

e l'azione a destra attraverso cui si costruisce il fibrato associato $L(M) \times_\rho \mathbb{R}^m$ è

$$\begin{array}{rccc}
\rho \ : & L(M) \times \mathbb{R}^m \times GL(m;\mathbb{R}) & \longrightarrow & L(M) \times \mathbb{R}^m \\
& ((x^\alpha, e^\lambda_k, \omega^i), g^r_s) & \longmapsto & (x^\alpha, e^\lambda_k\, g^k_s, (\det(g)^{-w})\, \bar{g}^s_k\, \omega^k)
\end{array}$$

La trasformazione di coordinate

$$(x^\alpha, e^\lambda_k, \omega^i) \longmapsto (x^\alpha, e^\lambda_k, \tilde{\omega}^\alpha = \det(e^\lambda_k)^{-w}\, e^\alpha_k\, \omega^k)$$

su $L(M)\times\mathbb{R}^m$ ci permette di dire che le coordinate fibrate naturali su $L(M)\times_\rho\mathbb{R}^m$ sono $(x^\alpha,\tilde\omega^\beta)$. Cambiando il sistema di coordinate su $M$ si ottiene una legge di trasformazione di coordinate fibrate naturali $(x,\tilde\omega)\longmapsto(x'(x),\tilde\omega'(x,\tilde\omega))$ dove

$$\tilde\omega'=\det(e')^{-w}e'\,\omega=\det\left(\frac{\partial x'}{\partial x}e\right)^{-w}\frac{\partial x'}{\partial x}e\,\omega=\det\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)^{-w}\frac{\partial x'}{\partial x}\tilde\omega=\det\left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right)^{w}\frac{\partial x'}{\partial x}\tilde\omega$$

Un campo di vettori $\vec\xi\in\mathfrak{X}(M)$ induce il campo di vettori

$$L(\vec\xi)=\xi^\alpha\frac{\partial}{\partial x^\alpha}+\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\nu}e^\nu_k\frac{\partial}{\partial e^\alpha_k}$$

che, a sua volta, induce il campo di vettori

$$\xi^\alpha\frac{\partial}{\partial x^\alpha}+\frac{\partial\xi^\nu}{\partial x^\sigma}\tilde\omega^\sigma\frac{\partial}{\partial\tilde\omega^\nu}-w\,\frac{\partial\xi^\sigma}{\partial x^\sigma}\tilde\omega^\nu\frac{\partial}{\partial\tilde\omega^\nu}$$

sul fibrato $L(M)\times_\rho\mathbb{R}^m$.

La derivata di Lie di una sezione $x\longmapsto\tilde\omega(x)$ è data da:

$$\Big(\pounds_{\vec\xi}(\tilde\omega)\Big)^\nu=\pounds_{\vec\xi}\,\tilde\omega^\nu=\xi^\sigma\partial_\sigma\tilde\omega^\nu-\partial_\sigma\xi^\nu\tilde\omega^\sigma+w\,\tilde\omega^\nu\,\partial_\sigma\xi^\sigma$$

Data una connessione lineare $\Gamma^\alpha_{\beta\mu}$ su $M$ induce una base per i campi di vettori orizzontali

$$\vec D_\mu=\partial_\mu-\Gamma^\alpha_{\beta\mu}e^\beta_k\partial^k_\alpha$$

di una connessione principale sul fibrato principale $L(M)$. I campi $\vec D_\mu$ inducono i campi di vettori

$$\vec D'_\mu=\frac{\partial}{\partial x^\mu}-\Gamma^\alpha_{\beta\mu}\tilde\omega^\beta\frac{\partial}{\partial\tilde\omega^\alpha}+w\,\Gamma^\sigma_{\sigma\mu}\tilde\omega^\alpha\frac{\partial}{\partial\tilde\omega^\alpha}$$

che sono una base per i vettori orizzontali della la connessione lineare indotta da $\Gamma$ sul fibrato vettoriale $L(M) \times_\rho \mathbb{R}^m$. La derivata covariante $\nabla_{\vec{\xi}}\tilde{\omega}$ di una sezione $\tilde{\omega}$ di $L(M) \times_\rho \mathbb{R}^m$ è

$$(\nabla_{\vec{\xi}}\tilde{\omega})^\alpha = \xi^\mu \nabla_\mu \tilde{\omega}^\alpha = \xi^\mu \left(\partial_\mu \tilde{\omega}^\alpha + \Gamma^\alpha_{\beta\mu}\tilde{\omega}^\beta - w\,\Gamma^\sigma_{\sigma\mu}\tilde{\omega}^\alpha\right)$$

Per le densità vettoriali di peso 1, si ha

$$\nabla_\mu \tilde{\omega}^\mu = \partial_\mu \tilde{\omega}^\mu + \Gamma^\mu_{\beta\mu}\tilde{\omega}^\beta - \Gamma^\sigma_{\sigma\mu}\tilde{\omega}^\mu = \partial_\mu \tilde{\omega}^\mu - T^\sigma_{\sigma\nu}\tilde{\omega}^\nu$$

In particolare, se la traccia $T^\sigma_{\sigma\nu}$ della torsione della connessione $\Gamma^\alpha_{\beta\mu}$ si annulla otteniamo

$$\nabla_\mu \tilde{\omega}^\mu = \partial_\mu \tilde{\omega}^\mu$$

Questo è sempre il caso per le connessioni simmetriche.

Su una varietà $M$ orientata, le densità vettoriali di peso 1 sono in corrispondenza biunivoca con le $(m-1)$–forme

$$\tilde{\omega}(x) \longmapsto \tilde{\omega}(x)^\nu \, ds_\nu(x)$$

(ovviamente, si devono utilizzare solo carte orientate positivamente).

## Riferimenti bibliografici

[1] S. Kobayashi, K. Nomizu: *Foundations of Differential Geometry, Vol. I*; John Wiley & Sons, New York · Chichester · Brisbane · Toronto · Singapore, 1963.

[2] S. Kobayashi, K. Nomizu: *Foundations of Differential Geometry, Vol. II*; John Wiley & Sons, New York · Chichester · Brisbane · Toronto, 1969.

[3] J. Dieudonné: *Éléments d'analyse 1 / Fondements de l'analyse moderne*; Gauthier–Villars, Paris, 1969.

[4] J. Dieudonné: *Éléments d'analyse 3*; Gauthier–Villars, Paris, 1969.

[5] J. E. Marsden, T. Ratiu, R. Abraham: *Manifolds, tensor analysis and applications, Third Edition*; Springer–Verlag, 2001.

[6] M. Ferraris: *Appunti di algebra lineare, multilineare e tensori*; 2023.

[7] M. Ferraris: *Appunti di calcolo differenziale*; 2023.

[8] M. Ferraris: *Varietà differenziabili*; 2023.